Laboratorio per l'Assemblea Nazionale 22-24 marzo 2019

Il metodo naturale in matematica

Visioni a confronto in vista di un manifesto

Nicoletta Lanciano, Donatella Merlo

Tutti sono capaci di fare una "creazione matematica", diceva Paul Le Bohec, ma per capire il senso della sua proposta didattica occorre sperimentarla in prima persona. Nel laboratorio si "reinventa la matematica" a partire da produzione spontanee che, come il testo libero in italiano, permettono a ciascuno di esprimere le proprie potenzialità e, nello stesso tempo, di imparare cose nuove attraverso il confronto con gli altri. In questa cornice diventa naturale il parallelo con la matematica di Emma Castelnuovo e con le esperienze di Giuseppina Marastoni, con l'eredità importante che entrambe ci hanno lasciato.
L'attività laboratoriale dovrebbe mettere in luce alcuni punti irrinunciabili su cui fondare la didattica della matematica. Questi, uniti alle esperienze personali dei conduttori e dei partecipanti, confluiranno in un *"Manifesto del MCE sull'insegnamento della matematica"* la cui bozza proporremo alla discussione. Il compito del gruppo sarà discutere, completare, perfezionare il *Manifesto* e impegnarsi poi per renderlo "concreto" nelle pratiche didattiche del Movimento.

Assemblea Nazionale MCE 22-24 marzo 2019
Laboratorio
Il metodo naturale in matematica
Visioni a confronto in vista di un manifesto

Nicoletta Lanciano, Donatella Merlo

Presentazione del laboratorio

Il laboratorio ha lo scopo di proporre una visione della Matematica non stereotipata, che stimola a pensare e ad essere creativi nello stesso tempo, ad usare le mani e tutto il corpo quando serve. Fa riferimento a due grandi figure di insegnanti: Paul Le Bohec ed Emma Castelnuovo.

Paul Le Bohec descrive il suo metodo di lavoro nel libro "*Il testo libero di matematica*" (non più reperibile in catalogo) che pone il problema dell'insegnamento della Matematica in un'ottica diversa rispetto al "calcolo vivente" introdotto da Freinet. Il "calcolo vivente" faceva riferimento alla realtà e quindi a pratiche utili nella vita quotidiana che dovevano motivare l'interesse degli allievi proprio per questa loro caratteristica; il testo libero di matematica o meglio le "creazioni matematiche" di Le Bohec fanno maggiormente riferimento alle strutture tipiche della disciplina, stimolano ad esplorare la matematica andando molto al di là dei suoi aspetti strumentali, a reinventarla partendo dal basso cioè da ciò che le persone sanno e sono perché le creazioni coinvolgono naturalmente aspetti emotivi ed affettivi. Richiede poi una capacità da parte dell'insegnante di interpretare le creazioni e di indirizzare l'attenzione degli allievi sugli aspetti matematici che interessano di volta in volta per collegarli con il percorso complessivo della classe. In prima istanza, però, è il gruppo che interpreta la creazione, che "tira fuori" la matematica facendo riferimento alle conoscenze dei singoli. È un lavoro di co-costruzione in linea con le teorie socio-costruttiviste di cui Le Bohec era portatore anche in ambito linguistico, ma con un'attenzione particolare al singolo, alle sue capacità inventive e alle sue conoscenze che la situazione stessa mette in luce e contemporaneamente fa evolvere grazie al contributo del gruppo.

Emma Castelnuovo descrive il suo metodo di lavoro nel libro Didattica della matematica (1963), riedito nel 2017 da Utet Università. La sua matematica, destinata principalmente ai ragazzi di 11-14 anni, ha legami con la realtà in tutte le sue forme: le arti, la natura, il pensiero umano, le tecnologie, le scienze. E' una matematica che ha radici storiche che vengono esplicitate, anche attraverso la lettura diretti dei testi. La geometria di cui Emma si è molto occupata è una geometria dinamica, cioè che mette in movimento le figure, gli oggetti, e quindi prevede azioni da parte di chi li studia: la dinamicità porta con sé un passaggio da oggetti statici e separati (il quadrato, il rettangolo, il parallelogramma) alla continuità della trasformazione con cui un quadrato può diventare un rettangolo e questo un parallelogramma. Tali trasformazioni inoltre permettono di ragionare su "casi limite", che coinvolgono lo zero e l'infinito e in cui ci si interroga sempre su ciò che varia e ciò che resta uguale. E' molto importante il materiale semplice ed economico che viene proposto e l'atteggiamento di scoperta di ciascuno, prima di ricevere informazioni e saperi già codificati: pone grande attenzione al parlare e scrivere di matematica da parte degli allievi.

Introduzione al laboratorio

Tutti sono capaci di fare una "creazione matematica", diceva Paul Le Bohec, ma per capire il senso della sua proposta didattica occorre sperimentarla in prima persona. Nel laboratorio si "reinventa la matematica" a partire da produzione spontanee che, come il testo libero in italiano, permettono a ciascuno di esprimere le proprie potenzialità e, nello stesso tempo, di imparare cose nuove attraverso il confronto con gli altri. In questa cornice diventa naturale il parallelo con la matematica di Emma Castelnuovo e con le esperienze di Giuseppina Marastoni, con l'eredità importante che entrambe ci hanno lasciato.
L'attività laboratoriale dovrebbe mettere in luce alcuni punti irrinunciabili su cui fondare la didattica della matematica. Questi, uniti alle esperienze personali dei conduttori e dei partecipanti, confluiranno in un *"Manifesto del MCE sull'insegnamento della matematica"* la cui bozza proporremo alla discussione. Il compito del gruppo sarà discutere, completare, perfezionare il *Manifesto* e impegnarsi poi per renderlo "concreto" nelle pratiche didattiche del Movimento.

I nostri appunti dal laboratorio... da leggere, completare, commentare....

Stimoli da PAUL LE BOHEC

Prima attività: le creazioni matematiche

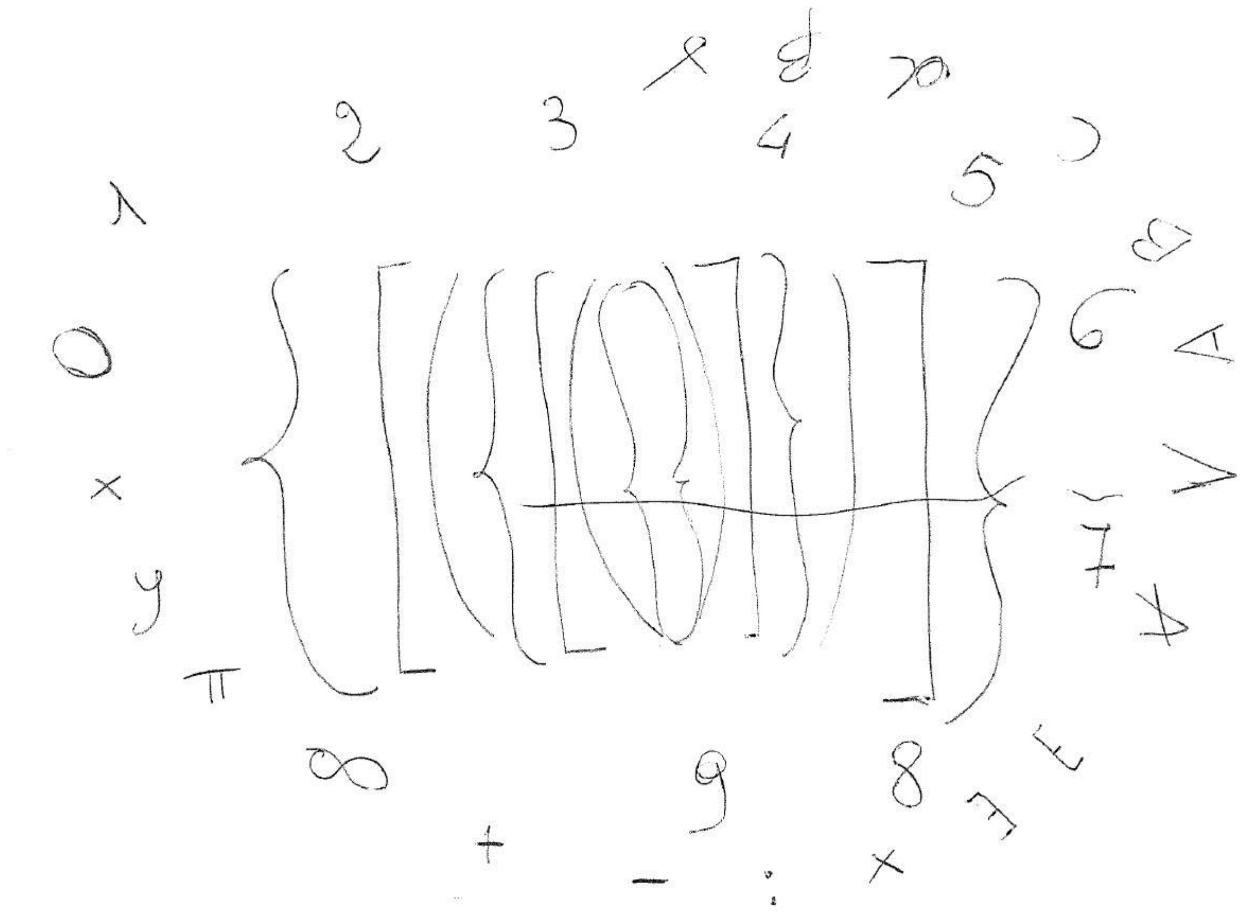
Per noi questo laboratorio con voi costituisce l'inizio di una ricerca nuova, ma non lo è per MCE che ha incontrato tante volte Paul Le Bohec negli anni anni '80.

Nel laboratorio adulto vi invitiamo ad un'attenzione che permette ascolto reciproco, e a pratica la "sospensione del giudizio" verso le parole, i pensieri, i disegni, i gesti degli altri ma anche di voi stessi: questo vuol dire non rinunciare a parlare pensando che altri esporranno il nostro pensiero meglio di noi, a non giudicare il proprio pensiero come poco valido, poco interessante e forse errato. Tutti i contributi sono oggetti della nostra riflessione e gli errori per noi sono oggetti preziosi.
Durante il laboratorio vengono letti alcuni brani tratti dal libro "Il testo libero di matematica" (vedere allegato "Consegne laboratorio Le Bohec")

Proponiamo un lavoro individuale con questa **consegna**: "Fate un creazione matematica" (vedere consegne e materiali laboratorio allegati) con carta e matite. Lettura del testo di Le Bohec su che cos'è una "creazione matematica".

15 minuti di produzione individuale silenziosa.
Scelta di una delle creazioni realizzate ed esposte. Inizia la riflessione in cui nessuno commenta il proprio lavoro, mentre gli altri commentano, interpretano, fanno collegamenti e associazioni di pensieri a partire dal lavoro altrui.
Si sperimenta così il ruolo del gruppo nella elaborazione dei significati delle diverse creazioni.
L'autore parla per ultimo.
(vedere l'allegato "Dialogo matematico" con tutte le creazioni)

Analisi della prima creazione



Divertentissimo - Ci sono le lettere! mi piace fare matematica senza matematica
Alfabeto come sequenza di numeri a=1, b=2…
Simboli come in 5 liceo
Segni liberi
Rifiuto delle parentesi
Simboli come elementi grafici letti come prodotto artistico
Libertà di espressione
Inversione della posizione dei simboli fuori dalle parentesi, mentre di solito stanno tra le parentesi
Estetica
Il pensiero (ir)razionale
Potrebbe avere il Titolo: matematica libera tutti
Scoperta della doppia simmetria, con un asse orizzontale e uno verticale, tra le parentesi
Dopo le E le lettere sono a specchio
Fumetto di un pensiero

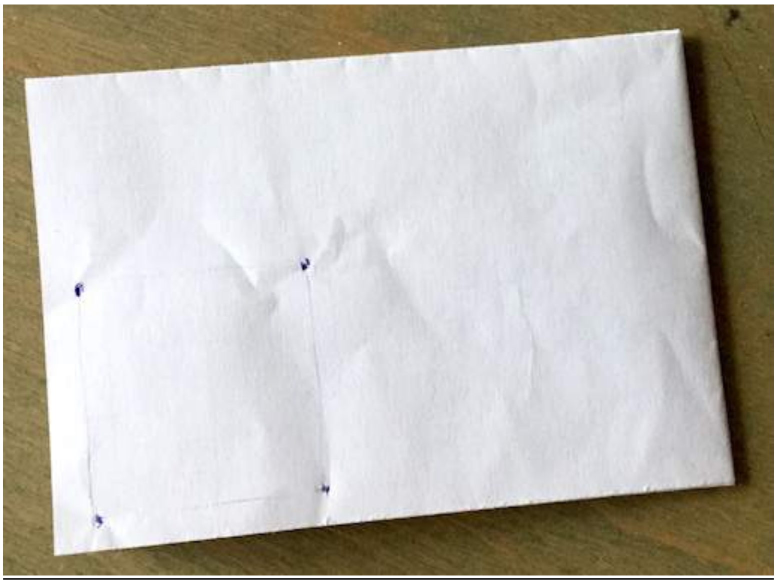
Parla l'autrice:
Ho disegnato quello che mi veniva in mente, mi piacevano le parentesi ho pensato agli specchi
Ci ho messo la confusione che ho in testa
Gesto artistico
Mi sono annoiata di sentir dire dai bambini che la matematica è ordinata

