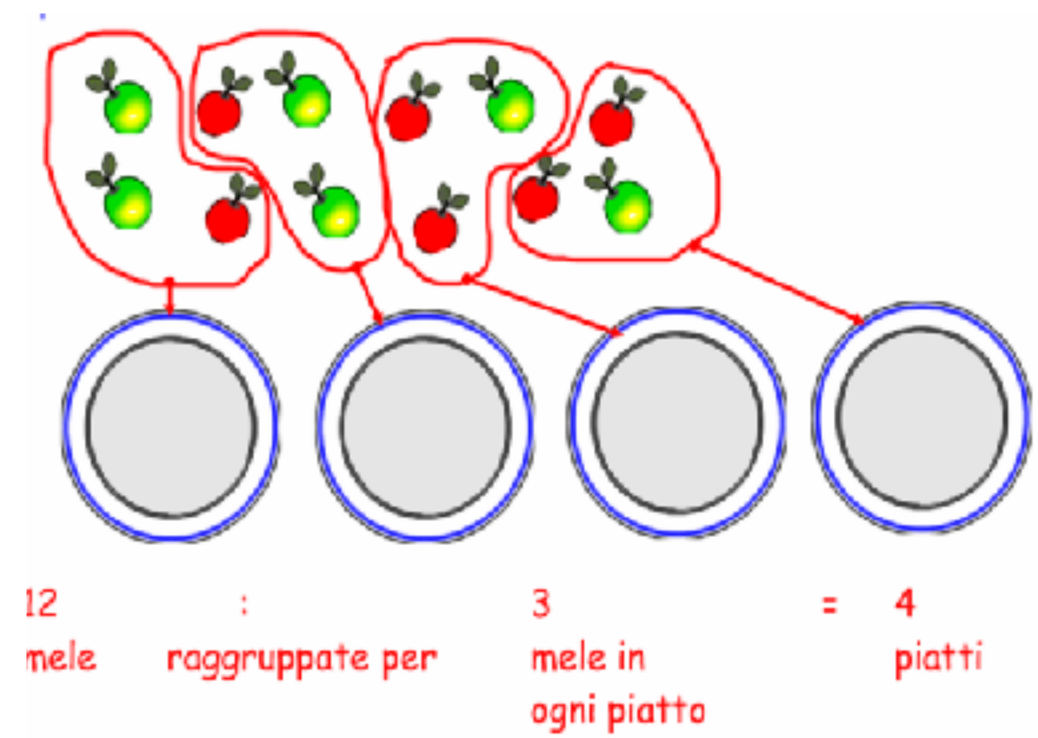
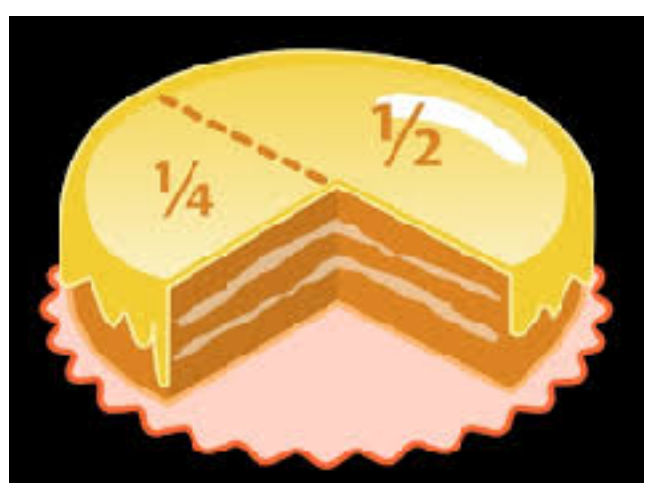
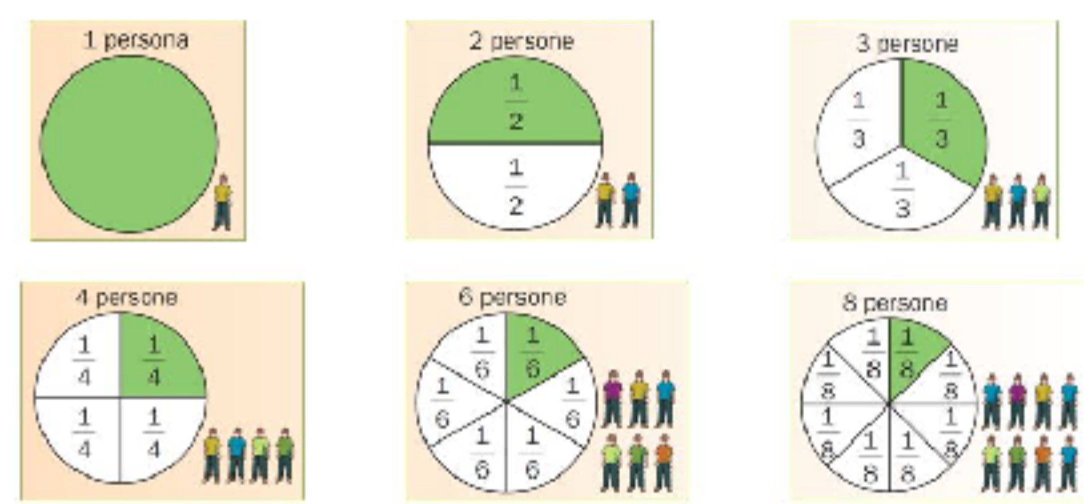
La divisione

Le difficoltà degli allievi e la didattica







Che cosa faremo oggi

- Vi porrò alcune **domande rispetto alla divisione** per rompere il ghiaccio e farvi entrare in situazione.
- Tratterò la divisione dal punto di vista teorico all'interno del discorso sulle strutture moltiplicative per motivare l'**ampliamento dei naturali ai razionali (positivi)**.
- Parleremo delle **frazioni** e di come si possano trattare nella scuola primaria per evitare tanti misconcetti lasciando anche qualche problema aperto.
- Vedremo **come si costruisce un numero razionale** a partire dalle frazioni e come i numeri razionali siano collegati con la **misura**.
- Faremo qualche accenno alla **proporzionalità** cioè all'uguaglianza di **rapporti**.
- Spiegherò che cosa significa "**densità**" della retta numerica.
- Nel corso della comunicazione presenterò anche in modo sintetico esempi di situazioni didattiche da proporre agli allievi.

Restiamo nelle strutture…

Abbiamo abbastanza sviscerato il discorso sulla moltiplicazione.
Dobbiamo ora cercare di capire come nasce la **divisione**.

Ripropongo quasi le stesse domande che ho fatto per la moltiplicazione:

- *Che cosa vuol dire “dividere” per i bambini?*
- *Quali situazioni avete proposto ai bambini per introdurre la divisione?*
- *Quali significati della divisione pensate di aver costruito?*
- *Quando e come avete introdotto la simbologia?*
- *Quali ostacoli sono emersi? Che errori fanno i bambini?*

Dalle operazioni al reale

- La moltiplicazione 3 x 4 = 12 ci porta immediatamente a considerare altri due tipi di problemi:

  3 x ? = 12

  ? x 4 = 12

- Quali situazioni reali potrebbero tradurre queste due frasi? Le situazioni di divisione.
- La divisione “matematica” richiede di **suddividere in parti uguali**, in questo caso in 3 o in 4.
- In realtà sono pochissime le possibilità di portare a termine questa operazione, se si parte da numeri qualsiasi…

In seconda

… x 4 = 36 **36 : 4 = …….**

Ho 36 caramelle da mettere in 4 sacchettini.
Quante caramelle per ogni sacchettino?

materiale concreto

LAURA - 36 diviso 4, ***devi dividere le 36 caramelle in 4 parti***, ***distribuire*** uno per uno

PAOLA - ***dare a 4 bambini 1 caramella finché hai dato tutte le caramelle***

qui c'è il significato

qui si ragiona solo più sui numeri

tentativi ed errori, conteggio

ANDREA - Bisogna ***trovare una tabellina che abbia il 36 dopo 4 volte*** (prima dice 8 perché sbaglia a contare, poi si corregge e dice 9)

KATIA - ***ha provato tutte le tabelline finché ha trovato quella giusta***: esempio quella del 3, come 3 6 9 12; si ferma **dopo 4 volte**

MATTIA - ***per tentativi***

con le dita, ragionato

ALESSANDRO - ***contare la tabellina del 4 finché arrivi a 36, sulle dita viene 9***

strumento matematico

ANDREA - ***usare la tavola pitagorica***, **parti dal 4** e cerchi il 36 nella colonna del 4

Strumento fondamentale

TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Nella tavola pitagorica abbiamo **la moltiplicazione decontestualizzata,** ne vediamo le proprietà (funzione dell'1 e dello 0, commutatività…) e cominciamo a percepire che cosa può succedere con l'operazione inversa, cioè con la **divisione**

In seconda

Consegna: **inventare una divisione guardando la tavola pitagorica**

20 : 4 richiama un problema quotidiano: 4 bambini devono distribuire i quaderni che però sono solo 19, i bambini dicono che bisogna contare con 20 perché 19 nella tavola pitagorica non c'è.

Sanno già che per fare 20 : 4 si conta la tabellina del 4 fino a 20 e si scopre il 5 oppure si guarda la tavola pitagorica e si vede che il 20 si trova nella riga della tabellina del 4 al quinto posto.

Ma la divisione da fare non è 20 : 4 è 19 : 4!

Nasce la discussione: ci sono **divisioni che si possono fare e divisioni che non si possono fare**. Ad esempio **20 : 3 non si può fare** perché il 20 non è nella tabellina del 3. **Invece 21 : 3 si può fare.** Andrea dice che **20:3** non funziona perché ne manca 1. Allora forse, invece di 7, **20:3 fa solo 6** perché è uno in meno…..

Io scrivo alla lavagna **18:3**, contiamo la tabellina del 3 e fa 6. Quindi pongo il problema: **allora è 18:3 o è 20:3 che fa 6?** Tutti concordano sul fatto che **è 18:3 che fa 6**.

Qual è il problema che deve emergere?

- Partiamo da un contesto noto: **dividersi delle figurine.**
- Se ci sono 12 figurine e 3 amici va tutto bene… ma se ne ho solo 11?
- Nel reale ne dò 3 ciascuno e 2 me le metto in tasca… in matematica non è così perché **non esiste nessun numero naturale che moltiplicato per 3 dia come risultato 11.**

11 : 3 = ?   perché   ? x 3 = 11

Il ? non si può trovare tra i numeri naturali
quindi non posso completare quell'uguaglianza se non amplio l'insieme dei numeri.

Multipli e non-multipli

- Finché proponiamo ai bambini situazioni in cui si ragiona solo con **multipli** e **divisori** tutto funziona bene. Ma se il dividendo non è multiplo del divisore, si pone Il problema del **resto.**

- Io so che **11 = (3x3)+2,** se scrivo **11 : 3** il risultato nei naturali sarà **3 con resto di 2** ma non posso dire che:

  11 : 3 = 3, il segno **=** qui ***non ha senso.***

- Per completare quell'uguaglianza dobbiamo uscire dal mondo del discreto, quello delle "collezioni" che si contano, ed entrare nel mondo della **continuità**, del **confronto** e della **misura**, dobbiamo abbandonare i numeri **naturali** ed entrare nel mondo dei **razionali**.

La frazione

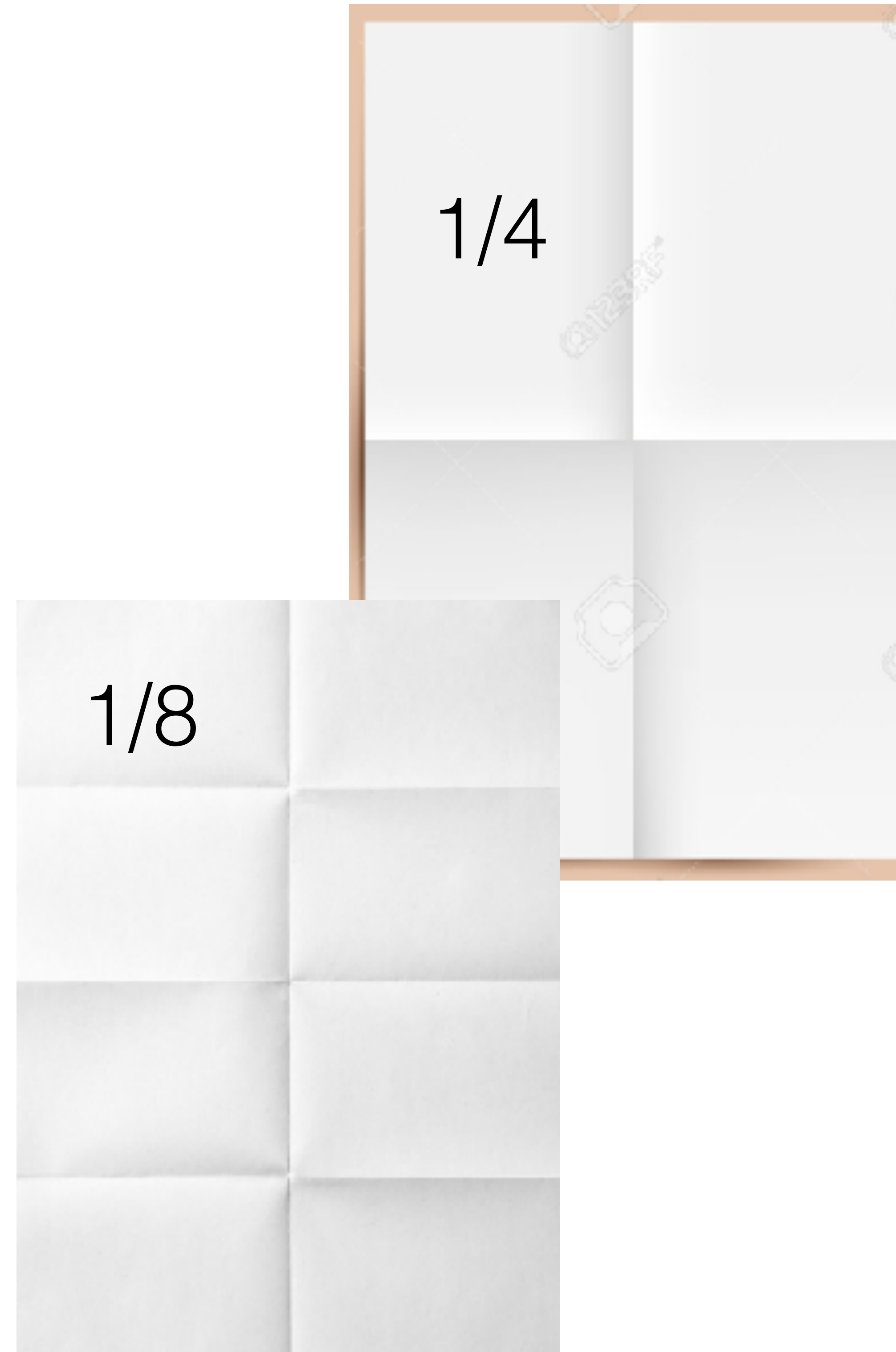
- *Quali situazioni avete proposto ai bambini per introdurre la frazione?*
- *Che significato di frazione pensate abbiano raggiunto fino a questo momento?*
- *Come avete collegato frazioni e numeri decimali?*
- *Quali ostacoli sono emersi?*

La frazione

- Il significato "intuitivo" di frazione è "parte di un tutto".
- La prima frazione che i bambini imparano ad usare è **"un mezzo di…"** che esprimono con le parole **"è la metà di…"**
- **Come far evolvere questa idea iniziale?**
- Ci sono *problemi di linguaggio* e problemi più complessi che riguardano la *concettualizzazione*.
- **La metà di…, un quarto di…** fanno parte dell'esperienza e quindi rientrano quasi sempre nel linguaggio comune e il significato è in genere noto, **un terzo di…** è già linguaggio matematico (vedi doppio, triplo….), il significato va costruito.

