9-10

settembre-ottobre 1965

scritti di:

Campedelli
Castelnuovo
Ciari
Cordati Rosaia
De Finetti
Dienes
Ferrara Mori
Fehr
Geymonat
Golding
Libois
Lombardo Radice
Manara
Meschkowski
Mialaret
Morino Abbele
Pampallona
Pescarini
Ratto de Sadosky
Tornatore
Van Hercke
Viola
Visalberghi
Vorwerg
Wattiaux
Zadou-Naïsky
e altri

scuola e città

LA NUOVA ITALIA - FIRENZE

scuola e città

rivista mensile di problemi educativi e di politica scolastica

SOMMARIO del n. 9-10 - ANNO XVI

settembre-ottobre 1965

MATEMATICA MODERNA E SCUOLA

Direzione: via delle Mantellate 8, Firenze. Redazione e amministrazione: La Nuova Italia, piazza Indipendenza 29, Firenze. Abbonamento annuo per il 1965: per l'Italia L. 3000, per l'estero L. 3500; semestrale per l'Italia L. 1600, per l'estero L. 1800; abbonamento sostenitore L. 5000. Un fascicolo ordinario di 44 pagine, L. 300, per ogni 16^{0} in piú L. 150. Un

Un insegnamento moderno della matematica nella scuola media

di Emma Castelnuovo *

In questa relazione mi limiterò a parlare della scuola secondaria di primo grado; mi sento di parlare solo di quella scuola dove insegno da molti anni.

Quanto vado a riferire sono dunque delle esperienze condotte in classi di bambini dagli 11 ai 14 anni. Ma non si tratta solo di esperienze fatte da me; esse vengono da un gruppo di colleghi con cui lavoro da molto tempo e che insegnano nei piú disparati angoli d'Italia, da grandi centri a piccolissimi paesi. Nell'ascoltare me ascolterete dunque la voce di tutti questi colleghi, o forse, piú precisamente, il continuo intervento dei bambini delle nostre classi.

Dico subito che quanto riferirò non è che qualche esemplificazione, dalla quale non so, in verità, se possa risultare l'inquadratura di un contesto generale: queste esperienze vanno infatti pensate in un contesto generale e non debbono apparire come degli espedienti isolati atti solamente a rendere la lezione piú brillante.

Ho detto che voglio parlare di bambini; comincerò dunque col presentarveli, questi bambini, dal punto di vista matematico.

Sono bambini che, quando entrano nella scuola media, molto spesso non collegano l'operazione diretta con quella inversa anche nei casi piú semplici; per esempio, se anche sanno che il prodotto di 6 per 7 è 42, il piú delle volte rimangono incerti sul valore del quoziente ottenuto dividendo 42 per 6. Sono bambini che riconoscono la figura quadrato quando sia disegnata sulla lavagna con i lati paralleli ai bordi della lavagna stessa, mentre il quadrato non è piú per loro un quadrato se appare in un'altra posizione. Sono bambini che, dopo aver trovato che la somma dei primi 10 numeri naturali è uguale a 55, sostengono che la somma dei primi 20 risulterà uguale al doppio di 55.

Noi abbiamo classi di 30-35 allievi, le nostre esperienze riguardano quindi migliaia di bambini; orbene, un 25 su 30 all'inizio della scuola media ci dà queste risposte.

So bene quali reazioni possono suscitare questi dati di fatto: sono i maestri elementari — direte — che preparano male i nostri bambini, che insegnano male, che indirizzano male. A chi formula questa accusa mi permetto rispondere in modo molto chiaro: è facile accusare chi è al di sotto di noi, al di sotto perché insegna ad allievi di età inferiore, ma rendiamoci conto che questi insegnanti di scuola elementare siamo noi, professori di scuola secondaria, che li abbiamo preparati; rendiamoci conto che, una volta terminato l'istituto magistrale, essi vengono lasciati a loro stessi, e che la vita di grande sacrificio che essi conducono, spesso con classi di 50 allievi, o con le pluriclassi, o con doppi o tripli turni, o dislocati nei centri piú sperduti con disagi di ogni genere, questa vita — dico — non è riconosciuta da nessuno di noi professori. Se anche faranno errori nell'insegnare la matematica, essi si prodigano il piú delle volte nel cercar di educare piú che di istruire, nel cercar di amare e di farsi amare, nel creare insomma quell'ambiente di reciproca comprensione e stima che deve esserci sempre fra maestro ed allievo a qualunque grado d'insegnamento, se si vuole che la scuola sia veramente scuola.

Ma torniamo al nostro insegnamento; accettiamoli cosí, questi bambini, e non facciamo critiche ai loro maestri prima di aver fatto qualcosa per questi insegnanti elementari.