Riprende il dialogo tra tutti
I numeri sono in ordine da 1 a 9, lo 0 l'ho aggiunto dopo
C'è un ordine crescente o decrescente tra i numeri? Aspetti culturali dell'ordine della scrittura: da destra a sinistra o viceversa – accenno all'etnomatematica e alle difficoltà di chi scrive con un senso diverso
Perché non -1?
Le lettere sono anche simboli algebrici

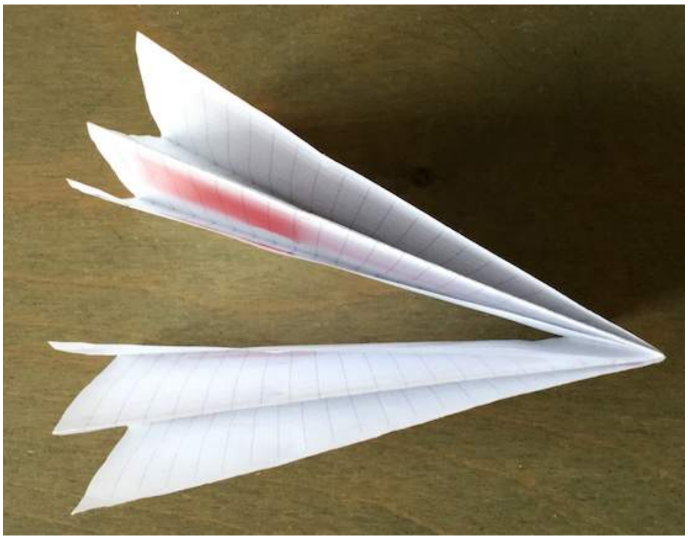
Alcuni temi riassuntivi:
Le parentesi di solito chiudono: qui sono chiuse dai segni intorno
Vengono fuori aspetti matematici e anche emozionali ed affettivi di noi, quello che sai è quello che sei.
Le lettere che possono diventare numeri
La classe .. la quinta liceo
Simbolo matematico sia numero che non come elemento grafico
Creazione artistica attraverso i simboli della Matematica
Inversione: le parentesi racchiuse dai numeri
Estetica, il pensiero razionale (ir)razionale

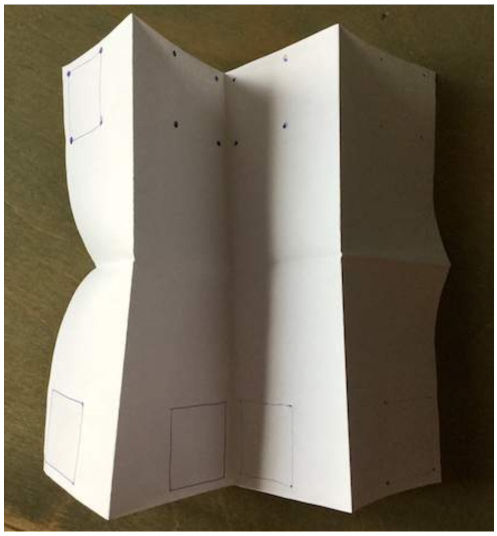
Grande confusione nonostante l'ordine delle parentesi, è creativo, confusione/creatività
Grande ordine
Simmetria
Un fumetto che rappresenta il pensiero razionale e irrazionale insieme

Scegliamo una seconda creazione da analizzare

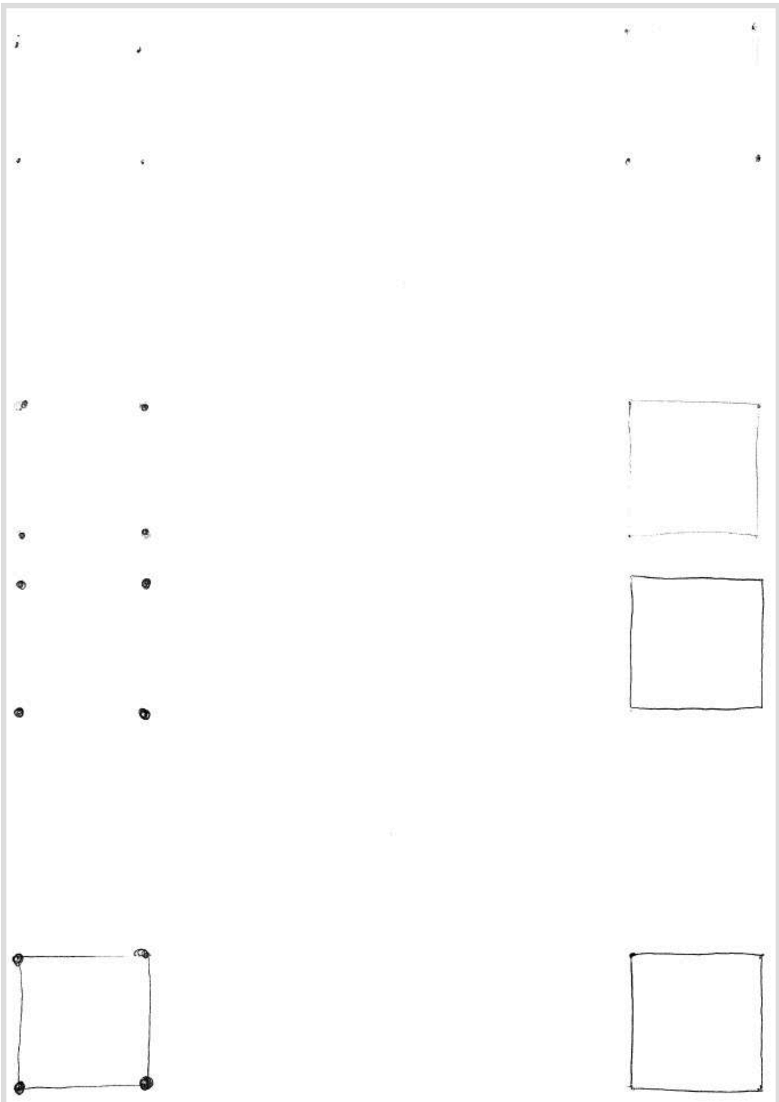


E' un foglio piegato: ci chiediamo se aprirlo o no
Decidiamo prima di aprirlo di sbirciare nelle pieghe
E' un A4 piegato in 8
Si intravedono rettangoli fatti o a segmenti o puntini
La matematica nascosta nelle pieghe di un foglio
Proiezione imprevedibile
Cartone ani-matematico





Aprendolo si scoprono simmetrie dei rettangoli



Piegato è la realizzazione di proiezioni
Aperto potrebbe essere astratto
Cartone animato
Aperto ha una faccia bianca e una con i rettangoli simmetrici

Ognuno con 8 rettangoli
Gioco della trasparenza
Uscita dal piano
Dipende dall'ordine delle piegature: quindi c'è un <u>se</u> che ci porta alla pedagogia delle variazioni, alle differenze che si potrebbero creare
Tanti diversi modi di pensare.... Ascolto
Co-costruzione di conoscenza
Non è più la tua conoscenza ma una conoscenza comune
Se parti da ciò che le persone sono e sanno è l'insegnante che ha la professionalità per andare oltre

Riflettiamo su quanto influenza la consegna
Segni, simboli ...non piegature?
Ascolto dell'adulto e dei pari sulla propria produzione
Riflettiamo sulla parola "Creazione": inventare essere creativi, reinventare la matematica,
Attenzione alle azioni, in questo caso piegare, ma anche fare i buchi nel foglio
Per i bambini piccoli: sono fondamenti lo spazio, il corpo, il fare
I punti del rettangolo realizzati bucando il foglio risultano in rilievo (ciechi)
Curiosità verso gli altri
Sei aperto a qualsiasi cosa
Ti aspetti da tutti qualcosa e tutti cercano di dare qualcosa
Tradurre in parola, matematica parlata
La frase "la matematica non è un'opinione" era per me una barriera nei confronti della Matematica
Emozione del foglio bianco su cui fare la propria creazione e che comporta un momento iniziale di panico
Sapere come oggetto codificato contrapposto al potere generativo del sapere nella sua dimensione genetica

Seconda attività: il calendario

Materiale: calendario a fogli staccabili con i vari mesi, per il laboratorio sono stati preparati i foglietti di gennaio, febbraio, marzo 2019 (l'attività è documentata nel testo dell'autore dove viene anche contestualizzata nell'attività di classe - vedere i materiali allegati)

Consegna: disponete i foglietti dei giorni del vostro mese nel modo che preferite

I gruppi fanno le loro "creazioni" poi si commenta rilevando subito come i tipi di disposizione seguano logiche diverse ma come emergano subito alcuni "costrutti matematici".

Modulo 7
Numeri quadrati, numeri primi, tabelline, pari/dispari
Mantenimento dell'ordine del calendario e no?
Trovare una razionalità, dal piccolo al grande
Da 1 a 7 in riga
Albero: forma irregolare, albero di numeri tagliando sempre in due
Ordine crescente/decrescente
Orario/antiorario

<u>Gruppo GENNAIO</u>

giorni della settimana
1º tentativo tutti i lunedì ecc. ma era un calendario normale
Giorni di vacanza: allontanare sabato e domenica, corridoi per separare mazzetti
Relazione numerica 7 14 21 ....

7	14	21	28	moltiplicativo
7+1	14+1	21+1	28+1	
7+2	14+2	21+2	28+2	
7+3	14+3	21+3	28+3	additivo+classi di resto modulo 7
7+4	14+4	21+4		
7+5	14+5	21+5		
7+6	14+6	21+6		

<u>Gruppo FEBBRAIO</u>
Si discute su quale sia il giorno più bello della settimana: giovedì come pre-preludio del fine settimana, la domenica diventa il giovedì
Classificazione per giorno lun mar mer
Poi si sfoglia ogni mucchietto ribaltando i foglietti.
Mucchietti coperti da lunedì... da venerdì...
O dall’1 al 7
I giorni della settimana ... ciclicità
Solo i numeri dei giorni... lineare

<u>Gruppo MARZO</u>
albero come è fatto?
Numeri dispari
Quadrati perfetti... radici quadrate (le radici dell'albero)
Multipli di 3
Numero chioma
Oggi mi sento radice
Si può optare, si raccoglie
Racconto della costruzione collettiva e annuale del Calendario agrofestivo in Ecuador
Radici.... radice quadrata.... numeri quadrati 1, 4, 9, 25
Numeri primi nel tronco
Numeri dispari nella chioma
Pari ma lun mar mer... intorno alla chioma
Oggi 22 è un numero chioma
Domani sono un numero tronco
In questi giorni (bordo chioma) si semina

Numeri e nomi dei giorni della settimana
Qual è il 2º giorno? Venerdì perché mi piace, precede la festa
I 7 giorni settimana e i loro nomi aprono verso altri lavori

Terminato il laboratorio i partecipanti esaminano e commentano le produzioni degli allievi di Le Bohec sullo stesso tema del calendario *(vedere allegato "Il calendario Le Bohec")*

Stimoli da EMMA CASTELNUOVO

Prima attività: con uno spago tra le dita

Materiale: uno spago a ciascuno di circa 40 cm, si chiede di legare i due estremi

Consegna: quali forme si possono fare reggendo lo spago tra le dita delle due mani: forme chiuse, con buchi, con intrecci, con concavità e convessità, sovrapposizioni – si cercano le parole
Consegna: formare un rettangolo.... poi altre forme.... triangolo..... quadrato.... poligoni con più di 4 lati....
Contorno = contiene = le forme diverse hanno tutte lo stesso perimetro...

Domanda: i rettangoli e il quadrato hanno lo stesso perimetro: avranno anche la stessa area?

Muovendo le dita si nota che ci sono dei casi limite... l'interno sparisce, l'area diventa zero se rimpicciolisco tanto l'altezza o la base. Si scopre nella trasformazione della figura.
Il Perimetro è legato alla somma delle misure dei lati - L'Area è legata alla moltiplicazione delle misure
Fino a che non ci metti i numeri non capisci, per qualcuno
Continuità e discontinuità
Teoria del crollo finale dell'area interna, e non trasformazione e diminuzione a poco a poco
Come se ci fosse una Funzione non continua?