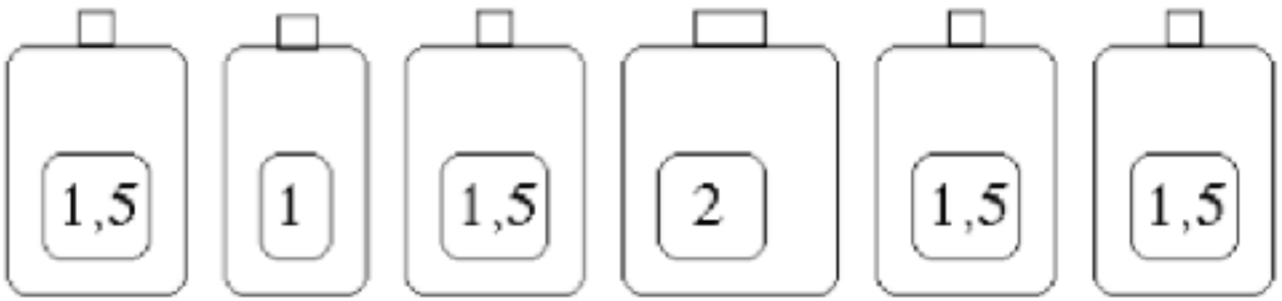
Le unità frazionarie

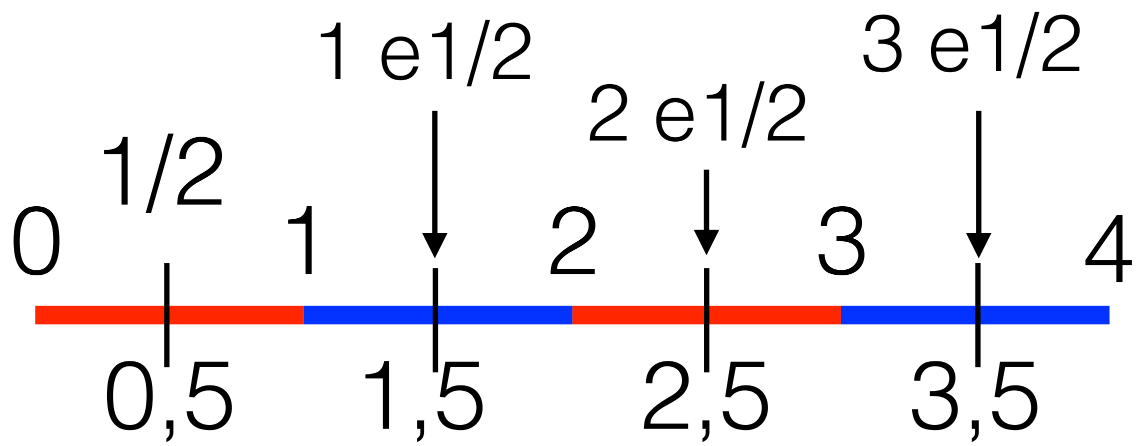
- I bambini incontrano le frazioni a scuola di solito in terza partendo da superfici da **dividere in parti uguali.**
- **Un** foglio di carta…. **una** torta….. c'è **una cosa sola** da dividere: come?
- Se è una torta si fanno gli spicchi 4, 8…, se è un foglio di carta si piega in 2, 4, 8 parti.
- Le prime frazioni che si ottengono tutte con azioni elementari portano a costruire le **unità frazionarie** e si impara a denominarle **per imitazione.**
- Il significato matematico però va costruito a partire da esperienze e conoscenze famigliari agli allievi.



In terza

- **Le bottiglie da un litro e mezzo**

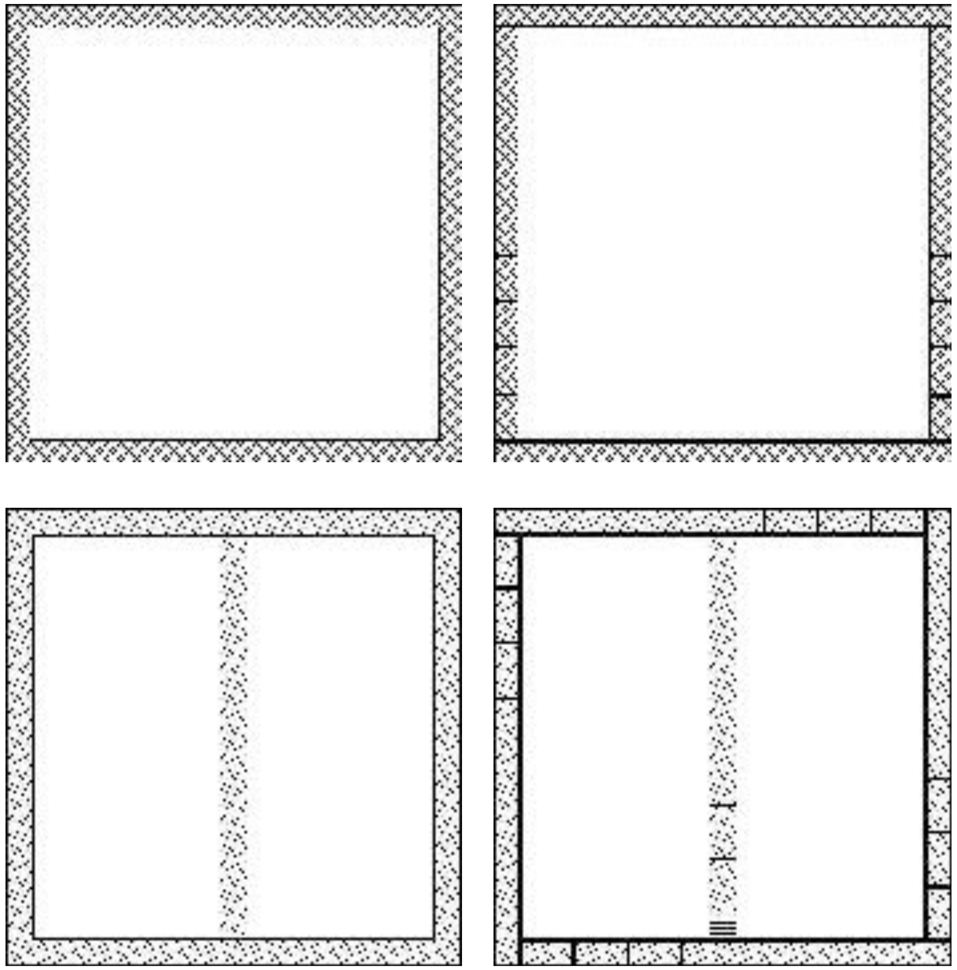




costruisco il significato di 1,5 e poi di 0,5 ecc. e metto questi valori sulla retta: 1/2 e 0,5 occupano lo stesso posto, come mai?

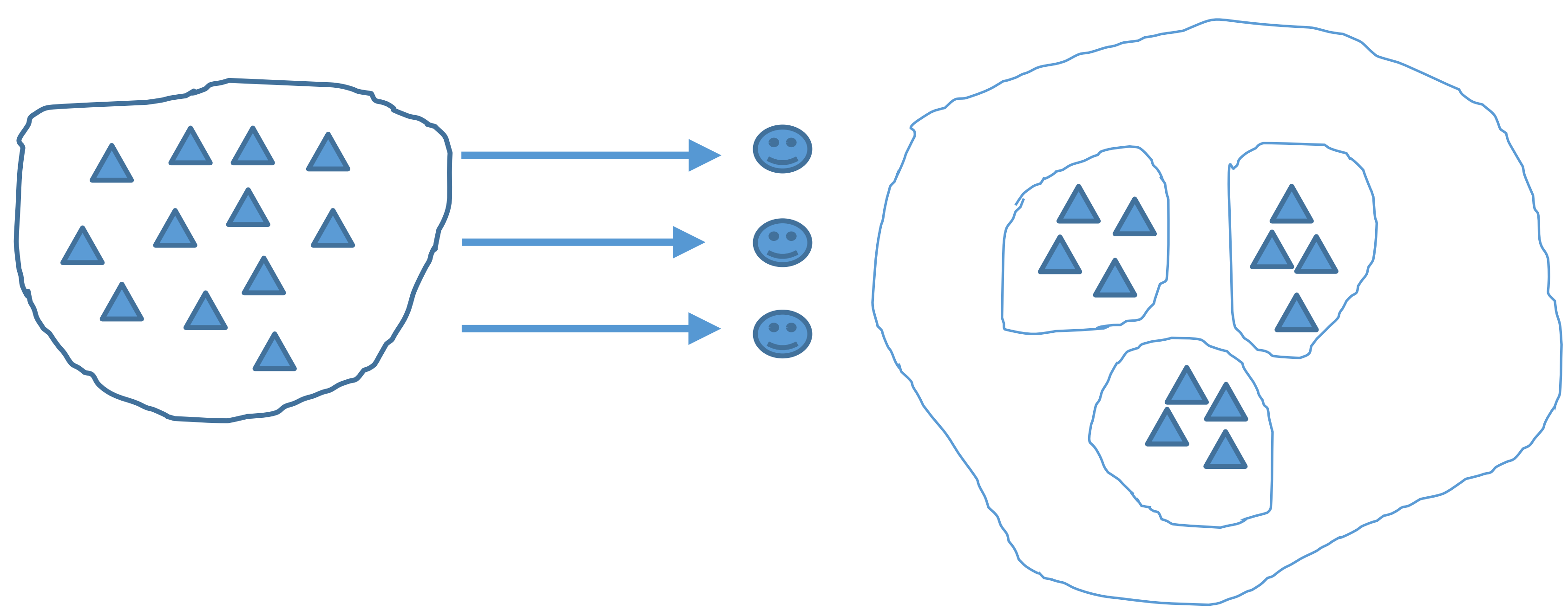
costruisco il significato di decimo e di centesimo cominciando a dividere a metà il decimo… la retta numerica con decimali frazioni; 1/10 = 0,1   1/100 = 0,01… le suddivisioni posso andare avanti… metafora della lente

- **I telai delle finestre**



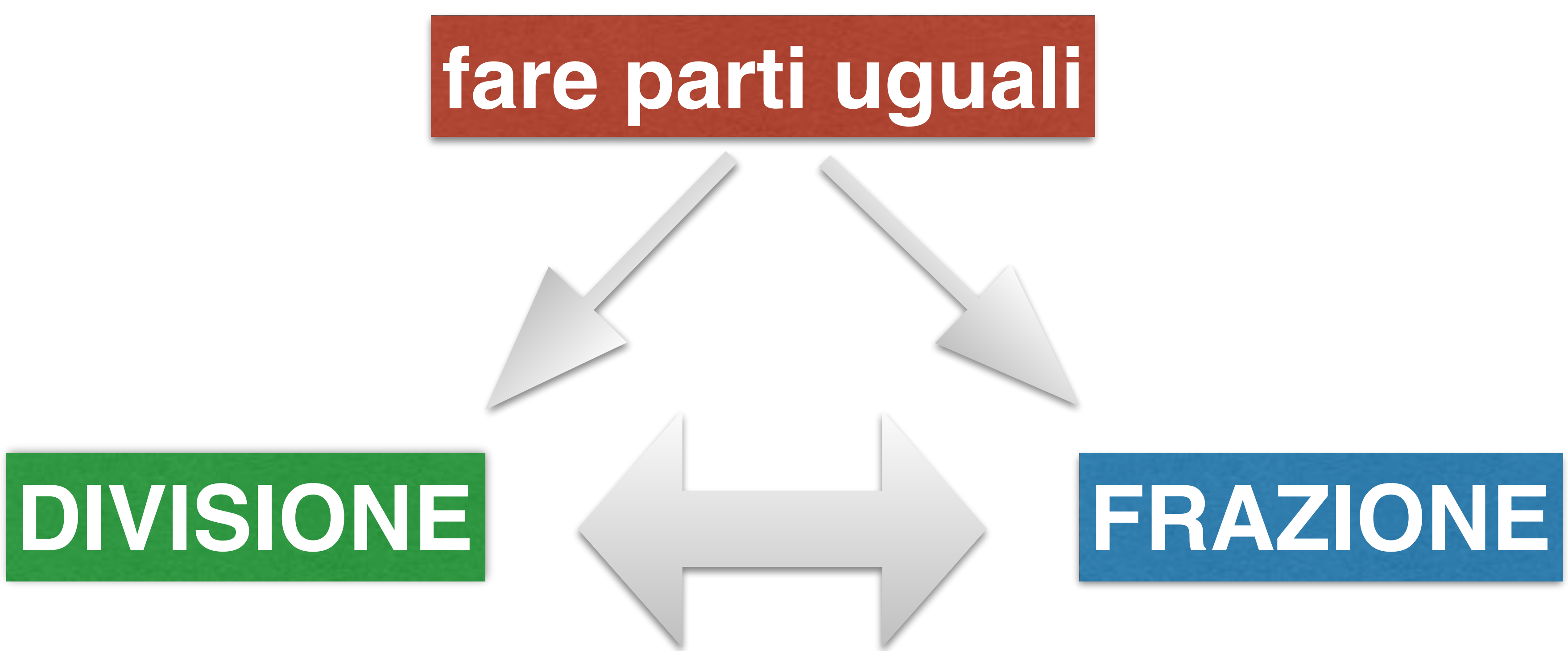
- Torniamo alla situazione: **12 figurine e 3 bambini**
- "Distribuendo, dividendo" ogni bambino avrà 4 figurine, ma, nello stesso tempo, quel risultato ci pone di fronte al fatto che l'"insieme" iniziale contiene <u>in sé</u> **tre insiemi ciascuno di 4** elementi.
- Ma questo è allora un **confronto** tra due insiemi, il secondo insieme confrontato con il primo, il **3** confrontato con il **12** considerato come **"tutto".**
- Possiamo leggere il confronto dicendo che ogni bambino riceve **⅓ delle figurine** e che **⅓ di 12 vale 4?**

Che cosa si può fare già prima della terza?