A me sembra che un insegnamento moderno della matematica nella scuola media debba articolarsi sui due temi centrali:

1. significato del riferimento al concreto in una visione gruppale della matematica;
2. valore formativo dello studio di uguali schemi logici in capitoli diversi.

Cominciamo dal primo tema: *significato del riferimento al concreto*. Ci si chiede subito quale senso si possa dare a questo appoggiarsi al concreto, a questo « ricorso all'oggetto e all'azione » che servirà, in un secondo tempo, come trampolino per l'astrazione. Ora, è proprio la frase « ricorso all'oggetto e all'azione » che ci indica, sempre partendo dal concreto, due strade distinte: ricorrere all'oggetto significa osservare l'oggetto in quanto tale, con atteggiamento passivo, significa, in breve, ' intuire ' l'oggetto nel

---

* Relazione letta nel terzo Colloquio di Villa Falconieri (Frascati) il 19 marzo 1964 riprodotta da « Archimede », fasc. 4, 1964.

La prof. Castelnuovo ha la cattedra di matematica nella scuola media « Tasso » di Roma.

Nell'immediato dopoguerra dette vita, insieme a Tullio Viola, all'Istituto Romano di Cultura Matematica, organizzando dal 1945 al 1950 incontri settimanali fra professori per studiare nuove metodologie dell'insegnamento matematico. Strinse successivamente maggiori contatti con gruppi di studio di paesi esteri: dal 1949 è attivissima la sua partecipazione a congressi e riunioni in Italia e all'estero.

Dal 1951 è membro italiano della « Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques ». È membro della Commissione Italiana per l'insegnamento della matematica.

Dirige, insieme a Luigi Campedelli, la sezione matematica della Collana « Didattica viva » presso La Nuova Italia. È autrice di due libri di testo per la scuola media: *Geometria intuitiva* e *I numeri* in cui ha voluto proporre nuove metodologie, ispirandosi ai principi della scuola attiva e alle vedute moderne sulla ricerca matematica. Il suo volume *Didattica della matematica* ha ricevuto nel 1964 il Premio dell'Accademia nazionale dei Lincei.

senso etimologico della parola; ricorrere all'azione, invece, significa esperimentare, operare sull'oggetto, significa insomma intuire nel senso attivo, pestalozziano della parola. Per chiarire queste interpretazioni diverse mi permetto di portare un esempio riferendomi ad un concreto molto particolare. Immaginiamo di voler parlare del quadrato a dei bambini di 11 anni. Per arrivare ad una definizione di questo quadrilatero a partire dal concreto si potrà far ritagliare dei quadrati di carta, far osservare lati e diagonali, far citare dagli allievi stessi degli oggetti che hanno forma di quadrati, far guardare le facce di un cubo...; si potrà, anche, far disegnare un quadrato con riga e compasso. Si potrà poi far confrontare il quadrato con altri quadrilateri, come il rettangolo e il rombo, insistendo sui caratteri distinti e su quelli che sono comuni a queste figure. Da tutte queste osservazioni l'allievo dovrebbe essere condotto a dare da solo una definizione; ma una definizione a partire da queste esperienze esigerebbe una facoltà di astrazione capace di cogliere la proprietà caratteristica dal confronto di un numero ben limitato di figure. Ora, un tal processo verso l'astrazione a partire da un certo numero di osservazioni, un bambino di 11 anni non è in generale capace di farlo da solo; si rende allora necessaria la parola dell'insegnante e quindi l'imposizione di una definizione.

Vorrei invece far vedere, sempre a proposito della figura quadrato, come il passaggio dal concreto all'astratto sia reso piú naturale non attraverso osservazioni sull'oggetto ma attraverso operazioni sull'oggetto. Ecco come si può condurre lo studio del quadrato: si danno al bambino delle strisce uguali (tipo meccano) collegabili agli estremi, e gli si dice di costruire il quadrato. Appena avrà fatto questa costruzione si accorgerà da solo che la figura che ha nelle mani può articolarsi, può trasformarsi in rombo (fig. 1).

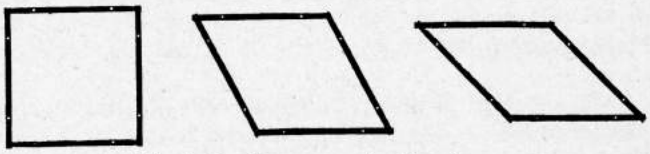

Fig. 1. Quadrato e rombo di strisce.