Seconda attività: **figure articolabili**

Materiale: listelli di cartone con buchi e fermacampioni (prima 3 listelli, poi 4 listelli) tipo meccano

Consegna: costruite un triangolo

Ogni gruppo ha tre sbarrette. Si scopre che in alcuni casi il triangolo non si chiude, non si può fare. Si esplicita che ciò accade quando la somma di due lati è minore del terzo lato cioè se uno è più lungo di due messi insiemi si ha l'impossibilità di costruire il triangolo.
Si osserva come una figura con tre lati si blocca, non è articolabile, è rigida e unica, una volta dati i tre lati. Regola di usare tutte le stecche. Dati 3 lati è fisso
Attenzione al rapporto tra i lati

Riflessioni sull'uso di modelli o materiali concreti: una caratteristica delle proposte di Emma Castelnuovo. L'uso dei modelli si contrappone a quello del disegno che è necessariamente statico, o meglio è complementare ad esso. La dinamicità che offre il materiale stimola il pensiero e porta anche in questo caso a reinventare la matematica. (Vedere materiali da leggere allegati)

Consegna: costruite una forma con 4 lati

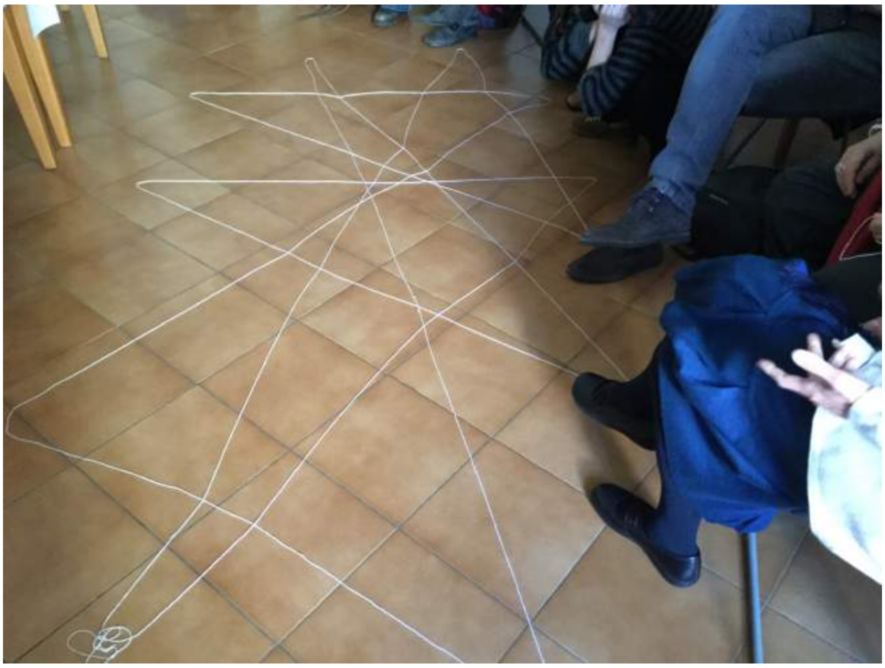
Verso la definizione di quadrilatero
Operazioni sull'oggetto
Se si scelgono 4 strisce uguali si può fare un quadrato, che articolato... diventa rombo

Il Quadrato è un rombo particolare – che cosa varia? gli angoli e le diagonali- che cosa resta uguale? Il perimetro e il parallelismo dei lati a due a due, e l'uguaglianza degli angoli a due a due.
Casi limite
In un movimento piccolissimo, una variazione dell'inclinazione dei lati... abbiamo in mano l'infinito!

Terza attività: la ragnatela

Materiale: un gomitolo di spago

Ci si mette in cerchio. Si lancia il gomitolo, srotolandolo, ad una persona del cerchio che trattiene il filo con le dita, questa a sua volta rilancia il gomitolo ad un altro in modo da formare un intreccio di fili. Poggiamo per terra la ragnatela....
Quali osservazioni ci vengono in mente? Rette, segmenti, punti di intersezione, angoli, forme...
Quali forme? Perché?



Lettura di alcune citazioni su errori, ostacoli, difficoltà *(vedere allegati: "Castelnuovo-metodo costruttivo", "Citazioni sull'errore")*

PRIMA DEL MANIFESTO....
I partecipanti sono invitati a scrivere su un foglietto quali sono gli elementi, le idee, i metodi secondo loro irrinunciabili nell'insegnamento della matematica... un contributo alla revisione del Manifesto della Matematica che verrà presentato subito dopo. *(vedere l'allegato "Dialogo matematico")*

Lettura e prime riflessioni in comune sul MANIFESTO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA Per un uso consapevole, democratico e formativo del pensiero matematico e dei suoi strumenti.

I partecipanti scrivono i loro commenti sul testo. Emerge la necessità di averne una versione più sintetica.

Laboratorio per l'Assemblea Nazionale 22-24 marzo 2019

Il metodo naturale in matematica

Visioni a confronto in vista di un manifesto

Nicoletta Lanciano, Donatella Merlo

Il METODO (pp. 8-9)

“I bambini avevano un quaderno di creazioni sul quale realizzavano dei “testi liberi di matematica” nel momento in cui volevano e se lo volevano. La sera io prendevo la metà dei quaderni degli alunni di 7 anni e la metà di quelli di 8 anni. E riportavo una creazione di ciascun quaderno alla lavagna. Il giorno dopo prendevo l’altra metà. Così ogni due giorni ciascun bambino vedeva una delle sue creazioni presa in considerazione. Questo è importante per temperare l’atmosfera solenne e mantenere il flusso della produzione Alcuni colleghi hanno tentato, per prudenza, di lavorare in questo modo “folle” una sola volta per settimana. Ma questo non ha funzionato bene, perché l’onda non è stata mantenuta. […] Se si vuole veramente tentare l’esperienza, è meglio consacrarvi quindici giornate complete. […] Ciò che permette di mantenere l’onda, è lo studio quotidiano delle realizzazioni. […] Nella mia pluriclasse CE1-CE2 di 28 alunni si studiavano ogni giorno 7 creazioni di un corso e 7 creazioni di un altro.”

Pag. 62-63

"così io riportavo una creazione di ciascuno alla lavagna. Mi si potrebbe chiedere la ragione delle scelte da me operate.
All'inizio avevo soprattutto la preoccupazione di aprire al massimo il ventaglio delle possibilità. Ma assai rapidamente, mi accorsi che l'essenziale è partire.
In effetti ebbi presto modo di rendermi conto che per la maggior parte del tempo la mia visione delle cose era molto ristretta. Ed invece con queste menti infantili così nuove e così sveglie, non si poteva assolutamente prevedere ciò che ne sarebbe uscito. Così, alla vista di un semplice rettangolo con mediane e diagonali, dicevo: "è banale, ci fermeremo sopra due minuti".
E ci si restava un'ora. Ma l'inverso era ugualmente vero. Alla vista di certe costruzioni, mi fregavo in anticipo le mani interiori. Delusione! Era un fiasco. Tuttavia qualche infinitesima traccia doveva restare poiché, immancabilmente, ritornava come di rimbalzo. E mai nel modo che ci si sarebbe potuto attendere. Per fortuna, al tempo di questa esperienza inaugurale, la mia mente era sufficientemente aperta per accettare tutto ciò che si presentava. Aveva imparato d'aver fiducia: I bambini si incaricano loro di mettermi al passo, al loro passo.
Ed è certamente così che io potevo accelerare l'acquisizione di conoscenze, per essi matematiche, per me pedagogiche."

PRIMA ATTIVITÀ
Materiali: un foglio di carta bianco, matita

CONSEGNA: **“Fate una creazione matematica”**

Che cosa è un creazione matematica?
Dice Paul Le Bohec: “È semplice, è *una qualsiasi cosa*! Allora ecco: a partire da cifre, da numeri, da punti o da lettere (cioè da segni), componete una cosa qualsiasi. Questa qualsiasi cosa, tutti sono capaci di farla. […] Tranquillizzatevi. Se non avete compreso questa volta, si farà un secondo giro.”

PRESENTAZIONE DELLE PROPRIE CREAZIONI MATEMATICHE AL GRUPPO
Discussione
Sintesi su cartellone delle idee matematiche emerse. Quali sviluppi? Quali collegamenti?

IL RUOLO DEL GRUPPO (pp. 165-166):
"Il gruppo gioca un ruolo considerevole. Anzitutto può essere un luogo di parola, un luogo di accoglienza, un luogo nel quale esprimere liberamente delle ipotesi, senza temere giudizi spregiativi. Il che non impedisce la critica, una critica oggettiva che si focalizza molto rapidamente sui fatti e non sulle persone. Ed anche una critica immediata che accelera la presa di coscienza. Il gruppo funziona così come una cassa di risonanza; amplia le piccole idee, i minimi comportamenti, crea degli avvenimenti forti che inscrivono con forza le conoscenze nella memoria."
[…]
"Il maestro ha un ruolo importante da giocare perché il gruppo divenga e rimanga positivo. Deve proteggere la libertà degli individui, canalizzare il carattere forte, capire il debole, imparare a non precipitarsi, acquisire il piacere del "politico".
Dunque deve essere formato, auto-formato, co-formato alla percezione dei fenomeni di gruppo per meglio dominarli e renderli benefici”

SECONDA ATTIVITÀ
Materiali: calendario con fogli staccabili, dare un mese ad ogni gruppo

CONSEGNA: **"Staccate i foglietti del vostro mese e disponeteli sul tavolo nel modo che preferite"**

PRESENTAZIONE DELLA PROPRIA CREAZIONE AL GRUPPO
Discussione
Sintesi su cartellone delle idee matematiche emerse. Quale matematica emerge da questa proposta? Come sfruttarla didatticamente?
Visione dei calendari prodotti dagli allievi di Le Bohec.


GENNAIO
1
MARTEDÌ
GENNAIO
2
MERCOLEDÌ
GENNAIO
3
GIOVEDÌ
GENNAIO
4
VENERDÌ
GENNAIO
7
LUNEDÌ
GENNAIO
8
MARTEDÌ
GENNAIO
9
MERCOLEDÌ
GENNAIO
10
GIOVEDÌ
GENNAIO
11
VENERDÌ
GENNAIO
5
SABATO


FEBBRAIO 1 VENERDÌ
FEBBRAIO 2 SABATO
FEBBRAIO 3 DOMENICA
FEBBRAIO 4 LUNEDÌ
FEBBRAIO 5 MARTEDÌ
FEBBRAIO 6 MERCOLEDÌ
FEBBRAIO 7 GIOVEDÌ
MOVIMENTO DI COOPERAZIONE EDUCATIVA
DI APPRENDERE


MARZO 8 VENERDÌ
MARZO 30 SABATO
MARZO 24 DOMENICA
MARZO 26 MARTEDÌ
MARZO 28 GIOVEDÌ
MARZO 27 MERCOLEDÌ
MARZO 21 GIOVEDÌ
MARZO 31 DOMENICA
MARZO 6 MERCOLEDÌ
MARZO 20 MERCOLEDÌ
MARZO 15 VENERDÌ
MARZO 14 GIOVEDÌ
MARZO 19 MARTEDÌ
MARZO 29 VENERDÌ
MARZO 12 MARTEDÌ
22 VENERDÌ
MARZO 18 LUNEDÌ
MARZO 7 GIOVEDÌ
MARZO 3 DOMENICA
MARZO 10 DOMENICA
MARZO 11 LUNEDÌ
MARZO 17 DOMENICA
MARZO 13
MARZO 5 MARTEDÌ
MARZO 2
MARZO 23 SABATO
MARZO 25 LUNEDÌ
MARZO 4 LUNEDÌ
MARZO 16 SABATO
MARZO 1 VENERDÌ
9 SABATO

IL CALENDARIO IN CLASSE

Tratto da "il testo libero di Matematica" pag. 67 e seguenti

Materiale: calendario con fogli staccabili. Ogni giorno un bambino stacca un foglietto e lo fissa alla lavagna.

Gennaio (in orizzontale) è come ottobre, novembre, dicembre...

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Febbraio (in verticale)

1	8	15	22
2	9	16	23
3	10	17	24
4	11	18	25
5	12	19	26
7	14	21	28

Marzo (modo inventato da Patrice, se fosse stato aprile sarebbe stato simmetrico)

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	
		22	23	24		
			25			
	26	27	28	29	30	31

I numeri rossi sono dei quadrati.

Aprile Robin organizza i giorni con il quadrato 5 fino al 25 e poi aggiunge il quadrato di 2 e di 1 per arrivare a 31.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

$5^2 + 2^2 + 1^2 = 30$

Maggio Pierrick vuole mettere tutti i quadrati da 1 in poi

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2 = 31$ (per aprile sarebbe stato $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$)

Giugno

1						
2	3					
4	5	6				
7	8	9	10			
11	12	13	14	15		
16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

I numeri rossi sono una successione
1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4 ecc

Ritornando a gennaio...

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

8 è una fila completa e 1
15 è 2 file di 7 e 1
22 è 3 file di 7 e 1
29 è 4 file di 7 e 1...
E 1? (chiede il maestro)
0 file di 7 e 1

Si può rappresentare con i regoli (p.70)

1
8
15
22
classe di resto 1 modulo 7
La settimana è il modulo 7

2 9 16 23   classe di resto 2 modulo 7 ecc.

il dialogo matematico rispetto a qualsiasi argomento: ragionare per ipotesi, confrontarle e insieme arrivare a conclusioni che ci convincono, oppure constatare ~~e~~ che esistono più punti di vista e ~~[illegible]~~ e strategie diverse.