Un primo cambiamento

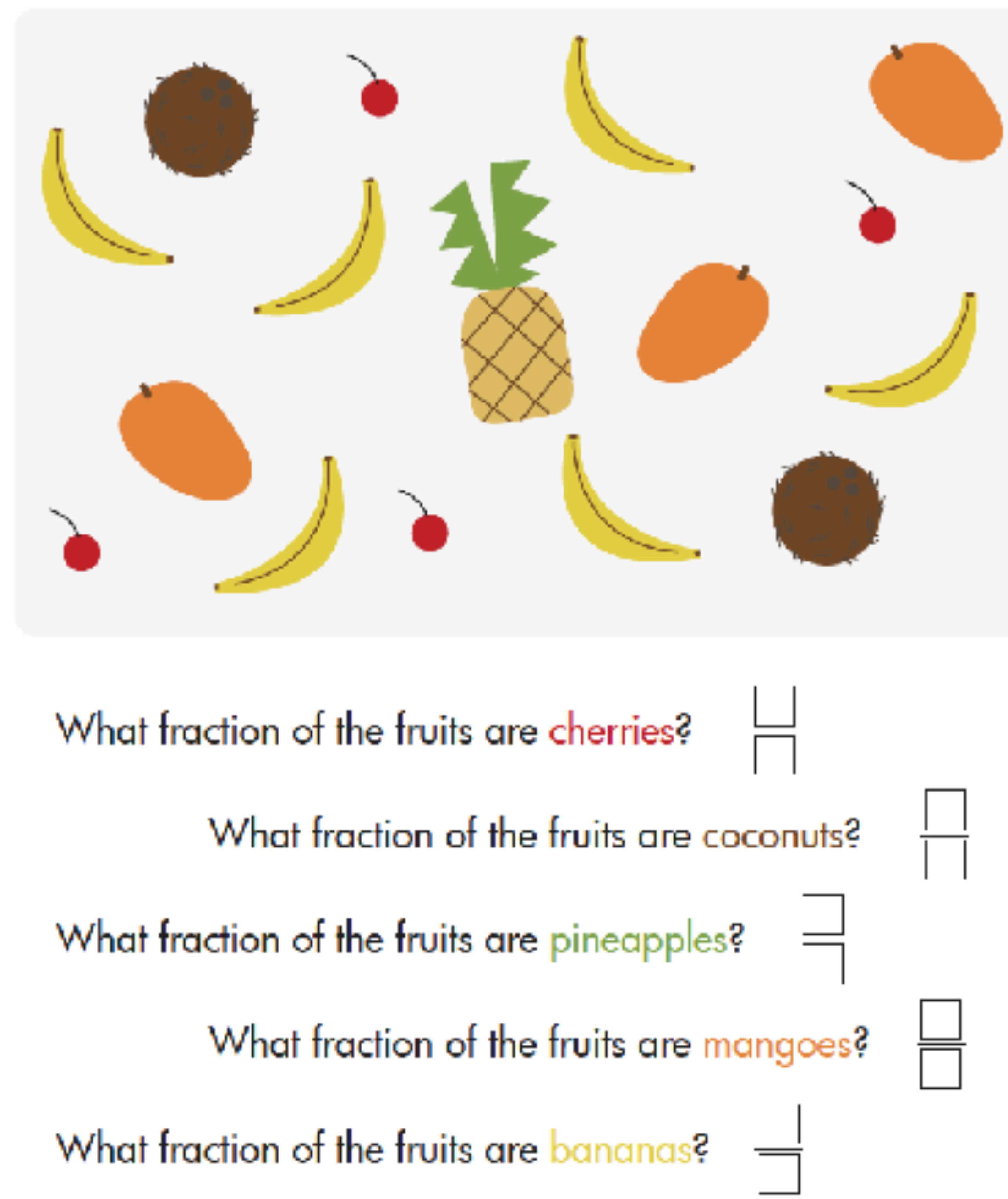
Esprimere un **confronto tra quantità** usando una **frazione** potrebbe essere un passo importante da affiancare alla conoscenza delle frazioni come parti di superfici (confronto tra una parte e l'unità di misura) e per ampliare il significato della divisione **connettendolo** a quello di frazione, mettendo così delle basi per la costruzione del numero razionale.



Quali problemi proporre?

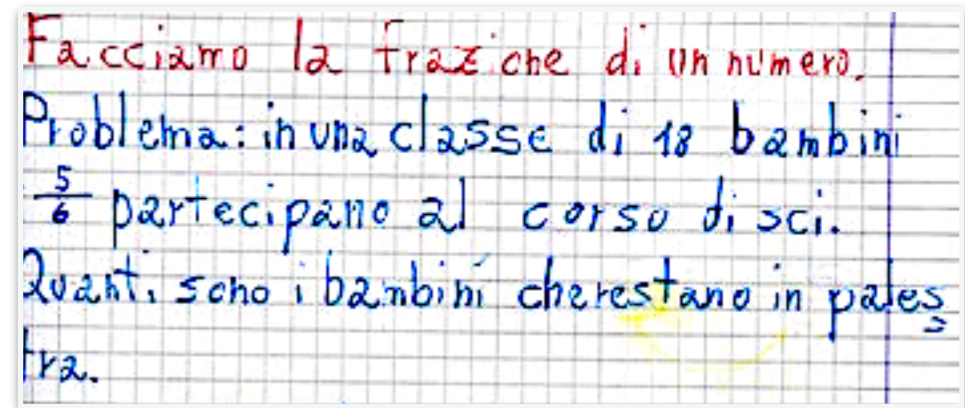
Situazioni che inducono a rappresentare un **confronto** tra quantità con una frazione...

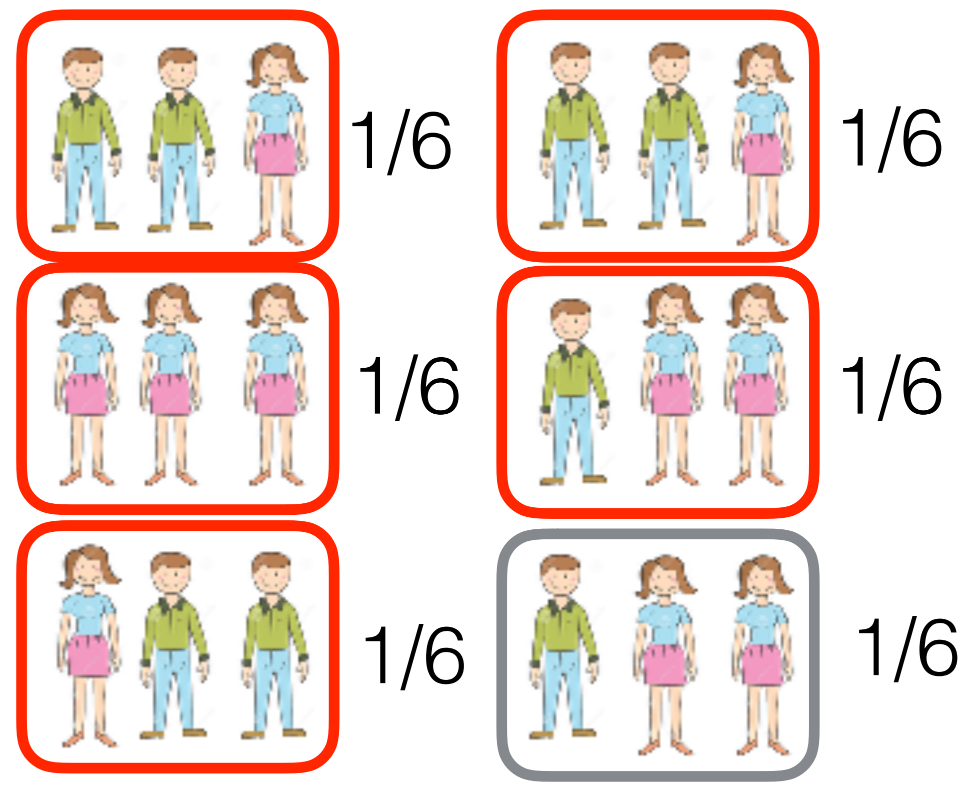
- *Anna ha 10 prugne, ne mangia 5. Che frazione ne ha mangiato? Perché?*
- *Patrizia ha 8 figurine, ne perde 3. Che frazione delle figurine ha perso? Perché?*

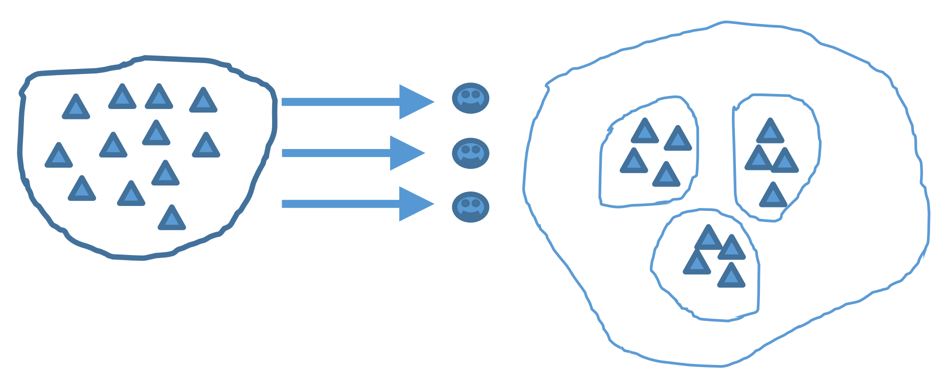


Le frazioni come operatori

- Il problema didattico è che questo tipo di problemi non ha riscontri nella pratica quotidiana dei bambini della scuola primaria, è **molto scolastico**.
- Risulta quindi difficile trovare **situazioni autentiche** in cui questa procedura possa essere applicata con significatività.
- La **situazione delle figurine e quelle della slide precedente lette con le frazioni** possono aiutare a costruire le basi per questo significato della frazione.


Facciamo la frazione di un numero.
Problema: in una classe di 18 bambini
$\frac{5}{6}$ partecipano al corso di sci.
Quanti sono i bambini che restano in palestra.





Le frazioni come operatori

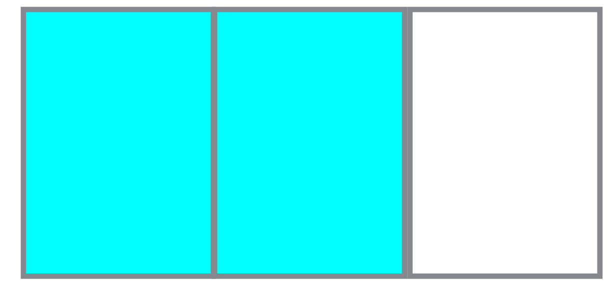
- Fare parti uguali con la divisione non pone problemi ed è facile vedere che è equivalente a operare con le unità frazionarie: fare **:3 *è come*** fare **1/3 di…**

- Le cose cambiano se si chiede di fare i **2/3 di…**

- Bisogna tradurre le operazioni concrete in simboli matematici avendo la consapevolezza che **“fare parti uguali di un’unità” equivale a “dividere”** e **“prendere più volte parti uguali” equivale a “moltiplicare”**.

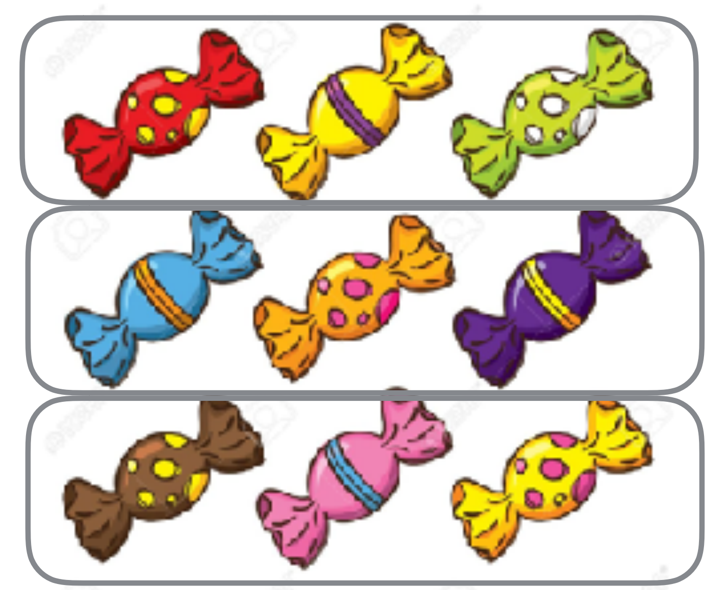
- Dal punto di vista matematico l’ordine delle due operazioni non è importante perché si arriva comunque allo stesso risultato, nel concreto invece **non è la stessa cosa** e c’è differenza tra operare con numeri o con grandezze.

2/3 di un foglio di carta



faccio 3 parti uguali e
ne prendo 2

2/3 di 9 caramelle



9:3 = 3
3x2 = 6

9x2 = 18
18:3 = 6

Il problema della cioccolata

Un esempio di situazione concreta da risolvere in cui **i naturali non funzionano**

- *Ci sono 3 cioccolate da dividere tra 4 bambini. Come si può fare? Quanta cioccolata toccherà ad ogni bambino? Perché?*

La difficoltà sta nel trovare il collegamento tra **fare 4 parti uguali di 3 "cose"** e il risultato 3/4.

In pratica si dovrebbe arrivare a capire che

$$\mathbf{3:4 = 3/4}$$

perché non esiste un numero naturale che moltiplicato per 4 ci dia 3.

- Possiamo dividere ogni cioccolata in 4 parti uguali.

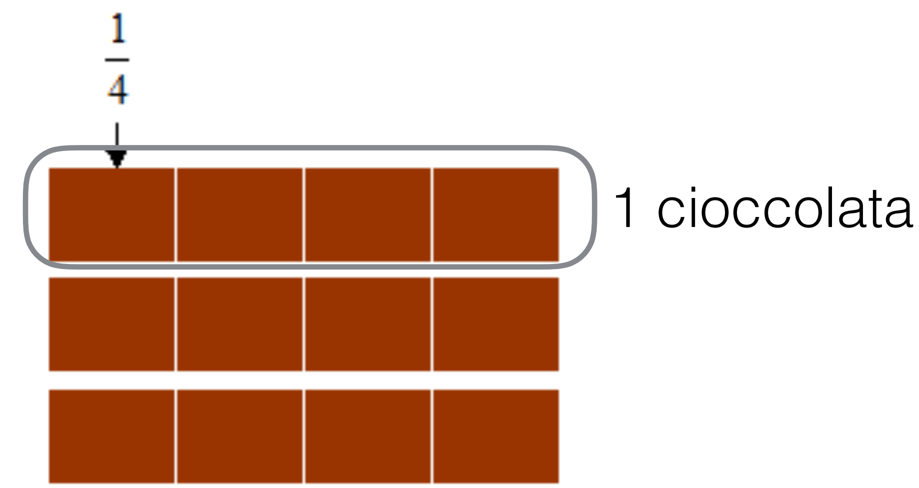
- Ogni parte nella quale risulta divisa una tavoletta è pari ad 1/4 di essa.