Il quadrato è dunque un rombo particolare, fa parte della famiglia dei rombi, dell'insieme dei rombi. Nell'osservare gli elementi che non cambiano (gli invarianti) e quelli che cambiano nel passaggio da una figura all'altra, egli arriverà da solo all'intuizione, con un ragionamento ' al limite ', della costanza della somma degli angoli, e, sempre appoggiandosi sul caso limite, si renderà conto che la funzione ' somma delle diagonali ' non è costante, come può sembrare alla prima intuizione. Scoprirà anche un altro fatto che contraddice la sua prima intuizione, e cioè che l'area varia, ed arriverà facilmente alla conclusione che la funzione area raggiunge il massimo nel caso del quadrato.

In modo analogo si può condurre lo studio dell'insieme dei parallelogrammi di cui fa parte il rettangolo.

Nell'esaminare queste figure il bambino ha osservato che sia nel quadrato che nel rettangolo le diagonali sono uguali; dovrebbe essere allora possibile creare un dispositivo per passare dall'una all'altra basandosi appunto sul carattere invariante: le diagonali sono uguali e si dimezzano. Ecco il dispositivo (fig. 2) realizzato con due strisce uguali collegate nel punto di mezzo e con un elastico.

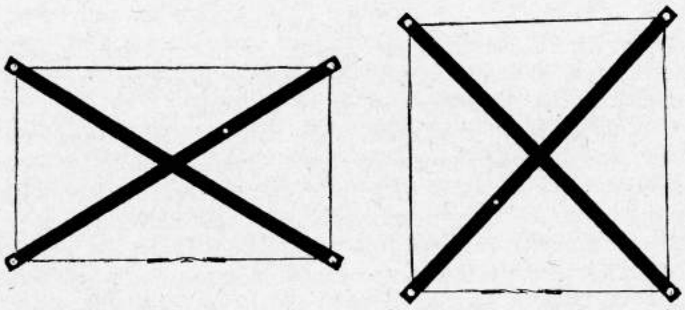

Fig. 2. Rettangolo e quadrato di strisce con perimetro di elastico.

Il quadrato appartiene dunque all'insieme dei rombi, ma appartiene anche all'insieme dei rettangoli; i quadrati costituiscono l'intersezione dei due insiemi.

Il linguaggio dell'*insiemistica*, con l'appoggio dei diagrammi di Eulero-Venn, viene cosí a far parte, in modo naturale, del vocabolario del bambino, cosí come i termini di funzione, di passaggio al limite, di invariante erano entrati a scuola fin dal primo giorno.

Linguaggio dell'insiemistica e diagrammi di Venn varranno anche ad unificare nozioni diverse di geometria, di aritmetica, di scienze naturali, della struttura grammaticale di una lingua, di tutto quanto oggi può dirsi scienza.

Siamo stati trascinati dalla matematica, e piú precisamente dall'operatività sul concreto. Ma vorrei, tornando un momento indietro, fissare l'attenzione sul fatto che non è solo una moderna visione della matematica che ci ha condotto a questa metodologia, ma sono le moderne concezioni pedagogiche — l'intuizione con il significato di costruzione come le fu dato da Pestalozzi —, e le recenti ricerche di psicologia sulla nascita e sullo sviluppo delle strutture mentali del fanciullo (ricerche dovute in gran parte a Jean Piaget e alla scuola di Ginevra) che portano a dare al concreto una funzione essenzialmente operativa: non è il materiale — ci dicono i risultati delle scuole psicologiche — che deve essere oggetto di attenzione ma è l'operazione sul materiale, operazione che, una volta interiorizzata, diviene astratta e assurge a concetto matematico. Matematica, pedagogia, psicologia conducono dunque, per vie diverse, a seguire una stessa linea: quella linea in cui all'oggetto si sostituirà l'azione sull'oggetto, e, quindi, all'ente matematico verranno sostituite delle relazioni fra enti.

Ma facciamo un passo avanti sempre nell'analisi del quadrato; ci troveremo spontaneamente nel mondo delle trasformazioni geometriche.

Si può domandare al bambino che cosa accada dei punti del quadrato quando da quadrato si passa a rombo; egli vi dirà che ai punti del quadrato corrisponderanno punti del rombo, ma, cosí dicendo, egli intende riferirsi ai punti del contorno del quadrato. Si porterà allora la sua attenzione sui punti interni. Ma, immediatamente, sorgerà nella classe una discussione lunga e molto interessante; vi diranno: come è possibile che ai punti del quadrato corrispondano punti del rombo se abbiamo visto che l'area cambia? E penseranno ai punti, sempre piú fitti, piú ravvicinati, a mano a mano che il rombo « si schiaccia ». È impressionante vedere come un bambino di 12 anni arriva da sé a cogliere il passaggio fra concreto ed astratto, e a concludere quindi che il punto matematico non ha dimensioni; e ci arriva non senza un fremito, cogliendo in pieno la grandiosità del concetto.