Attenzione particolare al processo!

calma – attesa e

capaci – di pensare assieme

il ragionare

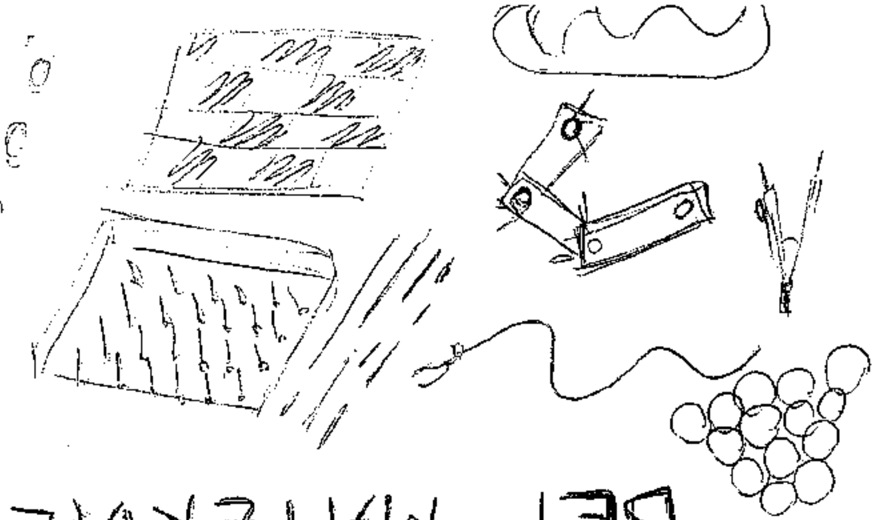
lasciare [illegible] l'intuizione

Eliminare il più possibile il bianco e il nero

giusto – sbagliato

Trovare tante strade

Libertà di pensiero



DEI MATERIALI
CO-COSTRUZIONE

<u>Esplorare</u> con **IL CORPO** e con **LA MENTE** questioni matematic
<u>proposte</u> dall'insegnante come
questioni aperte o emerse dall
<u>ascolto della</u> spontaneità dei bambini.

Mi hanno insegnato che l'area di un rettangolo si ottiene moltiplicando la base per l'altezza, ma non mi è mai stato chiesto il perché.
Non è positivo insegnare a dare risposte, senza riflettere sui motivi che le giustificano.

~~"GUARDARE"~~ "OSSERVARE" e TOCCA
INSIEME, A
SCUOLA, LA MATEMATICA
INTORNO A NOI.
STIMOLARE AD OSSERVARE e RI
LA MATEMATICA NELLA PROPRI
VITA QUOTIDIANA, FUORI DA
SCUOLA.

Provare senza paura tutte le possibilità che ti vengono in mente.

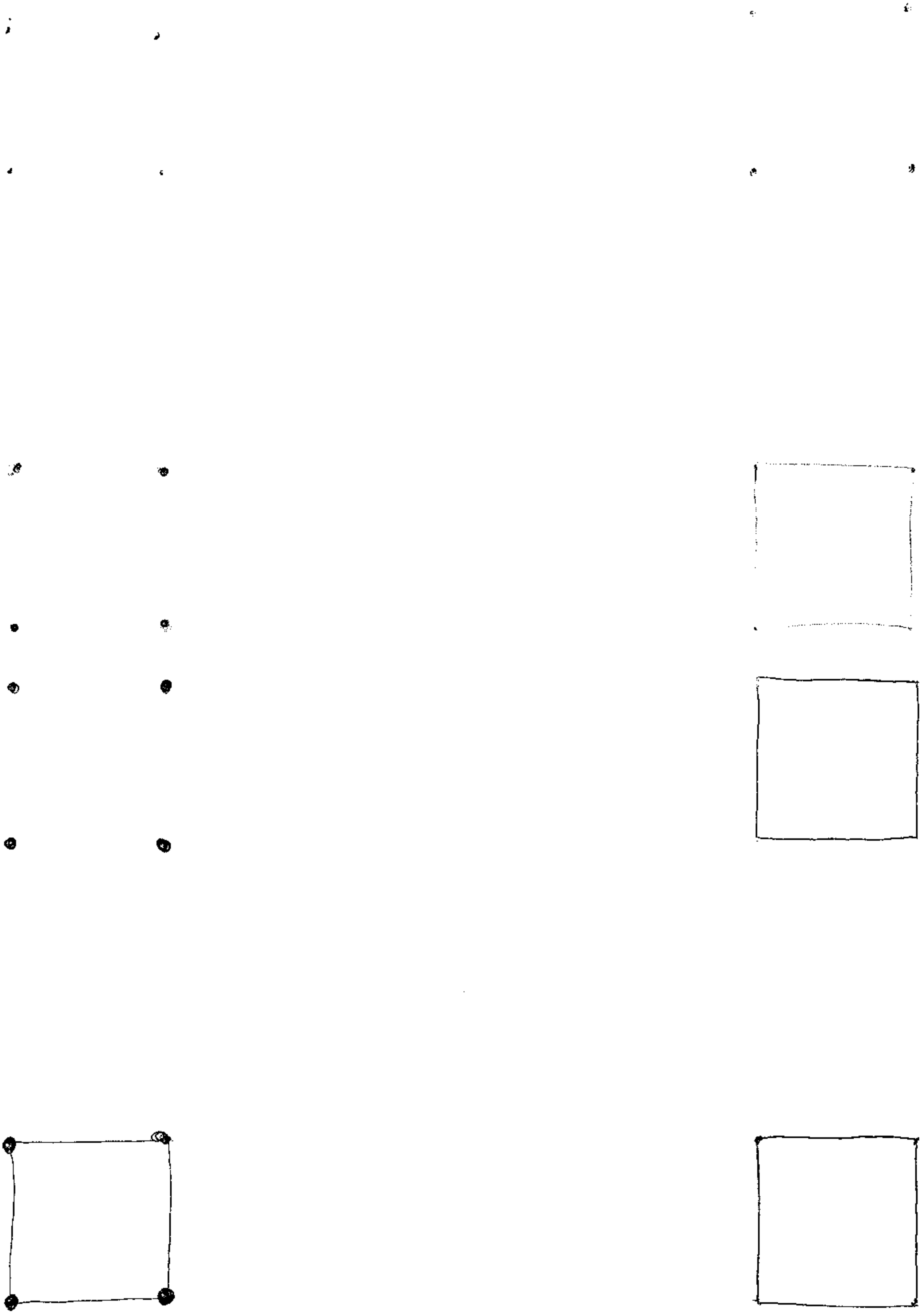
- AVERE STRUMENTI POCO STRUTTURATI (corde, fili, carte ...) SEMPRE A DISPOSIZIONE
- ...

1 Ascoltare gli allievi,

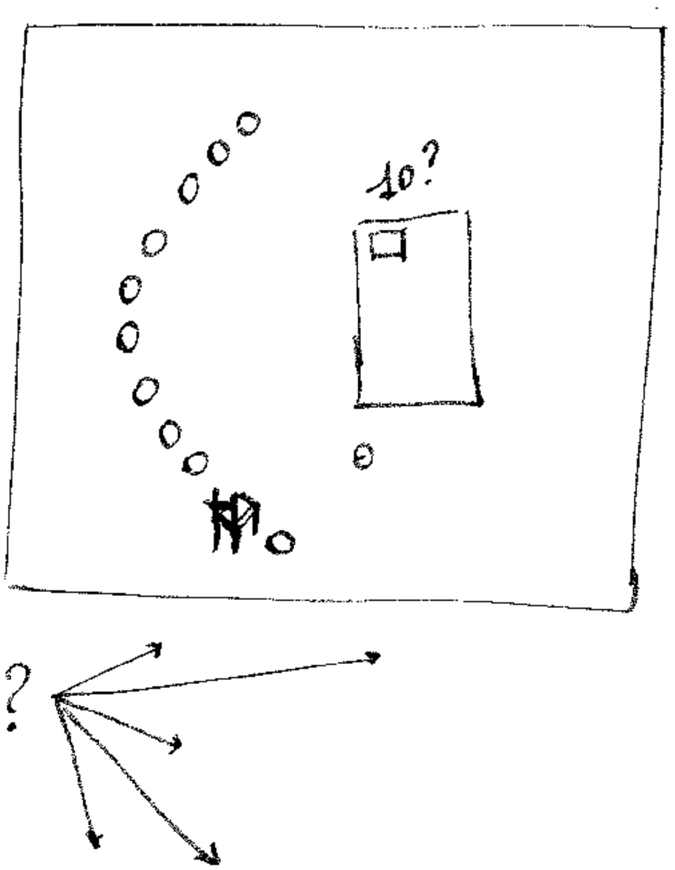
2 dare loro il tempo di parlare,

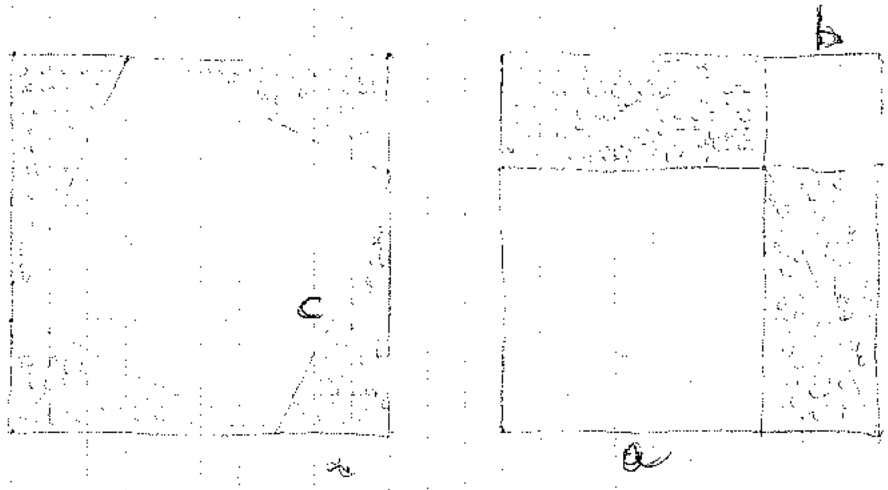
3 presentare questioni ~~porre domande~~ aperte

CREATIVITÀ per contestualizzare e valorizzare la MATEMATICA quotidianamente affinché non sia una materia puramente scolastica

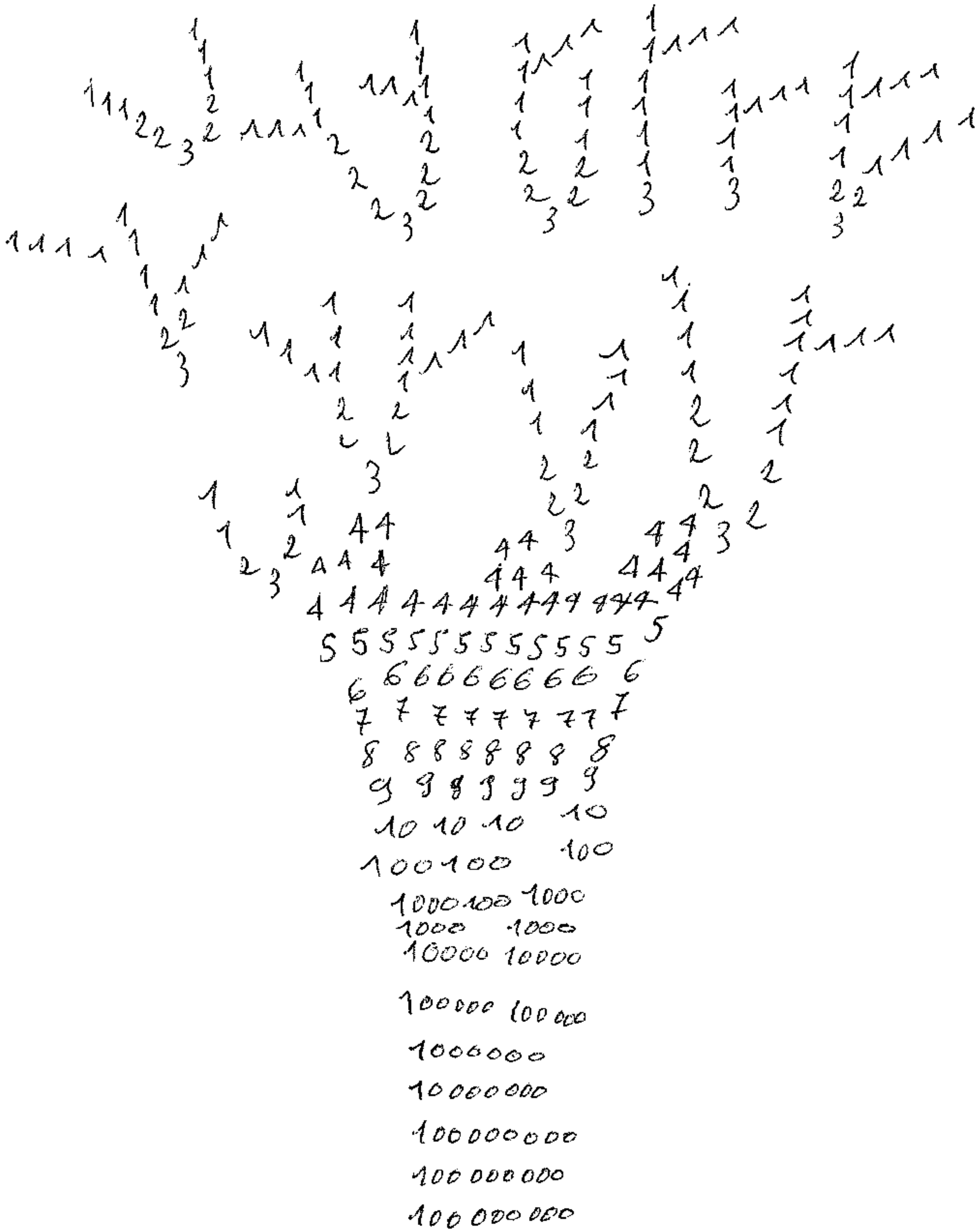


C8E 2E10L13 E17S516E a191 !