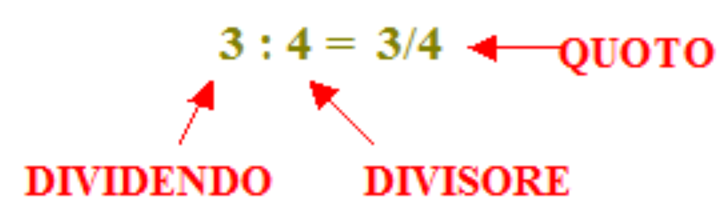
- Complessivamente le nostre 4 tavolette risulteranno divise in 12 parti uguali.

- A questo punto sarà facile risolvere il nostro problema: si tratterà di assegnare ad ogni persona 3 delle 12 parti ottenute.

- Ad ognuna delle nostre 4 persone daremo tre di queste parti, cioè 3/4.

- Si può allora affermare che la frazione 3/4 è il **quoto** della divisione di 3 per 4.





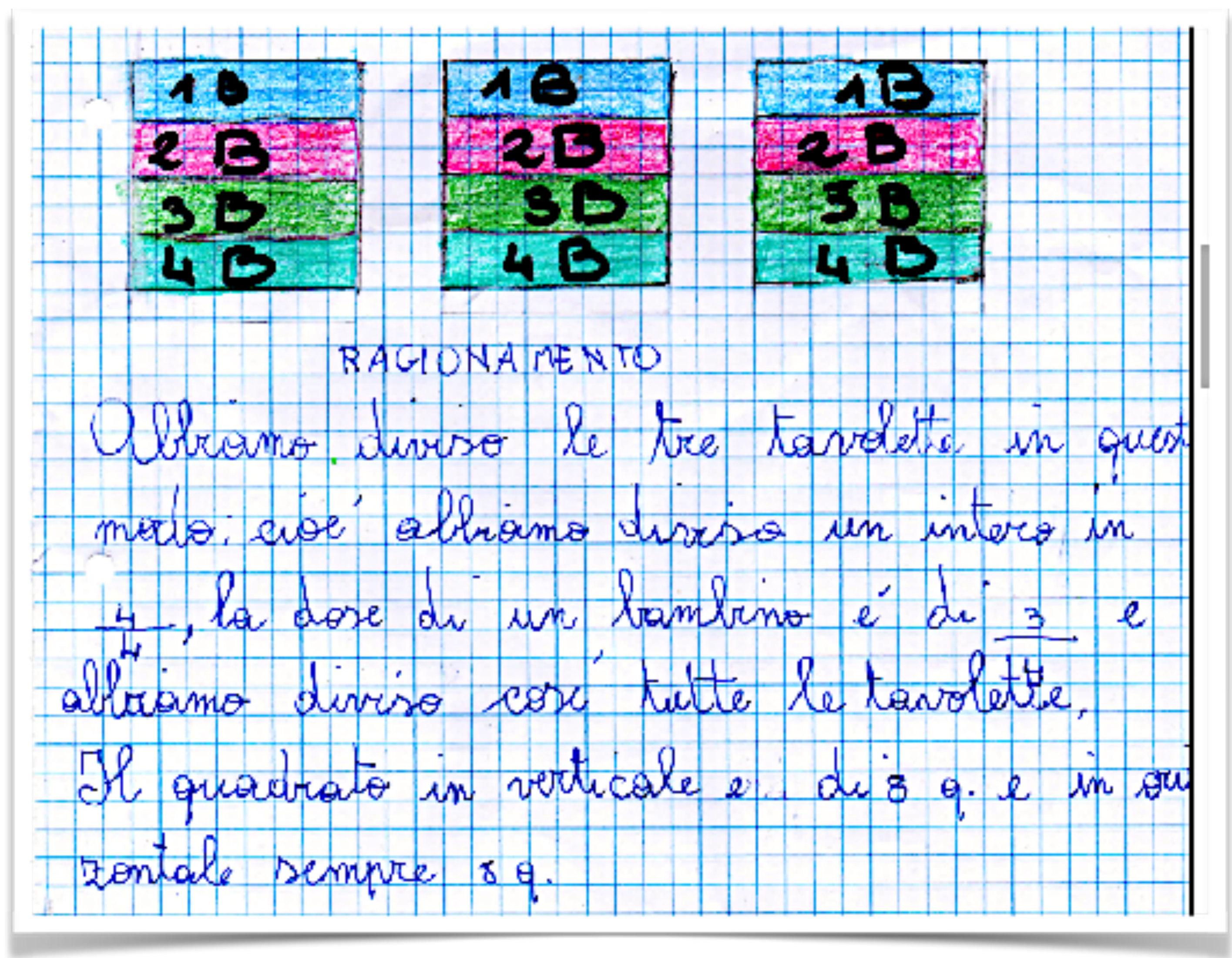
perché

3/4 x 4 = 3

In quarta

Gli allievi non hanno difficoltà a mettere in relazione bambini e parti di cioccolata, il problema è esprimere questo con la frazione 3/4

4/4 è tutta la tavoletta
3/4 è la parte di ogni bambino



RAGIONAMENTO

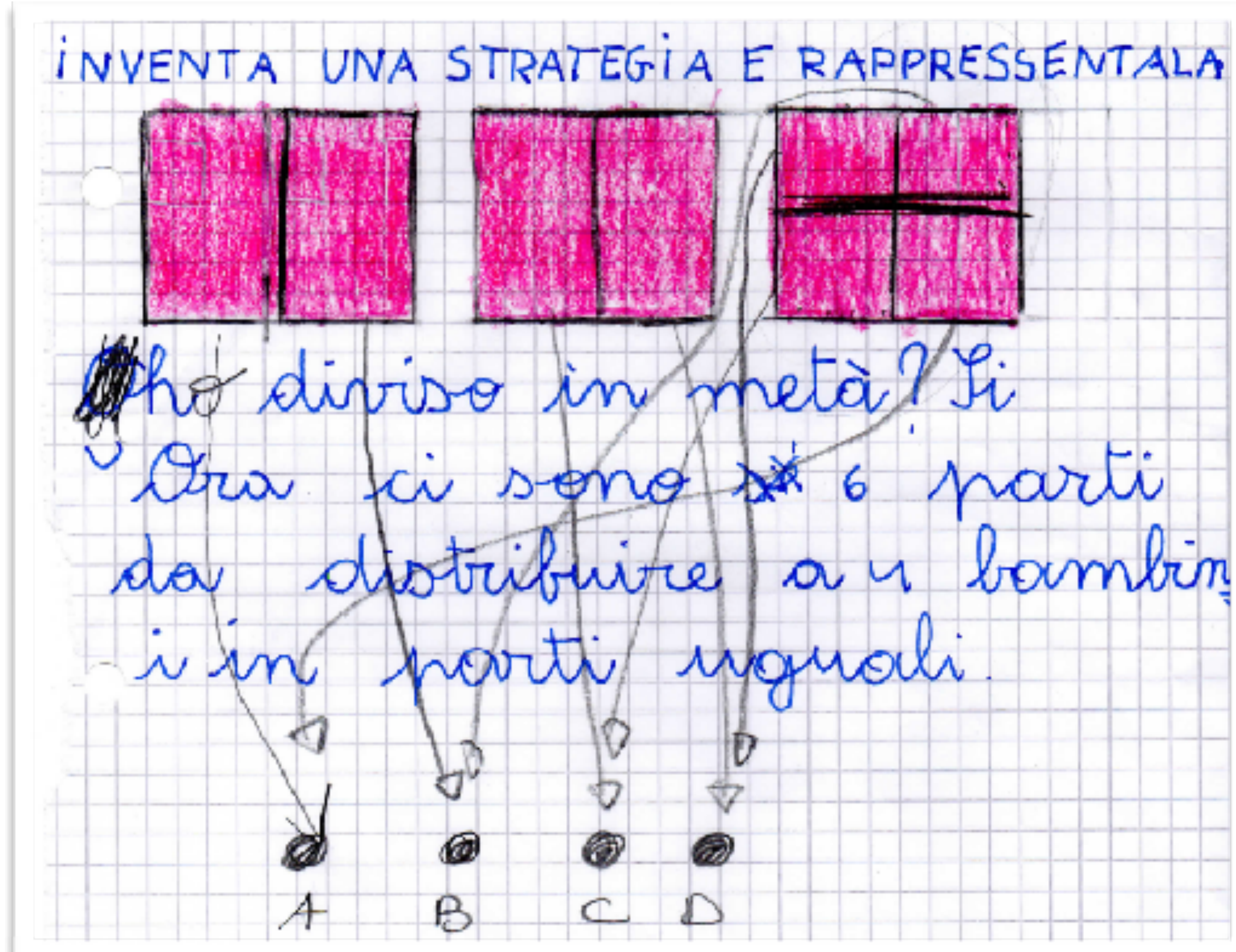
Abbiamo diviso le tre tavolette in questo modo: cioè abbiamo diviso un intero in 4, la dose di un bambino è di 3/4 e abbiamo diviso così tutte le tavolette. Il quadrato in verticale è di 8 q. e in orizzontale sempre 8 q.

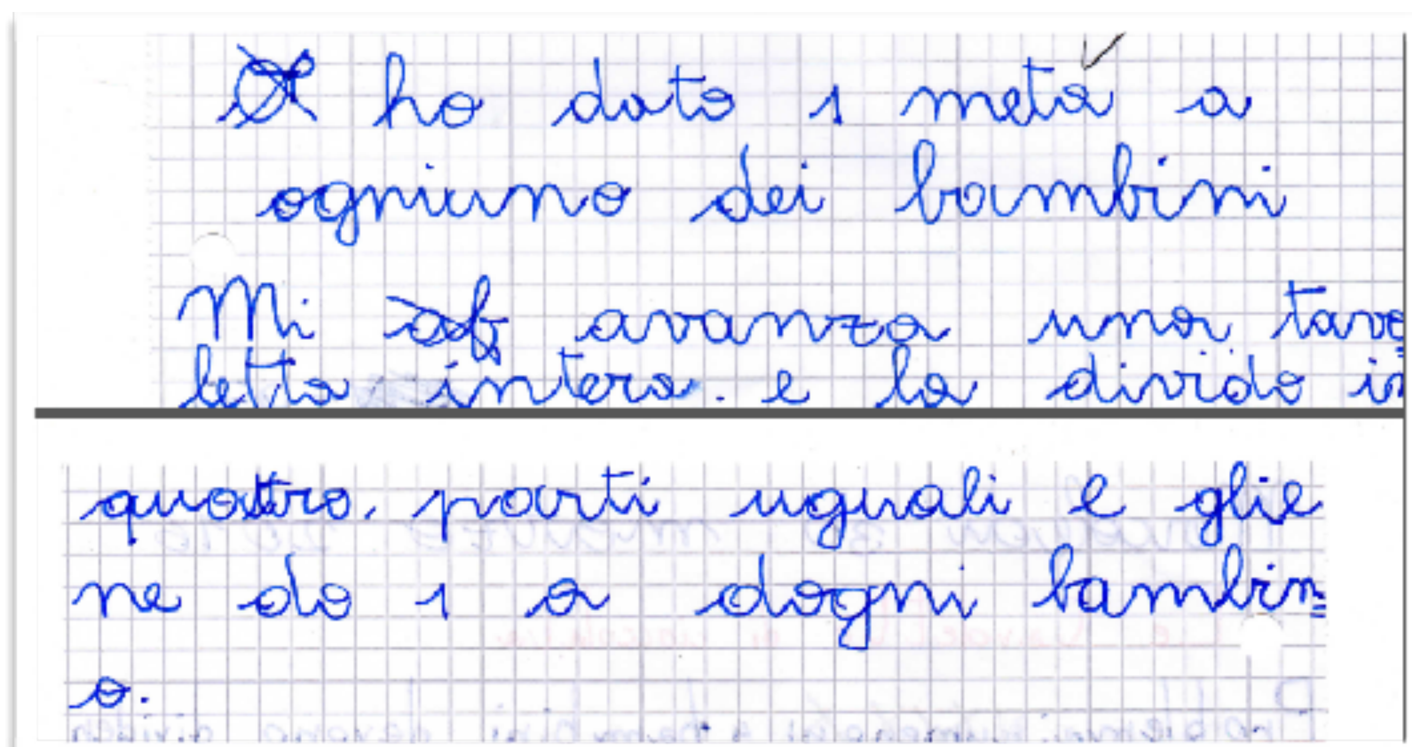
In quarta

Questi bambini rappresentano bene la situazione ma non riescono a tradurre il risultato con una frazione.