Ma torniamo ora alla corrispondenza: ad un punto del quadrato deve corrispondere un punto del rombo; si capisce subito che al centro del quadrato, punto d'incontro delle diagonali, corrisponderà il punto d'incontro delle diagonali del rombo. Ma, per gli altri punti? come si potrà trovare il corrispondente di un punto qualunque? C'è sempre piú d'uno in una classe che suggerisce di individuare un punto nel quadrato con due fili tesi fra i lati e paralleli ai lati stessi. Un punto rimane dunque individuato da due coordinate; nasce cosí l'idea del quadrato ' quadrettato '. Quando da quadrato si passa a rombo, le coordinate ortogonali si trasformano in coordinate oblique (fig. 3).

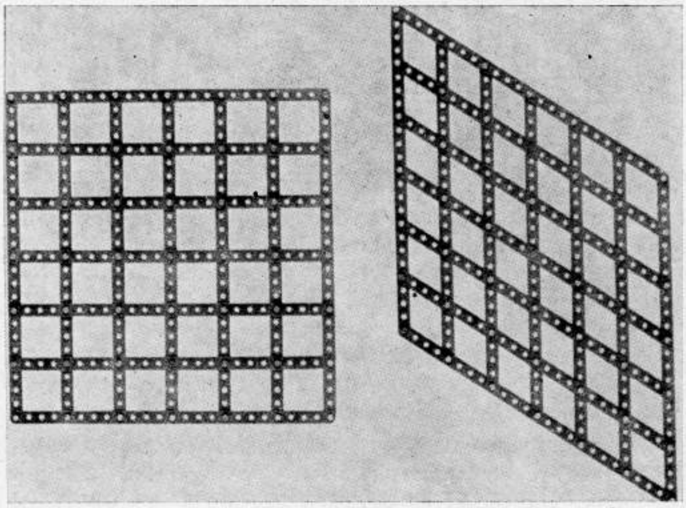

Fig. 3. Due quadrettati di meccano.

Il bambino stesso vi dirà quello che lo colpisce di piú in questa trasformazione: a quadrati corrispondono rombi, a rettangoli (somme di quadrati) corrispondono parallelogrammi, a rette parallele corrispondono rette parallele; e quello che piú l'impressiona è che risulta costante il rapporto fra aree corrispondenti. Questa trasformazione è un'*affinità*.

È interessante trovare le figure trasformate di triangoli, di poligoni di un certo numero di lati, ecc. Ma vi chiederanno subito come si possano trovare le figure trasformate di figure a lati non rettilinei. È allora che ci è venuto in mente di ' rinfittire ' le maglie e di utilizzare una tela in cui le fibre siano ben visibili (fig. 4). Interessanti problemi possono venir suggeriti dall'articolazione di questo telaio; per esempio, in modo molto elementare può calcolarsi l'area dell'ellisse trasformata di un cerchio, considerando il quadrato inscritto nel cerchio e il rombo, trasformato di questo, e quindi inscritto nell'ellisse.

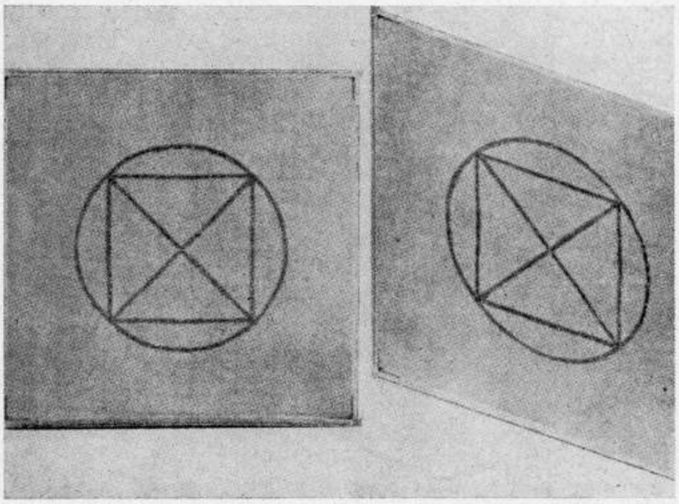

Fig. 4. Due intelaiature con cerchio ad ellisse.