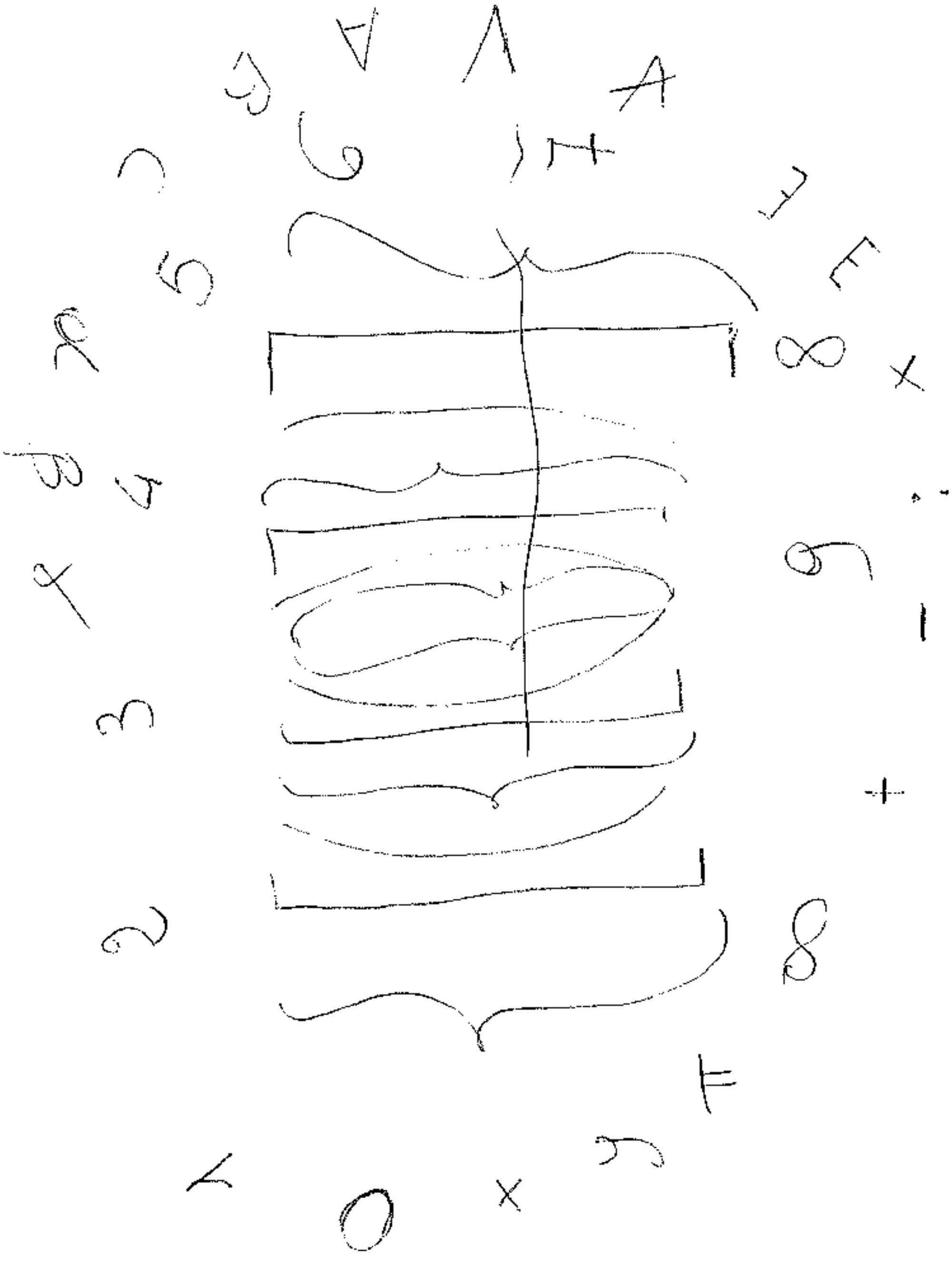


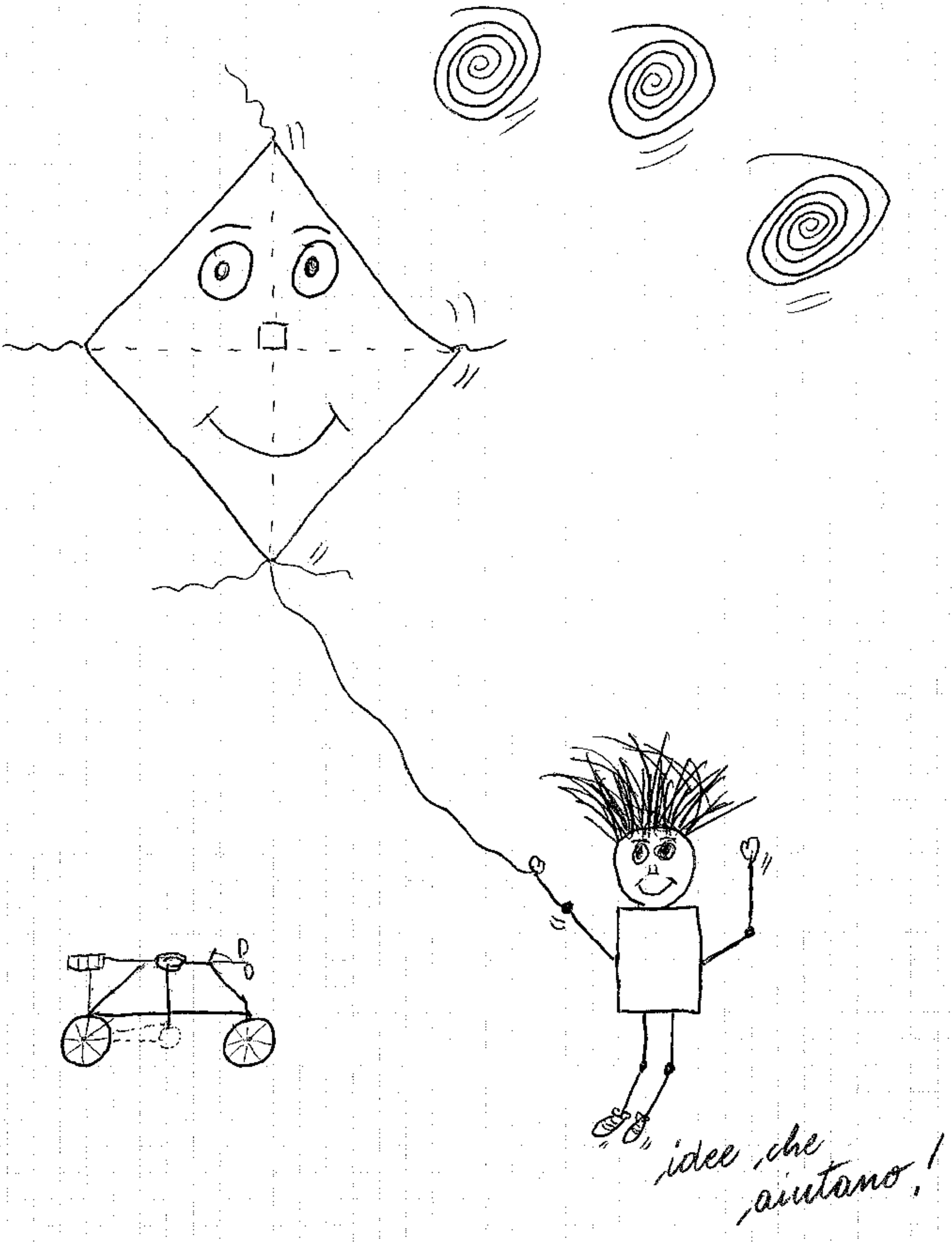


$$a^2 + b^2 = c^2$$



4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9
10 10 10 10
100 100 100
1000 100 1000
1000 1000
10000 10000
100000 100000
1000000
10000000
100000000
100 000 000
100 000 000





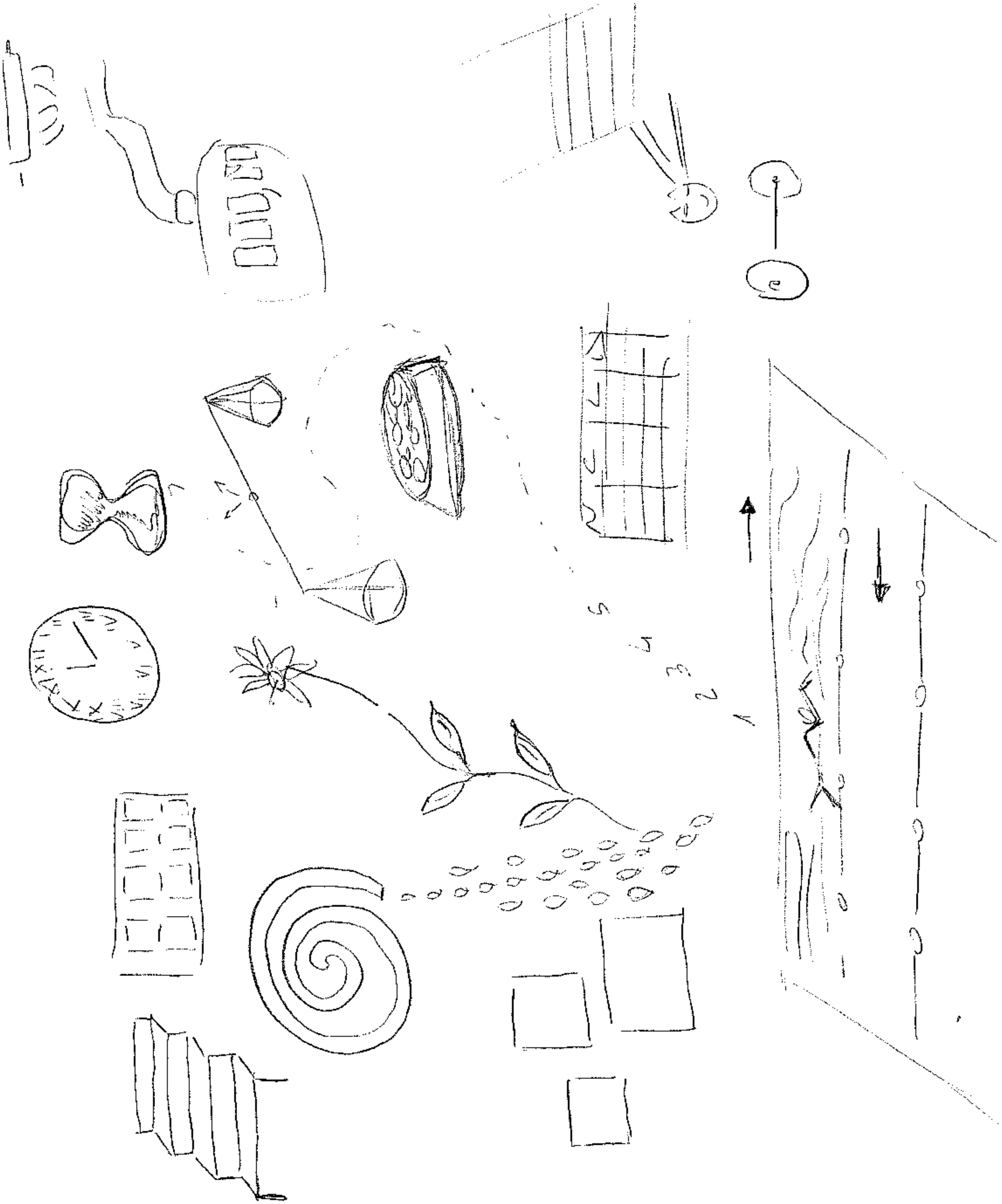
Erickson

Edizioni
Centro Studi Erickson S.p.A.