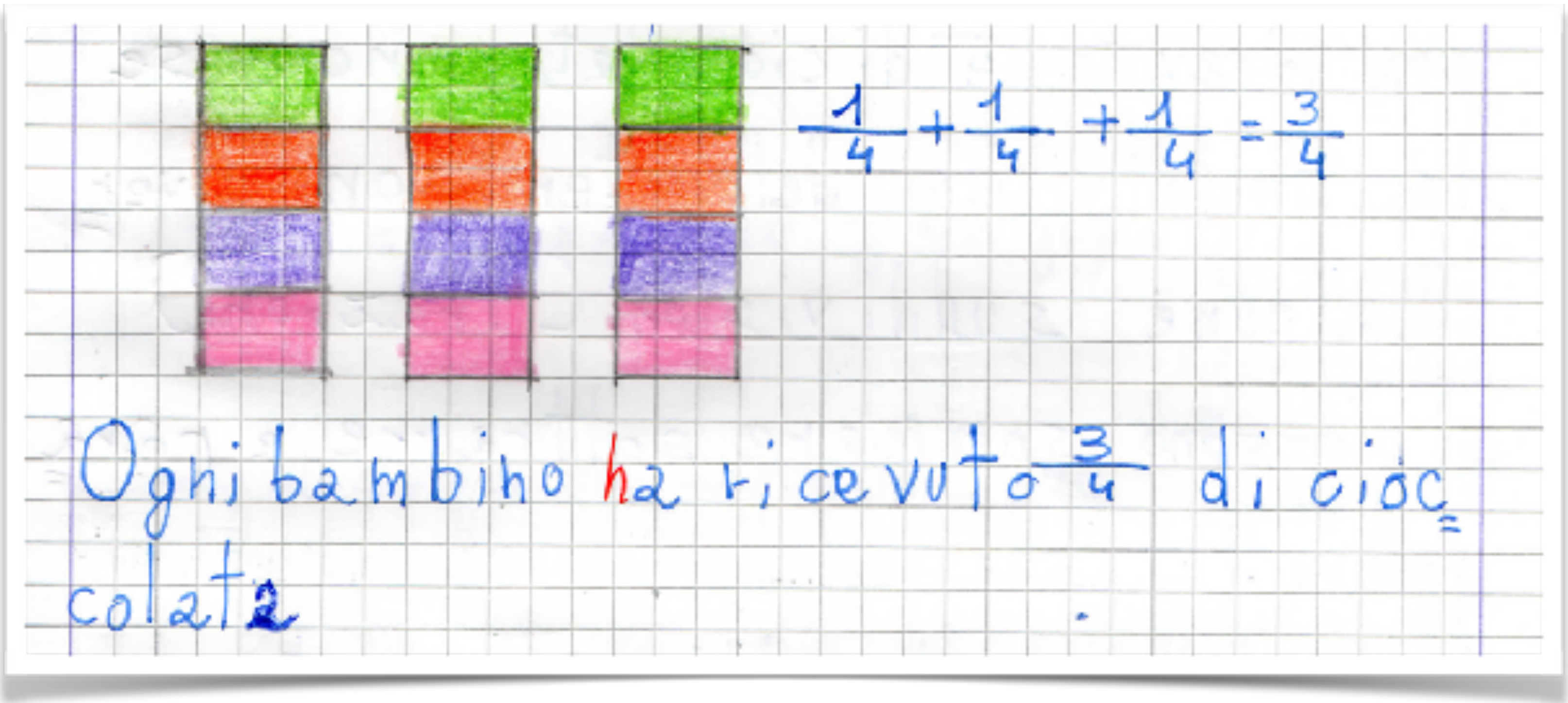
Come esprimere

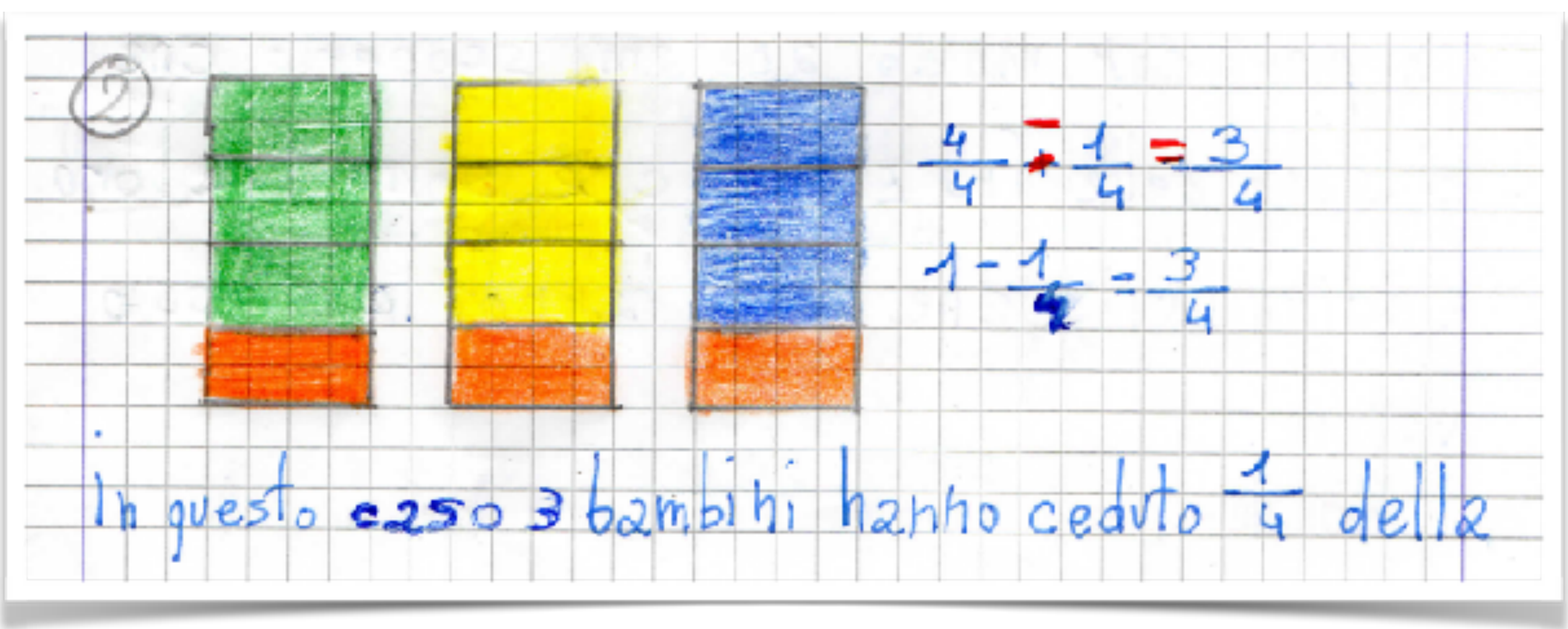
1/2 + 1/4?





Dopo la discussione





L'addizione e la sottrazione tra unità frazionarie sono consonanti con le stesse operazioni tra naturali se le frazioni hanno lo stesso denominatore.
E se non fosse così?

1/2 + 1/4 = ???

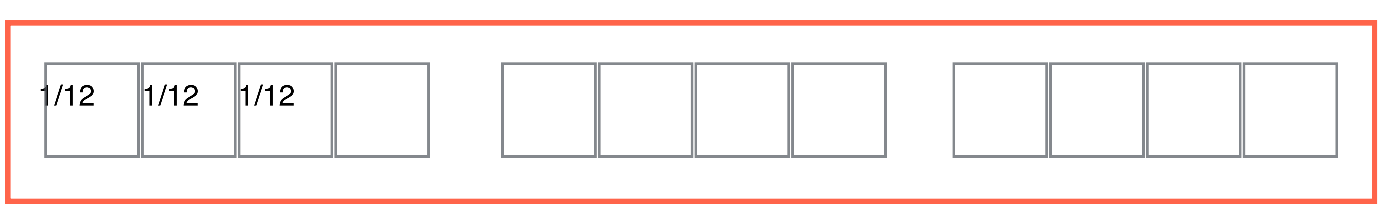
Un’insidia

Non è usuale fare ¼ di 3 cose invece di 3/4 di 1 anche se matematicamente le due situazioni sono equivalenti perché portano allo stesso risultato:

$$\frac{1}{4} \times 3 = 3/4 \qquad 3/4 \times 1 = 3/4$$

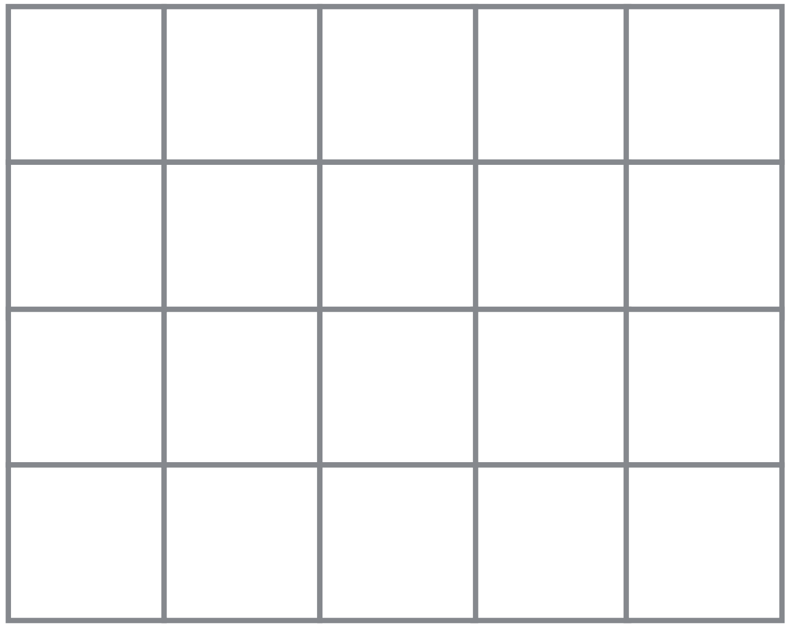
Fare 4 parti di 3 tavolette e prenderne una o fare 4 parti di una tavoletta e prenderne 3, portano allo stesso risultato, ma cambiano totalmente le “mosse” da fare, difficile vederne l’equivalenza.

Il problema che si pone alla fine è che cosa guardare per esprimere il risultato: guardo le 3 parti in una tavoletta o guardo le 3 parti su tutti e 12 i pezzi?
Non bisogna perdere di vista l’unità di misura che è la tavoletta di cioccolata.
3/12 di 3 tavolette è visivamente uguale a 3/4 di una tavoletta ma sono due cose concettualmente molto diverse perché cambia l’unità di misura.



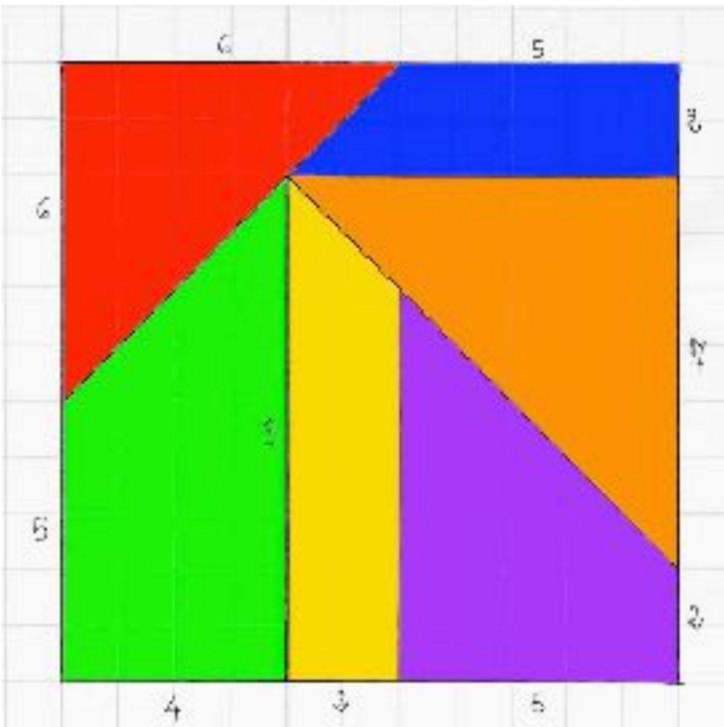
Alla scuola media…

- Problema classico da scuola media: *I lati di un rettangolo sono* ***uno i 4/5 dell'altro****, se il perimetro vale 18 cm, quanto vale l'area?*
- Qual è l'ostacolo?
- 4/5 di che cosa? Come individuare l'unità di misura?
- Serve individuarla?
- **Che cosa cambia rispetto alla situazione delle caramelle?**
- Entra il gioco il significato di **rapporto.**



il lato minore è 4/5 del maggiore oppure il lato maggiore è 5/4 del minore: l'unico dato che ci interessa è che uno dei lati è fatto di 4 parti e l'altro di 5

Il puzzle



Disponetevi in gruppi di 6. Ogni persona del gruppo deve fare l’ingrandimento di un pezzo di questo puzzle.
La regola è questa: il lato del pezzo che misura 4 cm, sul puzzle ingrandito dovrà misurare 7 cm.
Alla fine si deve ricostruire il puzzle ingrandito.
Dopo la realizzazione dei 6 pezzi il gruppo discute dei metodi utilizzati. Se il puzzle non si può ricostruire perché i pezzi non combaciano, il gruppo cerca un nuovo metodo e ognuno ricostruisce il suo pezzo.

Gianluca: **C’era una moltiplicazione da fare per il lato**, questo lato era 4, lo moltiplicavamo per un numero che adesso non mi viene in mente, 4 per un numero un po' piccolo …. uno, … quattro per uno fa quattro, quindi quattro per…
MD lui dice 1,5
Gianluca: sì, tipo così, si 1, qualcosa e quindi finché ci veniva 7 e usavamo questa qui per le altre

Ciro: c'era 4 e dovevamo fare il lato di 7 allora dovevamo pensare quanto aggiungere e fra il 4 e il 7, abbiamo visto che c'era 3 e allora abbiamo **aggiunto tre**

Filippo: perché ho visto che 1,75 cioè scusa volevo dire 2 meno 0,25 fa 1,75 e 0,25 per 4 fa 1, allora ho pensa
che 4 per 2 fa 8
MD allora tu hai pensato che 4 per 2 fa 8 ed è troppo, 4 per 0,25 fa 1
Filippo: allora ho visto che **8 meno 1 faceva 7 e quindi ho tolto 0,25 da 2**

Che strumenti hanno i nostri allievi?

- *Alla fine della primaria che visione hanno gli allievi delle frazioni?*
- *Quali problemi sono stati affrontati e quali rimangono aperti?*
- *Quali significati mancano ancora?*

Una storia di bocconi

"C'era una volta un leone, un topo e una formica che abitavano nel solito posto e con il tempo diventarono amici. Un giorno andarono al mercato e decisero di comprare il formaggio perché era un cibo che piaceva a tutti e tre.
Il leone con la sua grande bocca mangiò **tre grossi bocconi** di formaggio e si saziò. Il topo con la sua piccola bocca prese **tre bocconi** e si riempì la pancia. La formica con la sua piccolissima bocca prese **tre bocconi** di formaggio e subito si sentì piena.
Il padrone del formaggio disse: - Ora mi dovete pagare: **tre bocconi, tre soldi**. Il leone pagò subito.
La formica non era tanto d'accordo perché disse: - Ma non è giusto che io paghi tre soldi come il leone che ha mangiato tre bocconi grandi ed io molto più piccoli. – Il padrone disse: - Non me ne importa, a me dovete tre soldi il leone, tre soldi il topo, tre soldi la formica: **nove soldi in tutto. Mettetevi d'accordo.**" (*attività suggerita da Paolo Guidoni*)

Alla scuola dell'infanzia:

- bocconi grandi
- soldi grandi

solo qualitativo

In prima:

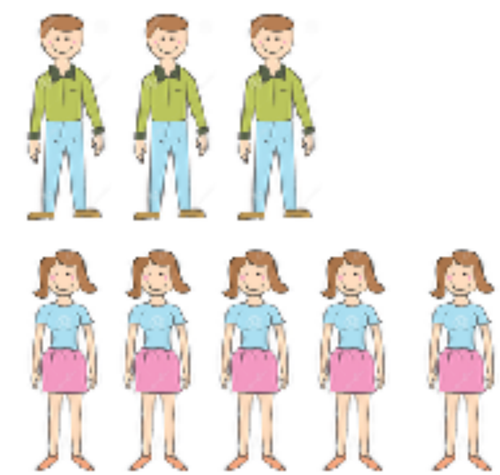
- leone 4 soldi
- topo 3 soldi
- formica 2 soldi

quantitativo ma…

La proporzionalità non c'è

Altri problemi

- Il rapporto maschi/femmine deve essere di **3 a 5**. Se i maschi sono 6, quante dovrebbero essere le femmine?
- Una torta contiene **100 g di zucchero e 200 g di farina** se ho 400 g di farina, quanto zucchero mi serve?



Si deve ragionare sull'uguaglianza dei rapporti e su come la matematica ci aiuta a trovare i numeri giusti per conservare questa uguaglianza

I miscugli di colore

Si devono dipingere di verde tre pannelli di dimensioni diverse e si hanno a disposizione barattoli tutti uguali di colore giallo e blu. I pannelli devono avere tutti la stessa tonalità di colore.

Marco ha dipinto il primo pannello utilizzando un miscuglio ottenuto con **4 barattoli di blu e 6 di giallo.**

Luisa deve dipingere il secondo pannello: per ottenere la stessa tonalità di colore ed avendo a disposizione **6 barattoli di blu**, quanti barattoli di giallo deve aggiungere?

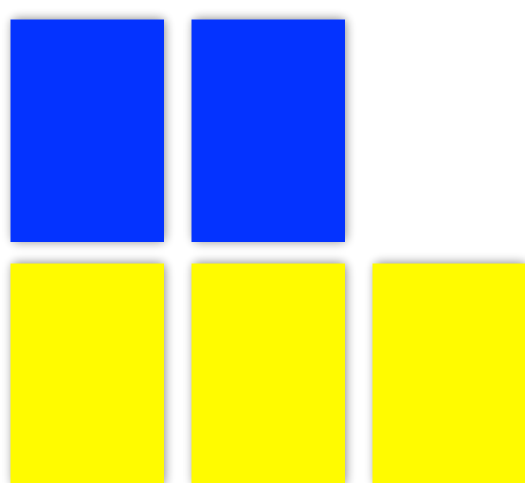
Piero per il terzo pannello, ha **3 barattoli di giallo**: quanti barattoli di blu deve aggiungere?

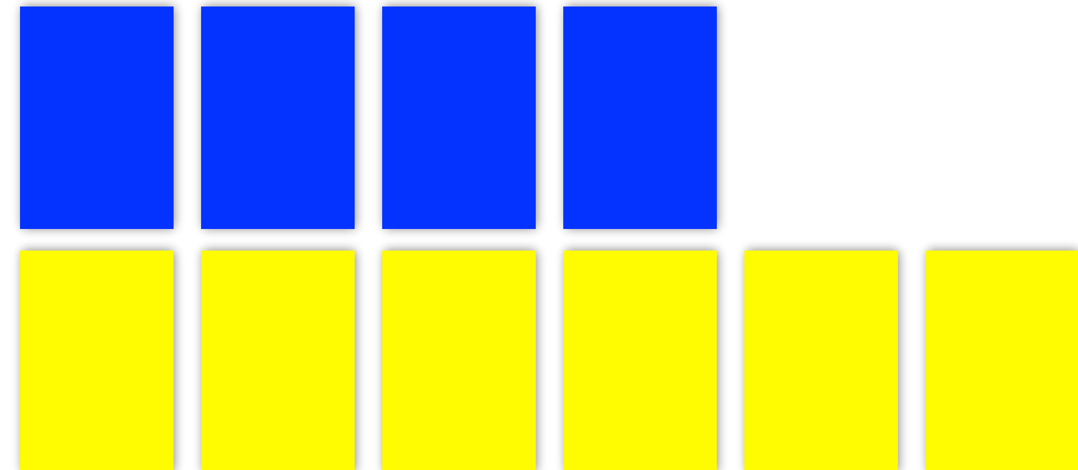
Spiega il tuo ragionamento per rispondere alle domande:

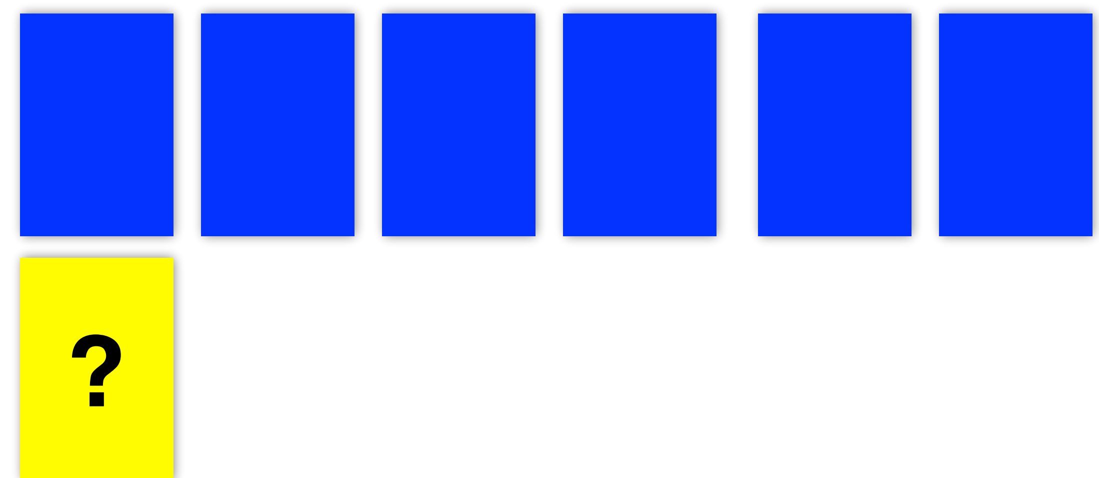
Per Luisa ……

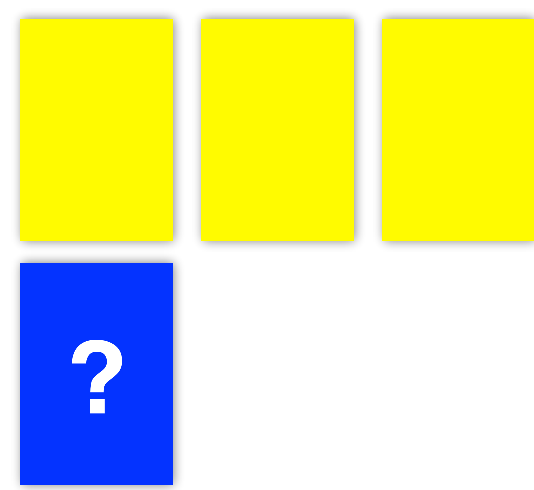
Per Piero ……

La relazione da scoprire è questa





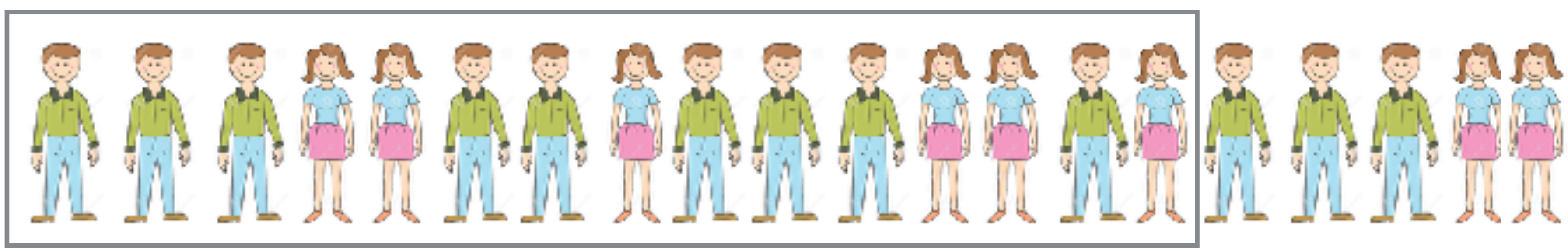




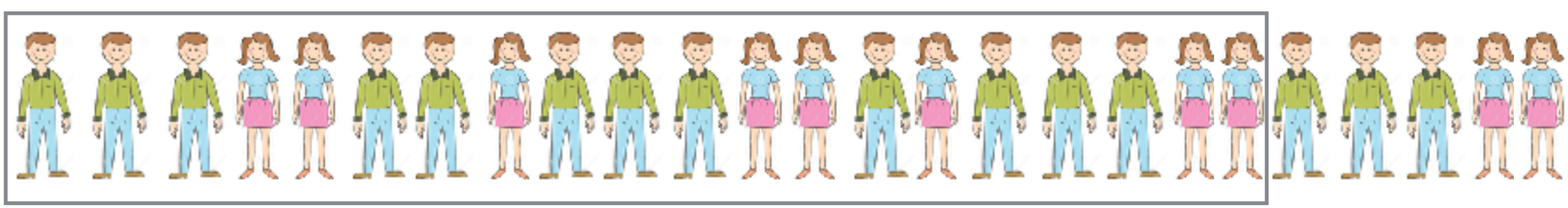
La classe migliore

Gli alunni di due classi quinte, all’esame, hanno dovuto risolvere lo stesso problema di aritmetica.
In quinta A ci sono 20 alunni e le soluzioni giuste sono state 15.
In quinta B ci sono 25 alunni e le risposte giuste sono state 20.
Quale classe si è comportata meglio e perché?
Spiega il tuo ragionamento.

15 su 20



20 su 25



15:20 = 0,75 **20:25 = 0,8**

Che cosa mi dicono questi numeri?

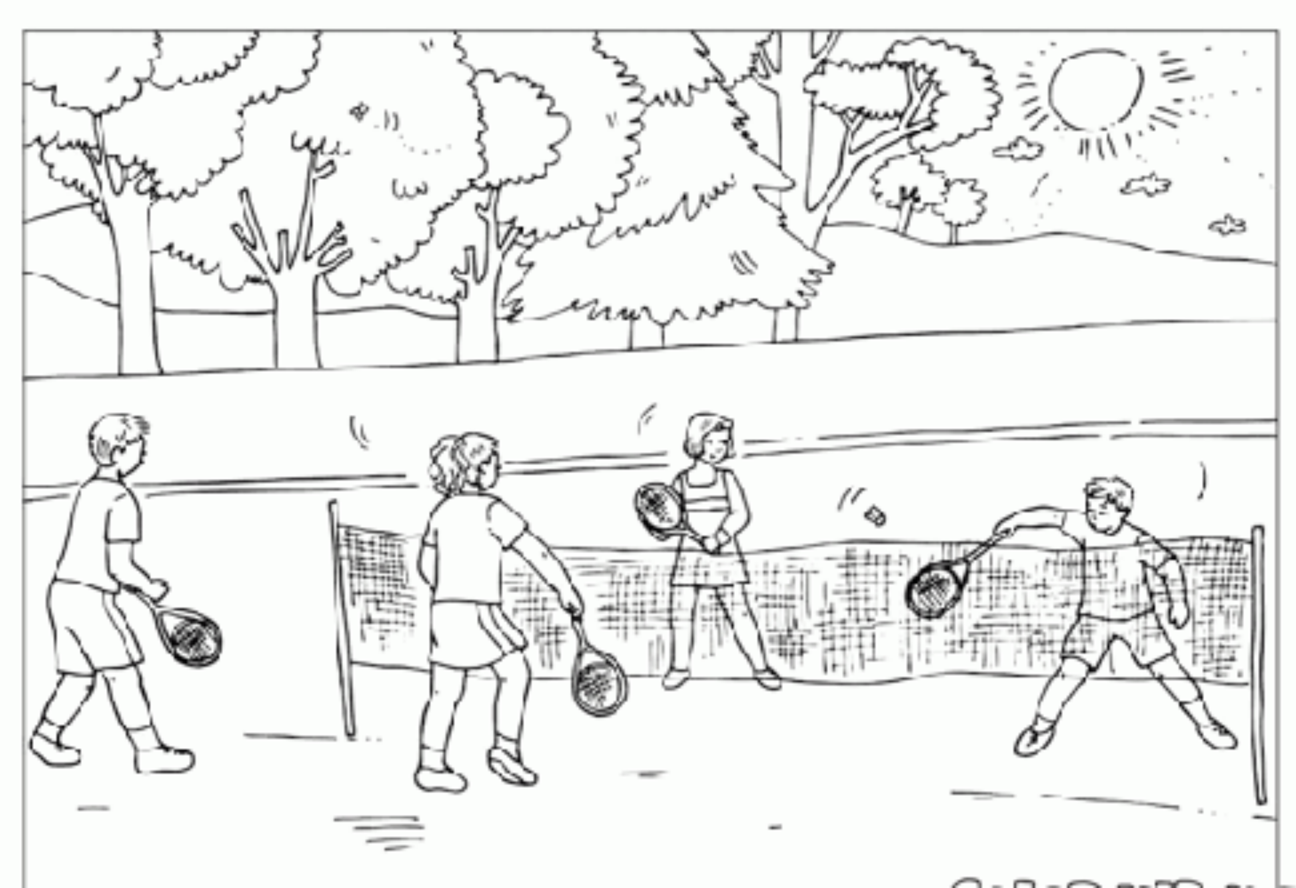
Chi è il campione?

Alberto, Bruna, Carla e Dario sono giocatori di tennis delle stessa categoria. Durante l'anno scolastico hanno partecipato a diversi tornei ottenendo i seguenti risultati:

	Alberto	Bruna	Carla	Dario
Partite vinte	15	9	28	48
Partite giocate	30	20	52	100

In base ai risultati ottenuti, secondo te chi è il più bravo?
Spiega come sei arrivato alla tua conclusione.