www.erickson.it
Via del Pioppeto 24 - 38121 Trento

Servizio clienti
Numero Verde 800 844052
servizioclienti@erickson.it

Formazione
Tel. 0461 951500
formazione@erickson.it

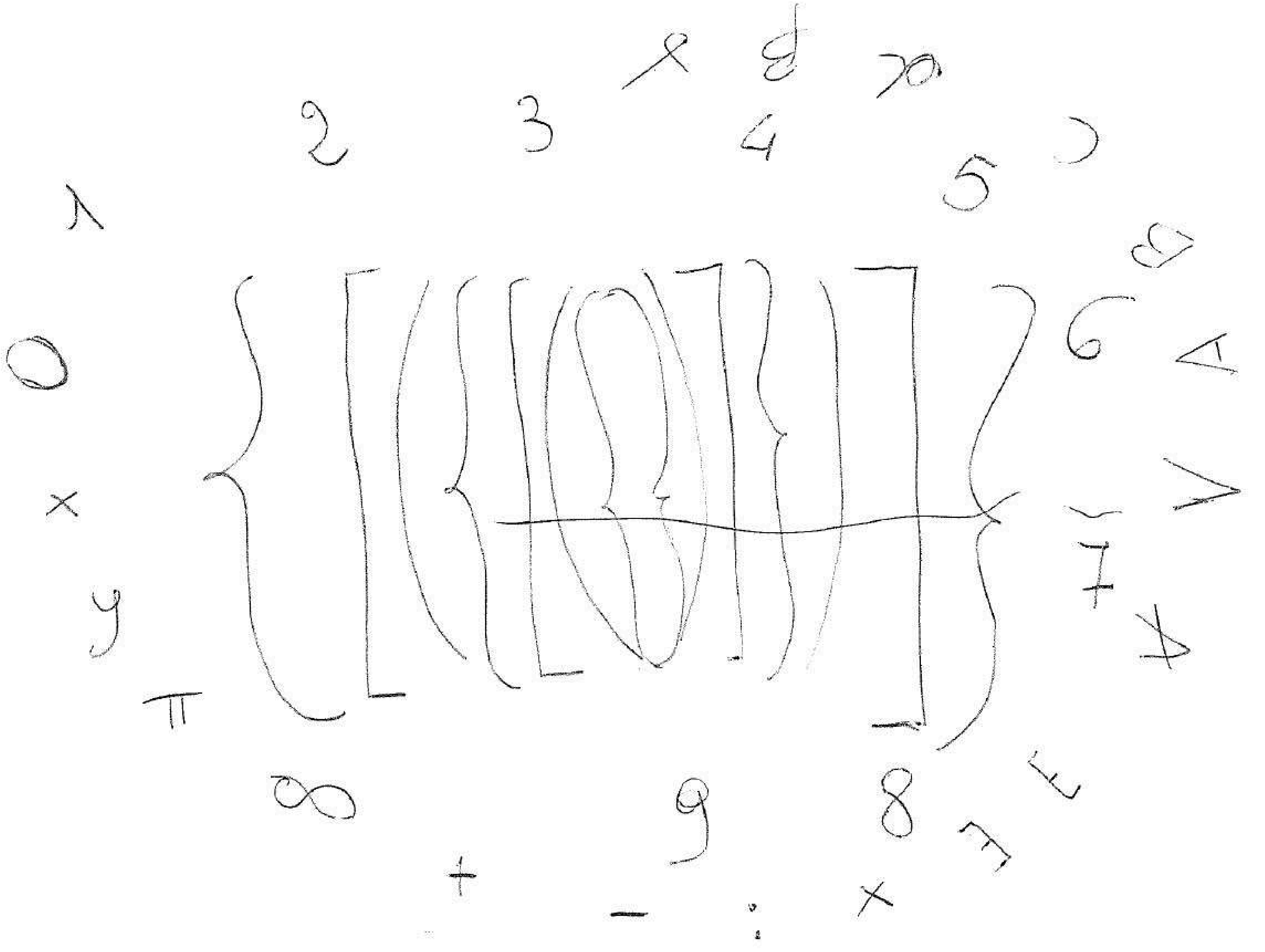


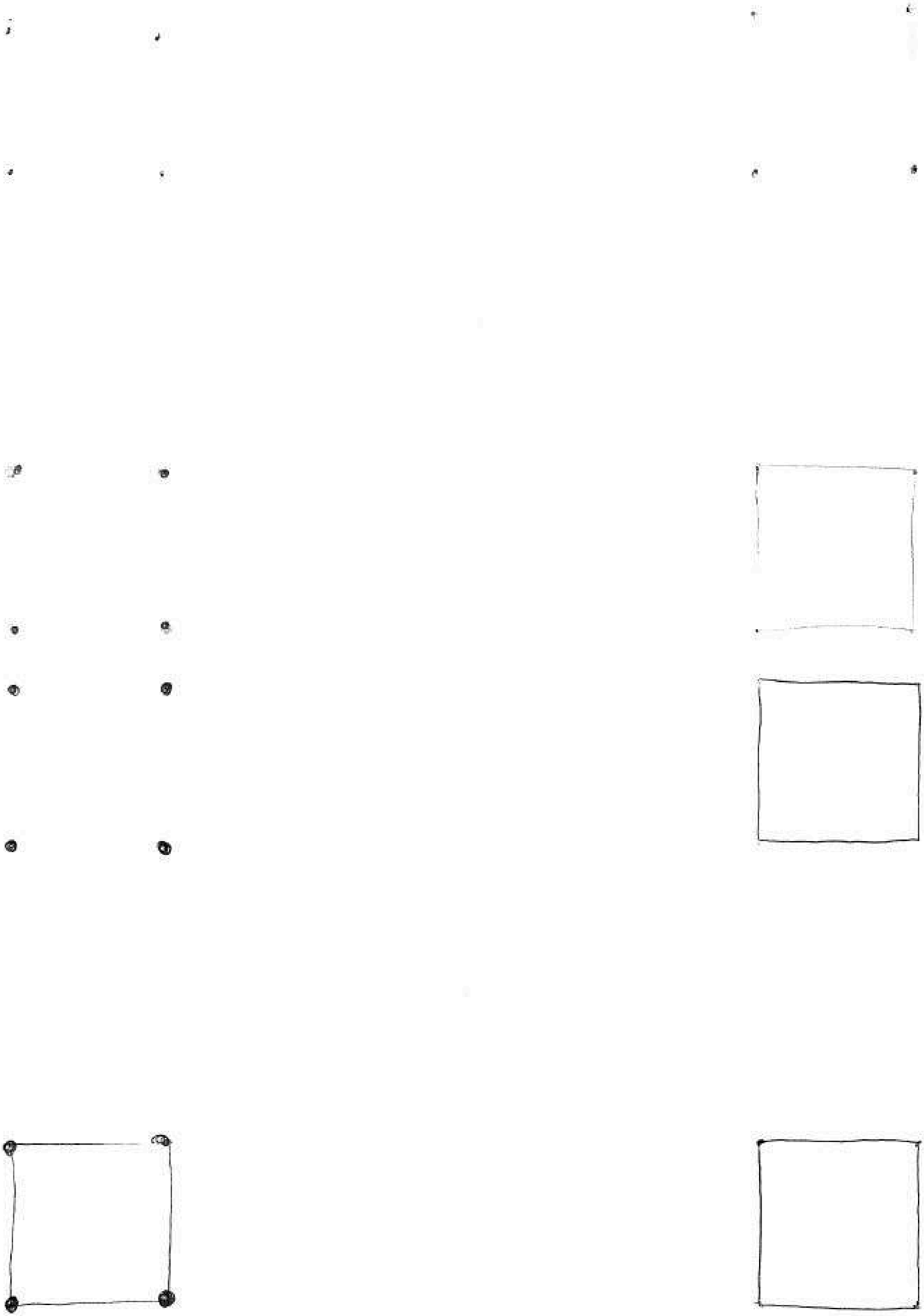
CREAZIONE MATEMATICA

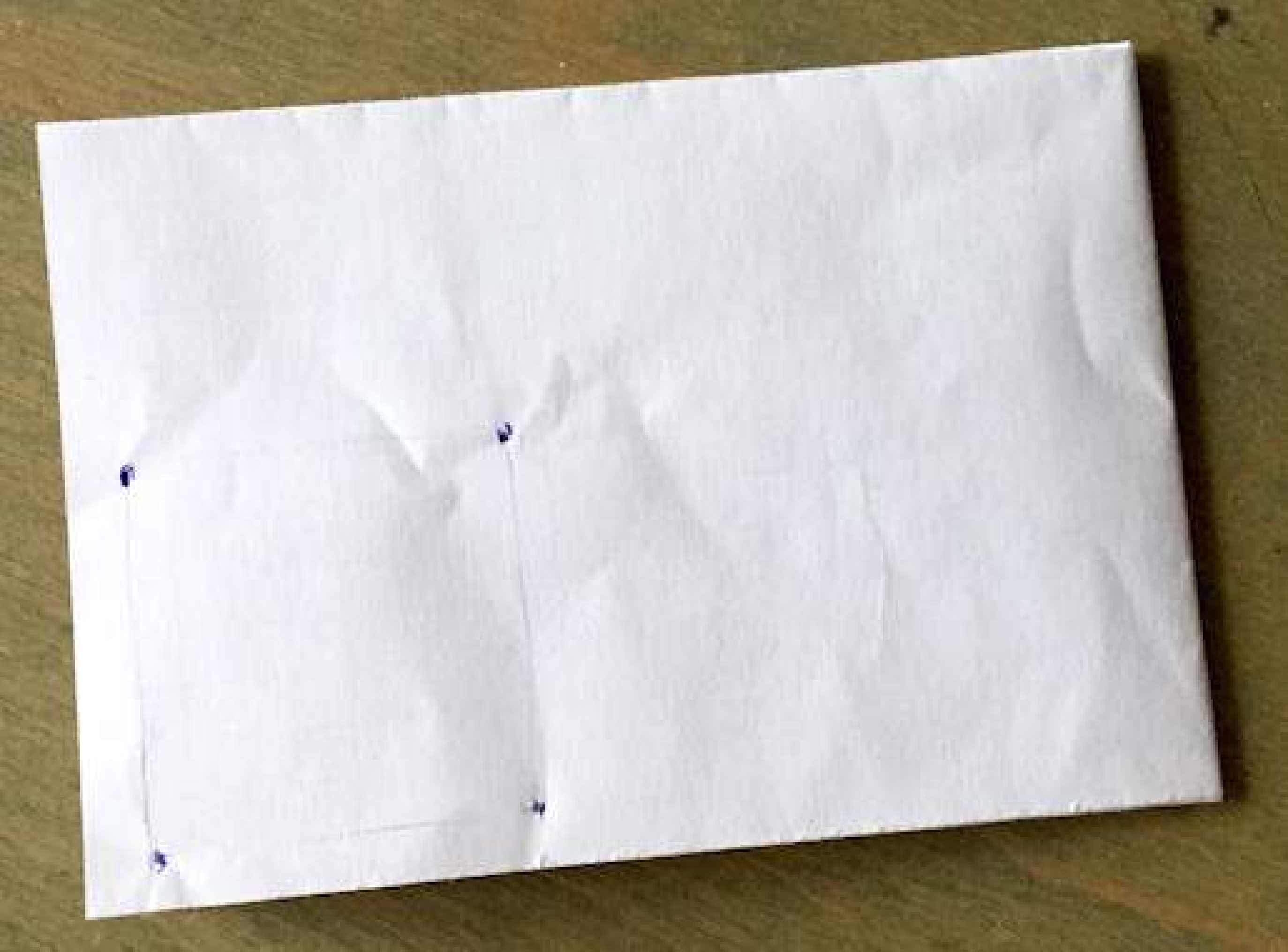
$$1 = 1$$

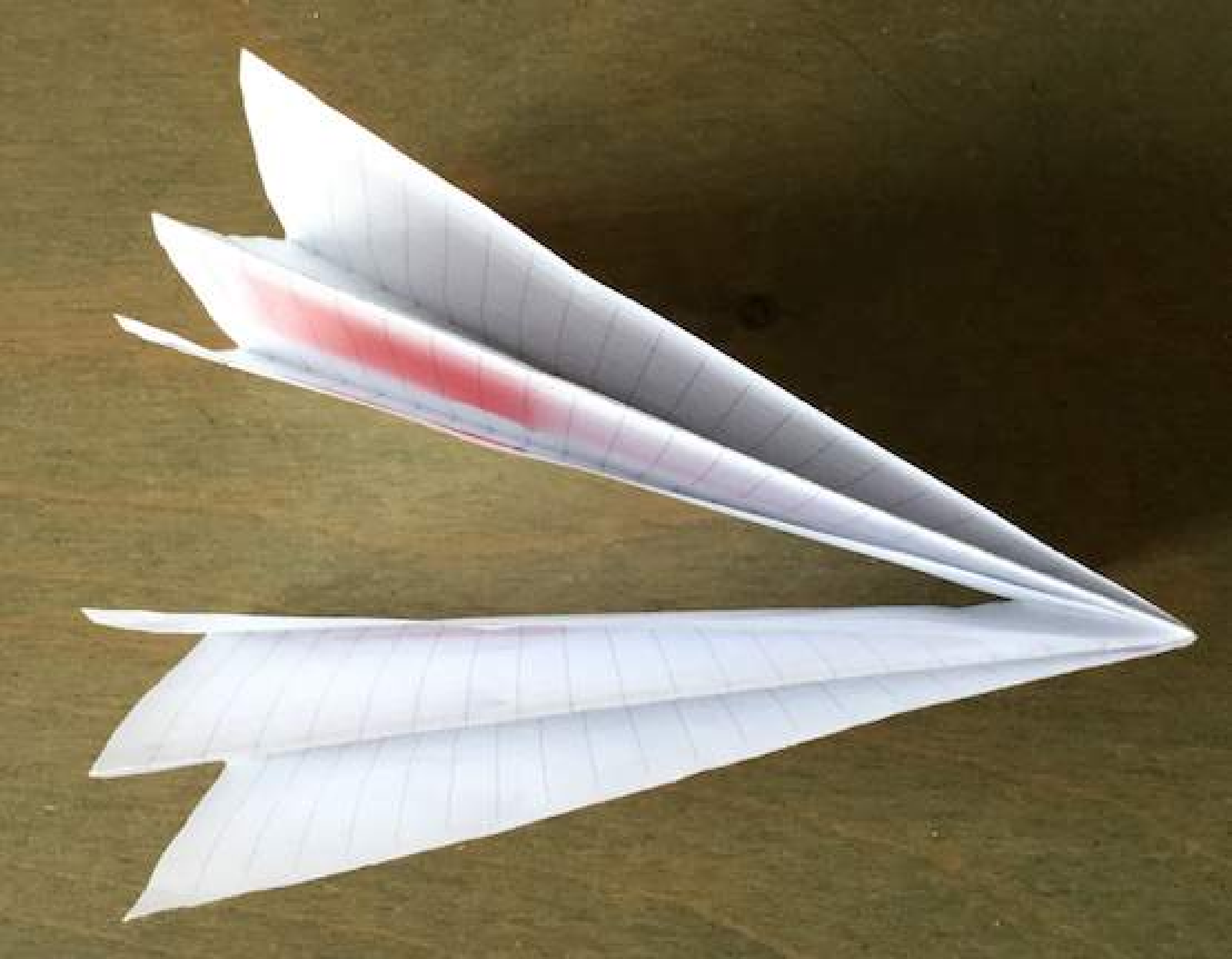
$$L = L$$

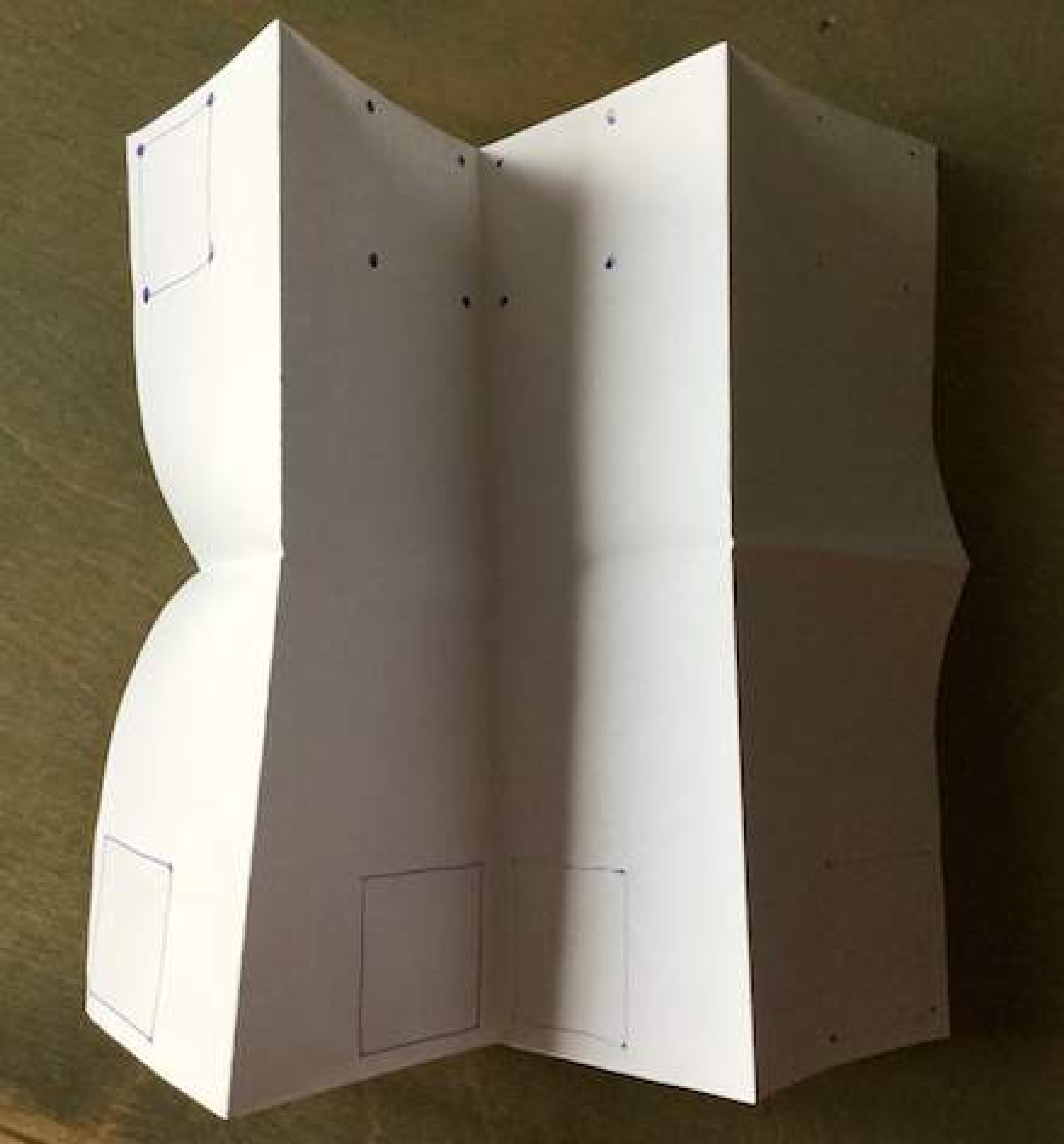
$$* = *$$











UTET UNIVERSITÀ

EMMA CASTELNUOVO

DA

(nella scuola 'superiore, ndr)

A mio parere, il valore della geometria intesa in questo senso, cioè il valore assiomatico di questa scienza, verrà messo tanto più in rilievo quanto più si farà sentire lo stacco dallo studio intuitivo, presentando i due corsi come altrettanto essenziali perché il secondo non avrebbe ragione di esistere se gli enti di cui si parla non avessero la loro origine e le loro radici approfondite in quelle esperienze concrete e in quelle costruzioni di carattere tangibile che formavano lo studio precedente. Non si deve far sì che lo studio della geometria razionale porti a sottovalutare l'importanza del corso di geometria intuitiva, perché, come scriveva alcuni anni or sono il matematico francese Jean-Louis Destouches, a proposito della costruzione della scienza, «cominciare un'opera scientifica dalla parte assiomatica è come scrivere un'opera di cui manca il primo volume»[1].

3.5 Metodo descrittivo e metodo costruttivo nell'insegnamento della geometria

Il corso di geometria intuitiva ci pone davanti a una problematica. Abbiamo detto che questo corso deve avere per scopo di «dare radici naturali agli assiomi», di sviluppare cioè, a partire dal concreto, concetti, e proprietà geometriche[2].

Ci si chiede subito quale senso si possa dare a questo appoggiarsi al concreto, a questo «ricorso all'oggetto e all'azione» che servirà, in un secondo tempo, come trampolino per l'astrazione. Ora, è proprio la frase «ricorso all'oggetto e all'azione» che ci indica, sempre partendo dal concreto, due strade distinte: ricorrere all'oggetto significa osservare l'oggetto in quanto tale, con atteggiamento passivo, significa, in breve, *intuire l'oggetto nel senso etimologico della parola*; ricorrere all'azione, invece, significa osservare un fenomeno che riguarda l'oggetto, operare, esperimentare sull'oggetto, significa insomma *intuire nel senso pestalozziano della parola*.

Per chiarire queste interpretazioni diverse mi permetto di portare un esempio riferendomi a un concreto molto particolare: immaginiamo di voler parlare del *quadrato* a dei bambini di 11 anni. Per introdurre questa figura, del resto già nota a tutti i bambini di quell'età, e arrivare a una definizione a partire dal concreto, si potrà far ritagliare dei quadrati di carta, far osservare lati e diagonali, far citare dagli allievi stessi degli oggetti che hanno forma di quadrati, far guardare le facce di un cubo...; si potrà anche far disegnare un quadrato con riga e compasso. Si potrà, poi, far confrontare il quadrato con altri quadrilateri insistendo sui caratteri distinti e su quelli che sono comuni a tali figure.

Da tutte queste osservazioni l'allievo dovrebbe essere condotto a dare da solo una definizione; ma una definizione a partire da queste esperienze esigerebbe una facoltà d'astrazione capace di cogliere la proprietà caratteristica dal confronto di un numero finito di figure.

Ora, un tale processo verso l'astrazione a partire da un certo numero di osservazioni, un bambino di 11 anni non è in generale capace di farlo da solo.

Vorrei invece far vedere, sempre a proposito della figura quadrato, come il passaggio dal concreto all'astratto sia reso più naturale non attraverso osservazioni sull'oggetto ma attraverso *operazioni* sull'oggetto.

Ecco come si potrebbe condurre lo studio del quadrato: si danno al bambino delle strisce uguali (tipo meccano) e delle viti per mezzo delle quali si possano collegare le strisce agli estremi (tavola II), e gli si dice di costruire il quadrato. Appena avrà fatto questa costruzione, si accorgerà da solo, e con grande meraviglia, che la figura che ha nelle mani può articolarsi, può trasformarsi in un rombo. Questa trasformazione è molto suggestiva: l'allievo si rende conto che il quadrato è un rombo particolare, che fa parte della famiglia dei rombi. Fra gli elementi che non cambiano (gli invarianti) e quelli che cambiano nel passaggio da una figura all'altra, si