15 su 30 vuol dire la metà
9 è meno della metà di 20
28 è più della metà di 52
48 è meno della metà di 100



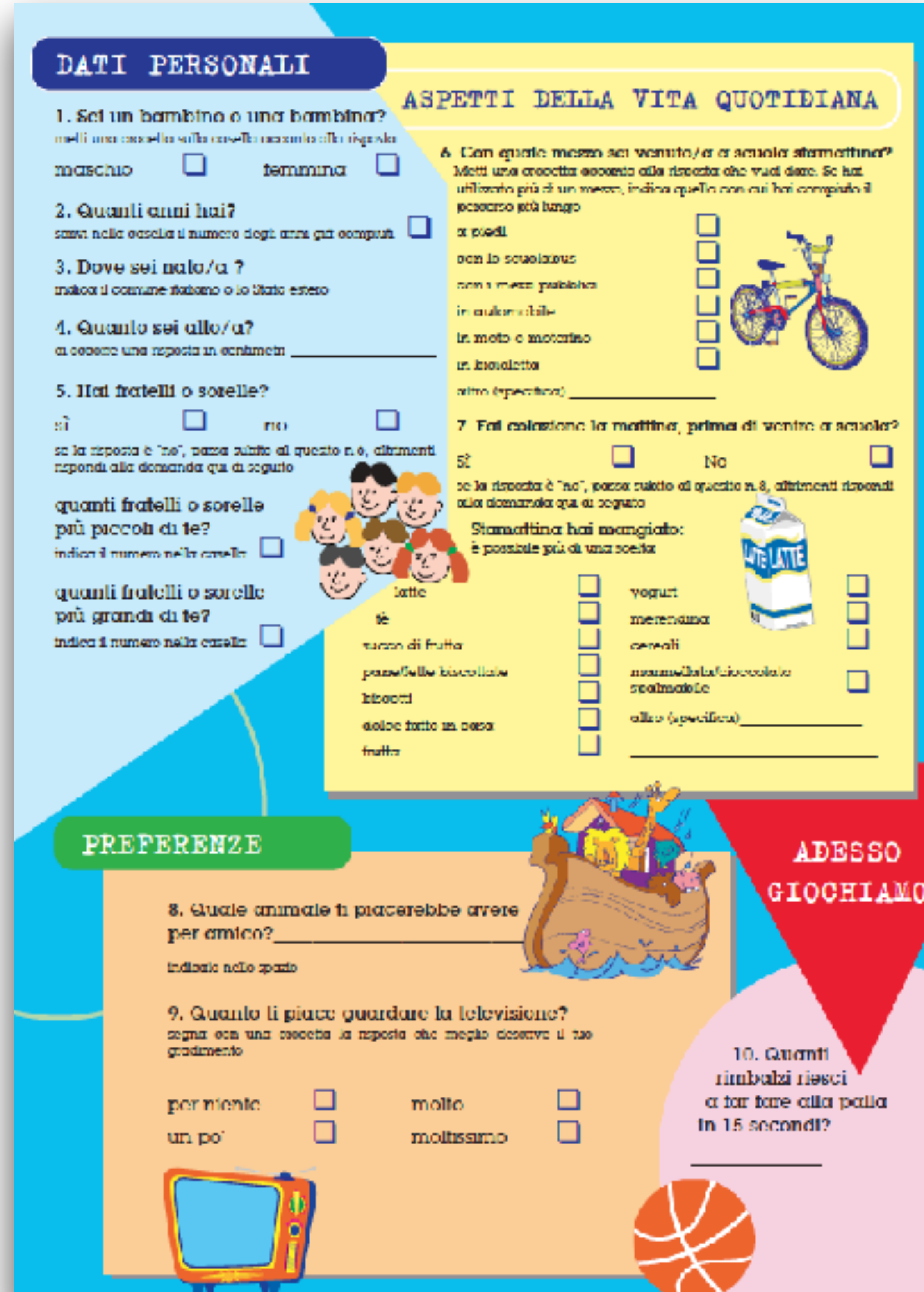
Il censimento

Censimento a scuola
Scuole Elementari
Hai fratelli o sorelle

Dimensione Comune: Metropolitano

	Fratelli o sorelle			
	Si		No	
	Num.	%	Num.	%
Ripartizione				
Nord Ovest	2029	75.01	676	24.99
Nord Est	272	71.58	108	28.42
Centro	732	77.38	214	22.62
Sud	1513	89.53	177	10.47
Isole	1343	90.50	141	9.50
Totale	5889	81.73	1316	18.27

Dati di varia natura da trattare in modo statistico


DATI PERSONALI

1. Sei un bambino o una bambina?
maschio femmina

2. Quanti anni hai?

3. Dove sei nato/a ?

4. Quanto sei alto/a?

5. Hai fratelli o sorelle?
sì no

quanti fratelli o sorelle più piccoli di te?

quanti fratelli o sorelle più grandi di te?

ASPETTI DELLA VITA QUOTIDIANA

6. Con quale mezzo sei venuto/a a scuola stamattina?
a piedi
con lo scuolabus
in motorino
in bicicletta

7. Fai colazione la mattina, prima di venire a scuola?
Sì No

Stamattina hai mangiato:
latte
tè
succo di frutta
biscotti
frutta
yogurt
merendina
cereali

PREFERENZE

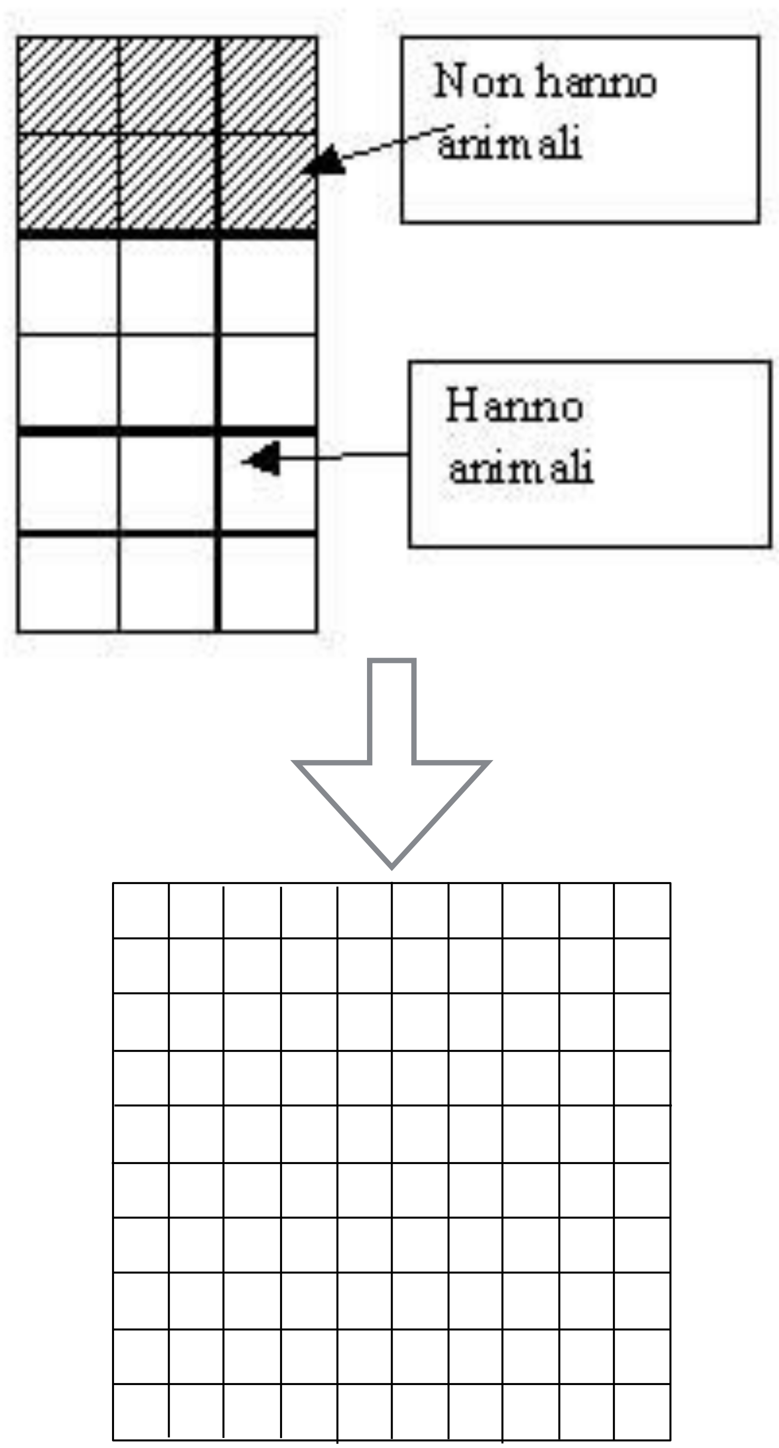
8. Quale animale ti piacerebbe avere per amico?

9. Quanto ti piace guardare la televisione?
per niente
un po'
molto
moltissimo

ADESSO GIOCHIAMO

10. Quanti rimbalzi riesci a far fare alla palla in 15 secondi?

Le percentuali



La prima cosa che ci è venuta in mente è stata questa:
i bambini che non hanno animali sono **la metà** di quelli che li hanno.
Per calcolare la percentuale si fa finta di essere in 100 in classe (invece di 18) ma bisogna che la regola rimanga la stessa. Come possiamo ragionare?
Abbiamo provato a fare una tabella con i dati che ci venivano in mente e con le calcolatrici abbiamo fatto i calcoli necessari per compilarla.
Ci siano subito accorti che non poteva venire un numero intero

	NUMERI	PERCENTUALI	
X 8,447 ↓	853	11,84	↓ X 8,447
	7.205	100	

7 205 : 853 = 8,447

100 : 18 = 5,55555

Ragionare sulle operazioni inverse

Dalle frazioni come operatori…

- I due numeri naturali 1 e 3 legati nella scrittura **⅓** in ciò che chiamo “**frazione**” hanno questi significati
  - **1** sono le parti che voglio considerare (numeratore)
  - **3** sono le parti in cui ho suddiviso l’intero (denominatore)
- Si <u>confrontano due grandezze omogenee</u>, una delle due è la base del confronto, l’“**unità di misura**”, il loro **rapporto** esprime quindi la **misura** della seconda rispetto alla prima presa come unità.
- In tutte le situazioni di misura avviene questo: quindi la misura si può esprimere **solo** con numeri razionali.
- Ma il problema principale che si pone con le frazioni è questo: se sono “**operatori**” su grandezze come possono essere considerate “**numeri**”?

… al numero razionale

- La particolarità delle frazioni è che possono esprimere la stessa "misura" in molti modi diversi.

- Questo ci consente di costruire delle **classi di equivalenza di rapporti uguali** (le frazioni equivalenti).

- Sono queste **classi** che si possono definire come "**numeri**", non la singola frazione.

- Una volta costruiti, i **numeri razionali** si possono "strutturare" a loro volta con delle **operazioni** per studiarne le proprietà (addizione, sottrazione , moltiplicazione, divisione…) che non saranno le stesse dei numeri naturali.

1/2

6/12

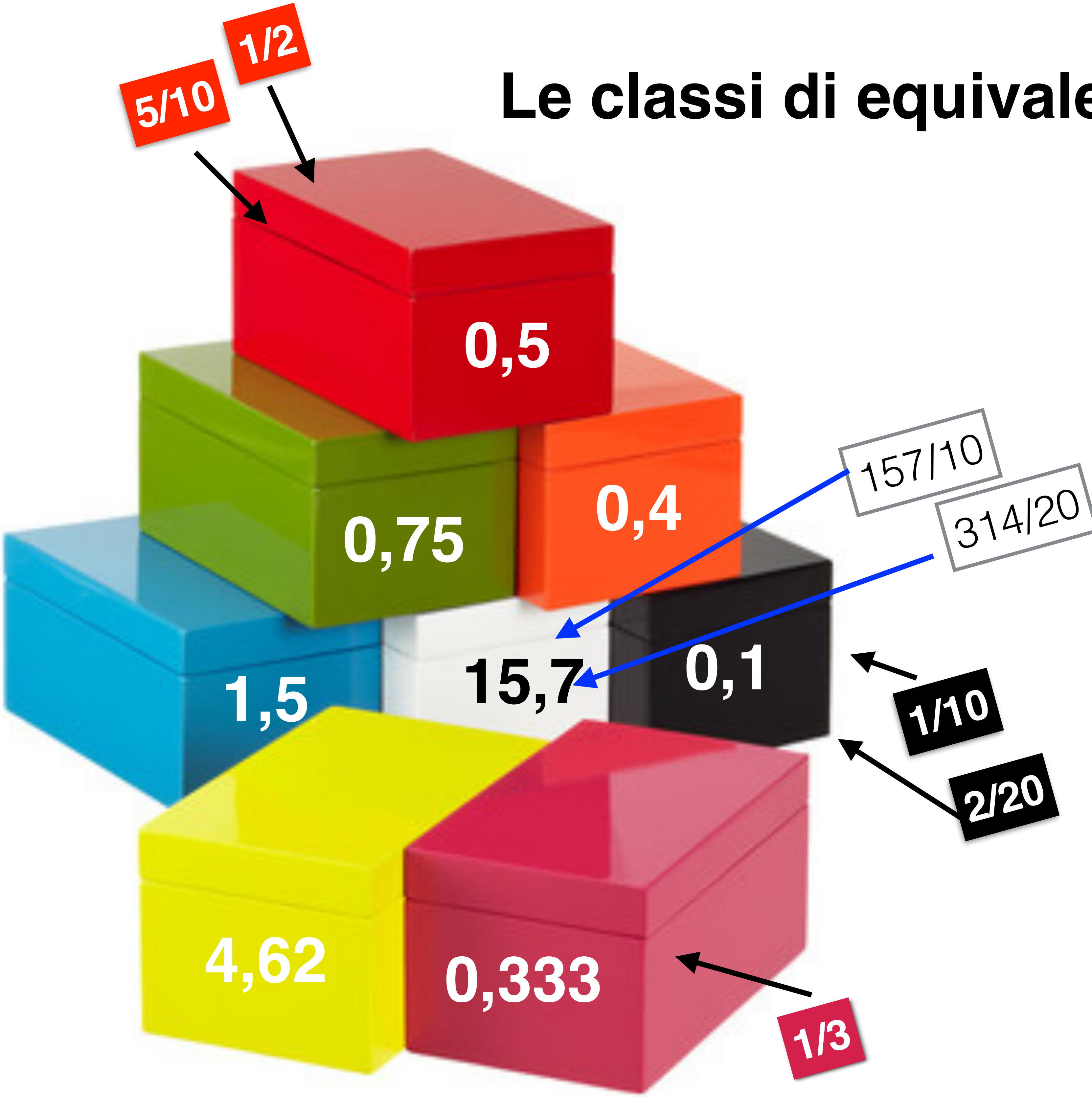
2/4

2/3

4/6

8/12

Le classi di equivalenza come “scatole”



Dentro le scatole ci sono (virtualmente) tutte le frazioni che costituiscono la classe di equivalenza

Che tipo di attività proporre per arrivare qui?