potrà portare la sua attenzione sulla costanza della somma degli angoli, sulla variazione dell'area, sulla variazione della somma delle diagonali. Il bambino avrà l'intuizione della costanza o della variabilità di una funzione attraverso la considerazione dei casi "limite", cioè dei casi in cui il rombo tende a un segmento, e il materiale tende a "smaterializzarsi". E l'osservazione di un numero infinito di figure, cioè la trasformazione di un tipo di figura in infiniti altri, condurrà a caratterizzare la figura nella classe di altre e quindi a definirla. La definizione del quadrato, ad esempio, apparirà dal carattere che lo distingue dalla classe dei rombi a cui appartiene.

[1] Citazione riportata nel libro di M. FRÉCHET, *Les mathématiques et le concret*, Paris, Presses Universitaires de France, 1955, p. 28.

[2] Alcuni degli argomenti qui sviluppati si trovano in un mio articolo pubblicato nella rivista *Archimede*, 1961, e citato al § precedente.

v. sito www.mce-fimem.it Biblioteca Emma Castelnuovo

82 Quello che mi preme di sottolineare è che, seguendo tale metodologia, il bambino arriva da sé alla definizione, senza che nessun concetto gli venga imposto dall'alto.

Credo che l'esempio ora dato valga a mostrare la differenza notevole che passa fra due metodologie che prendono, entrambe, origine dal concreto: per l'una il carattere del corso è *descrittivo*, per l'altra è *costruttivo*.

3.6 Necessità di un ricorso al concreto

Da quanto abbiamo detto prima credo che chiunque possa trarre, nei confronti del disegno come ispiratore di intuizioni geometriche, le seguenti conclusioni negative:

[1] M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, Paris, Presses Universitaires de France, 1955.

83 1) il disegno non suggerisce dei problemi perché offre un numero finito di casi, e vincola così la libertà di pensiero del bambino;

2) non conduce all'osservazione, e quindi non può portare all'intuizione della verità, per il fatto che è statico;

3) non può inoltre, e ciò è evidente, fornire un'immagine reale di una situazione spaziale.

Queste tre ragioni varrebbero da sole a far comprendere l'insufficienza del disegno per un corso di geometria intuitiva a carattere costruttivo[1].

Ma vi è un'altra ragione per cui il disegno è insufficiente: se io traccio una figura alla lavagna o se il bambino fa egli stesso il disegno, la sua attenzione si ferma sul tratto disegnato, cioè sul contorno della figura, non sull'interno.

[1] Alcune delle idee trattate in questo paragrafo sono sviluppate nei miei articoli «L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva» pubblicato nel volume *Il materiale per l'insegnamento della matematica*, Firenze, La Nuova Italia Editrice, 1965, e in «Basi concrete nell'insegnamento della geometria intuitiva» nel volumetto *Orientamenti sulla didattica della matematica*, a cura dei Centri Didattici, 1958.

84 Per tutte queste ragioni il disegno è insufficiente ed è dunque necessario ricorrere a delle basi concrete. Ma, cosa intendere per base concreta? Non vogliamo certo dare un elenco di modelli o materiali o dispositivi atti a chiarire questa o quella nozione perché verrebbero in tal modo vincolate le attività del maestro e dell'allievo; e l'esempio o l'idea concreta possono venire in un determinato ambiente piuttosto che in un altro, possono sorgere per un'occasione fortuita, possono adattarsi a questa e non a quella classe.

Desideriamo invece precisare quale significato venga ad avere la "base concreta" nella metodologia che seguiamo.

"Il concreto" dovrà avere il duplice scopo di esercitare le facoltà *sintetiche* e quelle *analitiche* del bambino, le facoltà cioè che permettono di arrivare al complesso attraverso "l'elemento", ossia di costruire, e le facoltà che portano a discernere in un oggetto, in un "globale", gli elementi che lo formano, che portano dunque ad analizzare l'oggetto.

Ora, per quanto riguarda la facoltà di analizzare, ricordiamo quello che abbiamo già avuto occasione di dire e cioè che l'attenzione del bambino non si ferma con spirito indagatore su un modello, qualunque esso sia, se questo è statico, se si tratta cioè di un "modello da vetrina". Perché un modello attiri l'attenzione, scientificamente, occorre che esso sia mobile: e, allora, non è il materiale in sé che è l'oggetto dell'attenzione, ma piuttosto la trasformazione del materiale, un'operazione dunque che, in quanto tale, è astratta.

Per quanto riguarda la facoltà di sintetizzare, il materiale avrà lo scopo di far manipolare e costruire, ma non si tratta solo di una costruzione manuale, perché il ragazzo verrà a scoprire, attraverso una serie continua di tentativi (ciò che non è possibile col disegno), quali sono le condizioni indipendenti che legano gli elementi di una figura, ed otterrà così, oltre all'"oggetto geometrico", una teoria sulle possibilità di costruzione.

In entrambi i casi, dunque, il carattere del materiale è *operativo*.

Riflettiamo che a stabilire questo carattere del materiale siamo stati condotti da considerazioni psicologiche: il bambino è attirato da ciò che si muove. Ma – e questo è veramente interessante –, un tipo di materiale "operativo" rispecchia anche la struttura della matematica, e in particolare della matematica moderna, dove non vengono studiati gli enti in sé quanto piuttosto le operazioni che legano quegli enti. La matematica che

85 viene, a poco a poco, scoperta dal bambino è dunque una *matematica moderna*.

111 3.8 Il concetto di superficie-area

Uno dei concetti che riescono più difficili al bambino è quello di superficie-area[1]. Benché si tratti di una nozione correntemente usata nella vita di ogni giorno, essa risulta spesso poco chiara anche a persone adulte. Ho trovato in Galileo[2] un passo che si riferisce a questa nozione e che è psicologicamente interessante; dice Galileo: «Veramente non credo che fra quelli che mancano di qualche cognizione di geometria se ne trovassero 4 per 100 che non restassero a prima giunta ingannati che quei corpi che da superficie uguali sono contenuti non fossero ancora in tutto uguali; sì come nell'istesso errore incorrono parlando delle superficie... ignorando che può essere un recinto uguale a un altro e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello».

Questa tendenza naturale a confondere il volume con la superficie di un solido e l'area col perimetro di una figura piana, si ritrova, appunto, in e discussioni avute in classi di 1ª media, all'inizio dell'anno, e riporterò qualche brano scritto dai bambini su questo argomento[1].

Si pone la domanda: «Di un quadrato conosco l'area; come posso determinare la lunghezza del lato?». Tutti i bambini rispondono: «Bisogna dividere l'area per 4», risposta che rivela una confusione fra area e perimetro.

Si chiede allora come si trova l'area del quadrato; tutti rispondono esattamente e molti aggiungono che il quadrato è un rettangolo particolare e che l'area del rettangolo si trova moltiplicando la lunghezza della base per l'altezza. Se poi si domanda perché l'area del rettangolo si trovi con quella regola, gli allievi rimarranno sorpresi dalla domanda; vi diranno: «Si sa che l'area del rettangolo si trova in quel certo modo». Invitati a riflettere, vi sarà certamente qualcuno che dirà: «Sì, l'area del rettangolo si trova moltiplicando la base per l'altezza perché si può immaginare che la base si muova parallelamente a se stessa per tutta la lunghezza dell'altezza *spazzando* così la superficie».

Devo dire che le prime volte questa spiegazione mi pareva strana e mi sembrava che dovesse venire molto più spontanea a un bambino la spiegazione che diamo di solito, dividendo il rettangolo in tanti quadratini unitari uguali. Poi mi sono persuasa che quest'ultima spiegazione è più difficile perché presuppone una convenzione, quella dell'unità di misura, e una convenzione è sempre qualcosa di artificiale.

È certo che fa impressione ritrovare nei bambini le idee di Bonaventura Cavalieri: anzi, non si tratta proprio degli "indivisibili" di Cavalieri, ma piuttosto della concezione di Newton che nel *Tractatus de quadratura curvarum* così si esprime[2]: «Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere ma come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte non mediante addizione di parti, ma per moto continuo di punti; le superficie per moto di linee; i solidi per moto di superficie... Queste generazioni hanno veramente luogo in natura e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi. Così gli antichi indicarono la generazione del rettangolo come descritto da un segmento mobile perpendicolare a un segmento fisso».

[1] Ho parlato di queste esperienze nel mio articolo, già citato, pubblicato in *Orientamenti sulla didattica della matematica*.

[2] I. NEWTON, *Tractatus de quadratura curvarum*, 1704. La traduzione italiana che abbiamo riportato qui è di E. Carruccio e si trova nel volumetto di G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano, Feltrinelli, 1962.

Il bambino "sente" la nozione di area in senso dinamico; sente l'area nel suo "divenire", per usare un'espressione di Jacques Hadamard[1]; egli vuole costruirsela questa area, non vuole averla come somma di quantità note a priori.

Se si vuole rendere ancor più viva quest'idea, si può suggerire ai bambini di pensare ai solchi fatti dall'aratro in un campo rettangolare. E questa esperienza, che consiste nella rappresentazione visiva di un lavoro manuale a cui si è assistito o di cui si è sentito parlare, presenta anche il vantaggio di condurre gli allievi in modo del tutto naturale e dar vita all'altra nozione di area: la nozione statica. Si dirà ai bambini: «Immaginate ora che il campo rettangolare sia una prateria; da questo campo possiamo ricavare una certa quantità di fieno». Ma voi non avete bisogno di terminare la frase perché ci sarà qualche allievo pronto a dirvi: «Per vedere se un campo ha una superficie più grande o più piccola di un altro si contano i mucchi di fieno». Ecco il concetto statico di area: il numero dei mucchi di fieno dà l'area del rettangolo; il mucchio è l'unità di misura, perché il mucchio è quanto rende un quadrato di prateria che si può scegliere come unità. In tal modo la convenzione dell'unità di superficie non viene imposta ma nasce spontaneamente.

Per chiarire la nozione statica di area trovo molto utile un materiale semplicissimo ideato dal matematico inglese C. Gattegno: il geopiano.

Si tratta di una tavoletta quadrata (di qualunque misura) dove a distanze fisse (per esempio di 5 cm) sono piantati dei chiodi a mo' di scacchiera (tavola x); si può formare un reticolo quadrato di 25 chiodi. Fra chiodo e chiodo si possono tendere degli elastici in modo da costruire dei poligoni. Le figure si fanno e si sfanno con estrema semplicità, si completano dando luogo a dei poligoni più complessi, a dei poligoni concavi e stellati, a tutte quelle figure, insomma, che non si ha l'abitudine di considerare nei nostri corsi ma che sono molto più generali di quelle che ordinariamente si disegnano.

Col geopiano il bambino si esercita nella costruzione di un poligono soddisfacente a determinate condizioni, al confronto di poligoni come somma o differenza, alla valutazione quasi "ad occhio" dell'area di una su-

[1] J. HADAMARD, *Newton and the Infinitesimal Calculus*, London, The Royal Society, 1946.

perficie poligonale. Ma il geopiano non permette di passare con continuità da una figura all'altra.

Ad un concetto più dinamico dell'area si arriva mettendo a raffronto area e perimetro, quei concetti, cioè, che facilmente si confondono fra loro; si tratta di metterli a raffronto in modo da far variare l'uno mantenendo fisso l'altro.

Fra le tante esperienze che si possono ideare ne riferisco due che mi sembrano particolarmente espressive, anche per l'estrema semplicità del materiale utilizzato.

1) Si riprenda il quadrato di strisce, costruito nel punto 3 del § 3.7.1), e si domandi agli allievi se l'area muti o no nel passaggio da quadrato a rombo. La risposta sarà da parte di tutti negativa; diranno: «L'area non cambia, c'è solo uno spostamento dell'area», «l'area non cambia perché il recinto è sempre lo stesso». Ma se diminuite a poco a poco un angolo del rombo, tendendo dunque al caso limite, tutti vi diranno che in quest'ultimo caso l'area non c'è più; e allora? che cosa avviene dell'area durante l'articolazione del rombo? È proprio in seguito all'osservazione del caso limite, del caso cioè in cui il materiale "si smaterializza", che i bambini arrivano a rendersi conto della variazione dell'area; è solamente in un secondo tempo che la considerazione della formula dell'area chiarirà e renderà razionale l'intuizione suggerita dal caso limite.

La regolarità e la simmetria con cui dall'area "zero", che si ha nel caso limite, si passa, per l'area del rombo, a valori crescenti per poi ridiscendere al valore zero, porta ad intuire il teorema di Rolle, cioè che fra due zeri di una funzione continua vi è un massimo o un minimo. In questo caso vi è, evidentemente, un massimo: l'area del quadrato è maggiore dell'area di ogni altro rombo. Accade molto spesso che questo teorema fondamentale dell'analisi si presenti sotto forma intuitiva in considerazioni di geometria elementare.

2) Un'altra esperienza molto semplice ma ricca di conseguenze si può realizzare così: si tenda uno spago legato fra l'indice e il pollice di ciascuna mano, a mo' di rettangolo avente per base la distanza fra le due mani e per l'altezza la distanza fra le dita della stessa mano (tavola XI). Si avvicinino poi le dita e, quindi, conseguentemente, si allontanino le mani. Il rettangolo cambia di forma: l'altezza è diminuita e la base è aumentata. Alla domanda se l'area cambia durante questo movimento, tutti i bambini risponderanno

che «l'area è sempre la stessa perché il contorno è sempre lo stesso». Qualcuno aggiungerà: «L'area è sempre la stessa perché quello che si è perso in altezza si è guadagnato in base». Continuate allora ad avvicinare o ad allontanare le dita: si ha una famiglia di rettangoli. Qualcuno vi dirà: «Se si continua ad avvicinare le dita il rettangolo diventa sempre più basso e a un certo momento sparisce; in quell'istante l'area non esiste più, l'area è zero». Molti sono d'accordo sul fatto che le aree di quei rettangoli rimangono sempre uguali fino all'ultimo caso in cui si ha "il crollo finale", secondo la loro espressione. Ma la teoria del "crollo finale" non persuade tutti; qualcuno dice che se alla fine l'area è zero, ciò significa che l'area deve decrescere a poco a poco; nasce in lui l'idea di una funzione continua. Altri, dalla mente più positiva, disegnano nel quaderno a quadretti due rettangoli con ugual perimetro; altri, poi, assegnano al perimetro un certo valore in centimetri e calcolano l'area nei vari casi. Alla fine la teoria "crollo finale" è abbandonata da tutti, ma certamente a malincuore; il fatto che l'area cambi di volta in volta è per i bambini una cosa strana. Ecco come si esprime una bambina nella sua relazione su «un'esperienza con uno spago»: «Io ho preso uno spago lungo 54 cm e ho formato con questo tanti rettangoli; ho calcolato l'area di tutti questi rettangoli e mi sono accorta che ogni volta viene un valore diverso. Ho trovato anche che se con lo spago formo un quadrato l'area risulta più grande di quella di ogni rettangolo. A poco a poco posso ridurre il rettangolo alla sola base (lo spago doppio); in questo caso l'area diventa zero. Ma allora mi chiedo: l'area di tutti quei rettangoli che ho visto un momento fa dove se ne è andata? come ha fatto a sfuggire dal contorno? per me è un mistero!».

Si avverte in queste righe, come del resto in quelle scritte da quasi tutti i compagni, che quella semplice esperienza con uno spago ha dato luogo a un problema che esce dallo stretto campo matematico e sconfina in quello metafisico: l'area non è un oggetto, un qualche cosa di immutabile, un ente; l'area va considerata nel suo divenire, cioè come funzione e non come una cosa.

A mio parere la confusione che nasce fra area e perimetro è dovuta soprattutto al fatto che l'attenzione di un bambino davanti a una figura si porta su quello che è disegnato – il contorno – e non sull'interno. Si ritorna dunque a considerazioni già fatte: ecco ancora un esempio che mostra l'insufficienza del disegno. È vero che nelle esperienze ora condotte il materiale – il quadrato di strisce e lo spago – indica solo il contorno della figura, proprio come il disegno, ma è il cambiamento di superficie, la su[illegible]
trasformazione che attira lo sguardo e il [illegible]

CITAZIONI SULL'ERRORE

[…] evitare gli **errori** è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti è dalle nostre teorie più ardite, *incluse quelle che sono erronee*, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa grande è imparare da essi (Popper, 1972, tr. it. p. 242).

Quando si ricercano le condizioni psicologiche dei progressi della scienza, ci si convince ben presto *che è in termini di* ***ostacoli*** *che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica.* […] si conosce, infatti, *contro* una conoscenza anteriore, distruggendo conoscenze mal fatte, superando quello che nello spirito stesso fa da ostacolo alla spiritualizzazione (Bachelard, 1938, tr. it. p.11).

Insegnanti e studenti […] non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri compromessi delle **risposte corrette**. In virtù di tali compromessi insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette (Gardner, 1991, tr. it.p. 160).

La necessità di un punto di partenza per gestire l'intervento didattico non viene messa in discussione, ma quello che suggerisce R. Zan è di creare: "un ambiente collaborativo, in cui l'attività matematica è concentrata sui **processi anziché sui prodotti**, in cui il senso di abilità è associato alla **consapevolezza di pensare piuttosto che alla correttezza del risultato**, permettendo di vivere positivamente anche l'esperienza di errore." (Zan, p. 41)