Razionali e divisione

- Nel momento in cui entriamo nel mondo dei numeri razionali ci accorgiamo subito che **la divisione ha sempre un risultato** perché possiamo considerare non solo interi ma anche parti di un intero.
- Quindi acquistano senso anche divisioni del tipo:

5 : 20 = …. **o** **11 : 3 = ….**

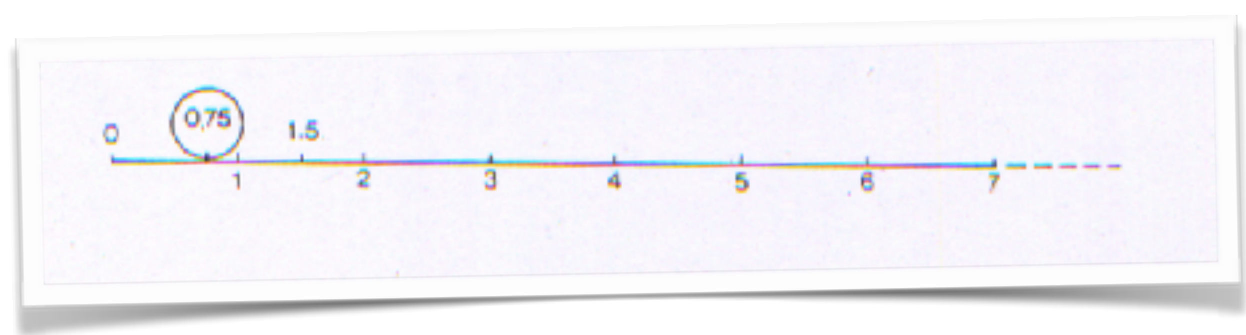
- Se uso la calcolatrice che cosa trovo?
- **5 : 20 = 0,25 numero decimale finito**
- **11 : 3 = 3,6666666666… numero decimale illimitato periodico**
- Perché nel secondo caso non ho trovato un numero decimale finito? Perché **il 3 non avrà mai una potenza di 10 nella sua "tabellina"** come invece succede con altri numeri tipo il **20** (20x5=100)

In quarta

La Lepre Marzolina

All'ora del tè si incontrano ogni giorno la Lepre Marzolina, il Ghiro e il Cappellaio Matto, sono in 3 e la lepre Marzolina ha preparato 9 tazze, 9 tartine, 9 vasetti di marmellata, 9 rotoloni di burro e 9 centilitri di tè. Quindi 3 "cose" a testa e il tè. M
Ma… arrivano altri ospiti: il Coniglio Bianco, Alice e il Gatto dello Ceshire: ora sono in 6. La soluzione proposta dal Gatto è di dare 1 cosa ciascuno e mettere da parte il resto; ma il Cappellaio dice: "Come dividere il tè?" Il Gatto allora fa una nuova proposta: versare prima un centilitro di tè in ognuna delle 6 tazze e poi aggiungere ancora mezzo centilitro. Questo ci porta alla divisione 9 : 6 = 1,5.
E la storia non è finita. Interviene la Lepre che dice: "E se fossimo stati 12 invece di 6?" Il risultato questa volta è compreso tra 0 e 1, ma i decimi non bastano più, bisogna ricorrere ai centesimi per trovare il risultato perché anche il decimo va diviso a metà: si trova così 0,75.

9 : 3 = 3
9 : 6 = 1,5
9 : 12 = 0,75



La divisione in tabella

- La costruzione della tabella mette in evidenza ulteriori aspetti della divisione che se si rimane ancorati ad esempi concreti e al significato intuitivo di divisione non si potrebbero mai prendere in considerazione.
- Ed ecco allora alcune domande:

  Si può dividere per 0?

  n : 0 = ?

  E 0 : 0 = ?

  Perché?
- Per rispondere siamo obbligati a tornare alla moltiplicazione.

:	0	1	2	3	4
0	?	0	0	0	0
1	?	1			
2	?	2	1		
3	?	3		1	
4	?	4	2		1

Questo ci porta al cuore del problema cioè al significato più astratto di quest'operazione matematica, il punto finale del percorso.

Dai naturali ai razionali

- I numeri naturali si costruiscono come classi di equivalenza di **insiemi equipotenti**, i numeri razionali come classi di equivalenza di **frazioni equivalenti.**

- Questi nuovi numeri hanno uno statuto diverso e quindi una “usabilità diversa”.

- Quali sono le situazioni in cui servono? Tutte quelle in cui si mette in gioco un **rapporto tra grandezze**, non importa di che tipo siano.

La densità della retta

- La relazione tra frazioni equivalenti e numeri razionali, ci consente collocare sulla retta dei numeri sia frazioni che numeri decimali e quindi di intuire la **densità** della retta numerica.

- Che cosa vuol dire che la retta è **"densa"**?

- Il concetto di densità è relativo al fatto che tra due numeri razionali ci sono infiniti altri razionali e quindi **non esistono un precedente e un successivo.**

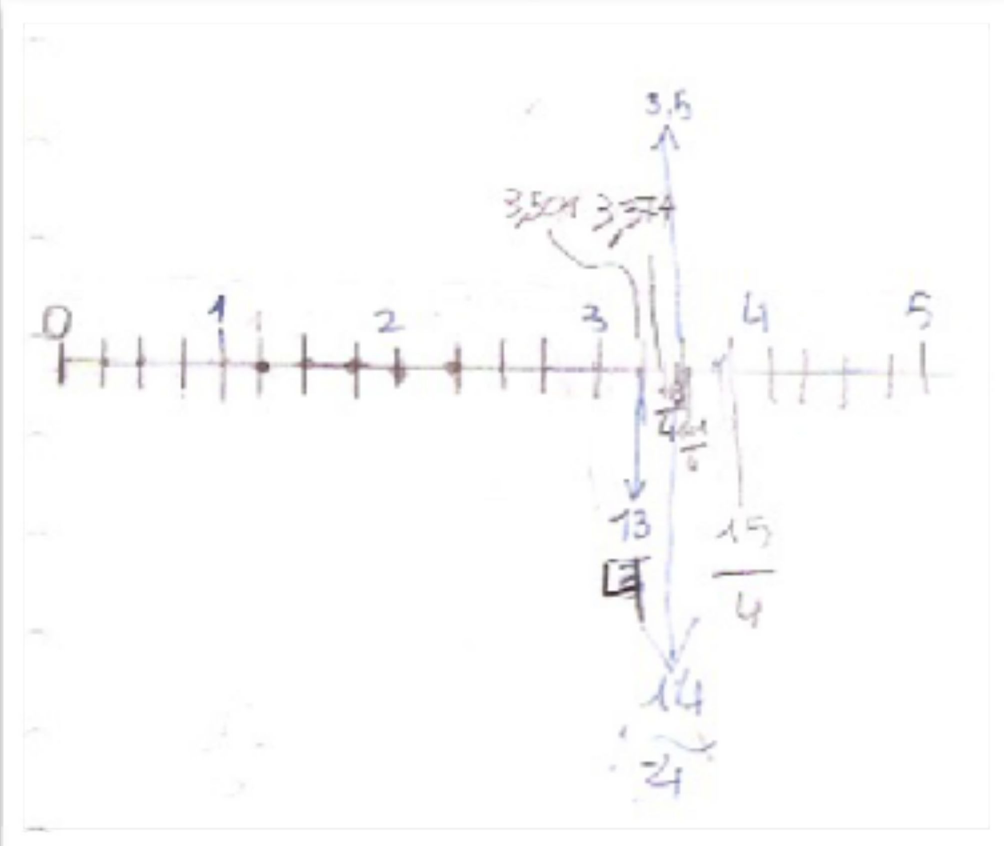
Il radar

- Si compone di tre problemi distinti da dare nell'ordine:

1. **Indovina l'intero:** I bambini si dividono in due squadre; una squadra deve pensare e scrivere su un foglietto una frazione, l'altra squadra, facendo domande a cui si possa rispondere con un sì o con un no, deve **indovinare fra quali numeri interi è compresa la frazione**; i bambini hanno a disposizione una calcolatrice.

2. **Il radar - 1° puntata:** Bisogna trovare due frazioni che stiano una a destra e una a sinistra della frazione data dall'insegnante (ad es.14/4): **vince chi riesce a racchiuderla con il "fascio radar" più stretto;** si gioca tutti insieme ma si possono formare dei piccoli gruppi per fare le giocate; si può usare la calcolatrice.

3. **Il radar - 2° puntata:** Oggi faremo un nuovo gioco del radar in cui invece di partire da una frazione, partiremo da un numero decimale e voi dovrete **trovare il fascio radar ma usando solo frazioni con il denominatore 7: il numero decimale è 2,351.** Immaginate ora tante botteghe da cui potete prelevare le vostre frazioni ma ogni bottega vende solo frazioni con lo stesso denominatore, cioè abbiamo la bottega dei settimi, degli ottavi, dei decimi, dei venticinquesimi e così via… oggi giochiamo con la bottega dei settimi.

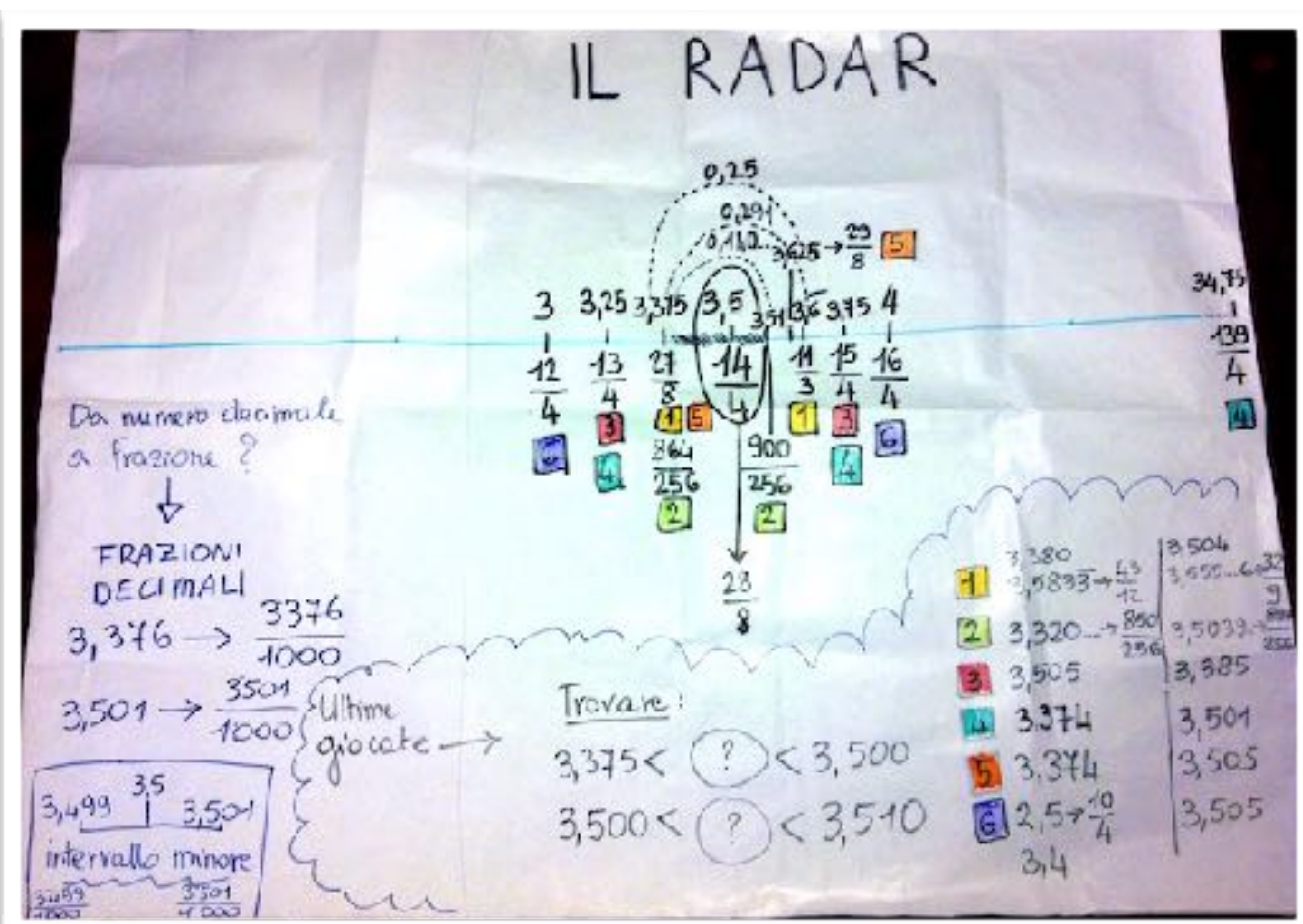


MATTIA: 26/8 30/8 perché visto che 1/4 è il doppio di 1/8 ho fatto così: se faceva 28/8 era uguale a 14/4, devo fare un numero più piccolo e uno più grande. Allora ho calcolato come fosse 13/4 e ho fatto il doppio cioè 26/8, poi ho fatto la stessa cosa per 15/4 e l'ho raddoppiato e fa 30/8

FRANCESCA: sì, perché 14:4 fa 3,5, 26:8 viene 3,25, poi ho fatto 30:8 e fa 3,75

ANDREA M. e ENZO: 27/8, perché il doppio di 14 è 28 e il doppio di 4 è 8 e veniva 28/8 solo che è uguale a 14/4 e allora abbiamo fatto 27/8 (3,375 è più vicino a sinistra di 3,25 dato da 26/8)

Perché fermarsi ai millesimi?



FRANCESCA: non vale, sono avvantaggiati perché hanno la calcolatrice con 10 cifre

LAURA: a destra 35.111.111/10.000.000=3,5111111

FRANCESCA: 35.000.001/10.000.000=3,5000001

ENRICO: 3.500.000.001/1.000.000.000=3,500000001

Conclusione: La frazione più vicina non esiste!

Qualunque frazione si dica se ne può sempre trovare un'altra che sta più vicino, quindi la ricerca non ha mai fine!

Una prima sintesi

Che indicazioni possiamo trarre da tutto ciò per la didattica quotidiana? Quali cambiamenti nelle pratiche didattiche?

1. **La divisione va sempre accompagnata dalla moltiplicazione** che l'ha generata verificando che ci sia da parte dei bambini una reale presa di coscienza del legame che le unisce che motiva anche il modo di contarle.

2. **Le frazioni vanno collegate con la divisione fin dall'inizio** presentando situazioni che invitino a fare parti uguali senza "separare" le grandezze *discrete* da quelle *continue* ma evidenziandone somiglianze e differenze.

3. I bambini devono **ragionare sui multipli e sui non-multipli** confrontando cosa succede nei due casi.

Una prima sintesi

4. La moltiplicazione e la divisione, ad un certo punto del percorso, si dovrebbero studiare anche **dal punto di vista strettamente matematico,** lasciando da parte i riferimenti al reale: che cosa ci dicono in quanto operazioni tra numeri?

5. Si deve costruire il significato della frazione come **rapporto** per poter capire la **proporzionalità.**

6. **Le frazioni vanno collegate con la misura** mettendo in evidenza come il numero che rappresenta una misura non possa essere un numero naturale perché esprime sempre un *rapporto*.

7. La misura va quindi trattata <u>anche</u> **dal punto di vista matematico** per capire che cosa effettivamente esprimano quei numeri.

Quali attività?

- La partenza è sempre il reale, le situazioni in **contesto** di cui abbiamo già parlato viste nei due sensi come moltiplicazioni e come divisioni.

- Ma poi ci dobbiamo espandere verso tutti gli altri **concetti collegati**: frazione, rapporto, numero razionale, misura.

- Ciascuna attività mette dei **tasselli** che conducono nel lungo periodo alla ricomposizione del **puzzle** che è formato da tanti concetti interdipendenti..

- Torniamo quindi da dove siamo partiti, ma avendo in testa **i collegamenti da costruire** man mano che si procede, avendo coscienza che non c'è una strada unica ma tante strade che si intersecano inevitabilmente e bisogna imparare a percorrere.