Questi esercizi, di carattere teorico, valgono però a ravvicinare il mondo della matematica pura a quello reale: ed è proprio l'osservazione che un cerchio viene trasformato per affinità in ellisse che fa venire in mente al bambino di avere visto tante volte questa trasformazione; ha spesso la forma di ellisse — vi dirà — l'ombra di un disco circolare data dai raggi del sole.

Saremo allora condotti a parlare delle ombre date da una sorgente puntiforme; ed altre trasformazioni, come la prospettività, entreranno, nel modo piú naturale, a far parte delle conoscenze del ragazzo.

Perché, in effetti, il mondo delle matematiche moderne è molto piú vicino a quello reale del mondo della geometria euclidea dove le figure sono incatenate nei loro elementi rigidi.

Lo studio geometrico dell'affinità, che, come avete visto, nasce spontaneamente a partire dalla considerazione di figure articolate, ci fa riflettere se e come potrebbero introdursi anche nella scuola media delle relazioni atte a fissare analiticamente la corrispondenza. Ci proponiamo nei prossimi anni di studiare la questione [1].

---

[1] Questo problema didattico è stato oggetto di larga sperimentazione nell'anno scolastico 1964-65. Nella prossima edizione del libro *Geometria intuitiva* saranno inseriti tre nuovi capitoli dedicati alle trasformazioni geometriche anche dal punto di vista analitico.

Intanto, quale introduzione alla geometria analitica, sempre a partire dal concreto, abbiamo, fin da questo anno, fatto costruire rette e curve soddisfacenti a determinate condizioni. Ci siamo proposti, per esempio, di studiare perimetri ed aree di rettangoli tenendo fisso uno dei due elementi, e considerando, volta a volta, il cambiamento dell'altro. (Viene mostrato un tabellone, realizzato da bambini di una prima, dove sono attaccati dei rettangoli realizzati in cartoncino e disposti in modo da avere un vertice comune O e due lati lungo due rette perpendicolari, x ed y, uscenti da O; se il perimetro di questi rettangoli è ad esempio di cm 48, ed essi hanno dimensioni diverse, i vertici liberi si disporranno sulla retta di equazione $x + y = 24$. In un altro tabellone sono attaccati dei rettangoli aventi l'area di cm^2 36 e dimensioni diverse, e in tal caso i vertici liberi vengono a disporsi sull'iperbole di equazione $xy = 36$) (fig. 5).

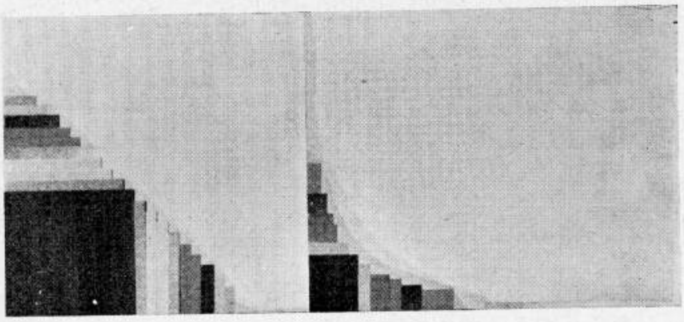

Fig. 5. Scale di rettangoli.

Passiamo ora al secondo punto: *schemi logici che consentono una medesima inquadratura per argomenti diversi.*

Partiamo da cose ben note al bambino di 11 anni: numeri pari e numeri dispari. Sono cose note ma su cui non ha mai fermato la sua attenzione, e su cui lavora, d'altra parte, volentieri, perché riesce da solo a fare delle scoperte. Invitiamolo a scrivere le leggi di composizione additiva e moltiplicativa di questi numeri. Mi limito qua a scrivere, simbolicamente, la legge additiva, indicando con p e d un numero pari ed uno dispari:

+	p	d
p	p	d
d	d	p

Il bambino è colpito subito dal risultato della somma di due dispari; ed è proprio questo risultato che gli fa venire in mente come una regola analoga valga per la composizione di frasi affermative e negative: ad esempio, componendo i verbi « potere » e « trovare », si possono formulare queste frasi: « posso trovare », « posso non trovare », « non posso trovare », « non posso non trovare », e l'ultima frase ha valore affermativo. Questa legge di composizione grammaticale si può simbolicamente scrivere cosí:

o	sí	no
sí	sí	no
no	no	sí

Passiamo ora ad un altro argomento, ben lontano dai precedenti: la composizione di rotazioni e di simmetrie in in un caso molto semplice.

Consideriamo un quadrato e i suoi assi di simmetria. Realizzando materialmente il quadrato (in cartone) ed effettuando le piegature lungo la mediane, il bambino si renderà conto da solo della legge di composizione di rotazioni di 180° e simmetrie ad assi ortogonali (fig. 6). Indicando

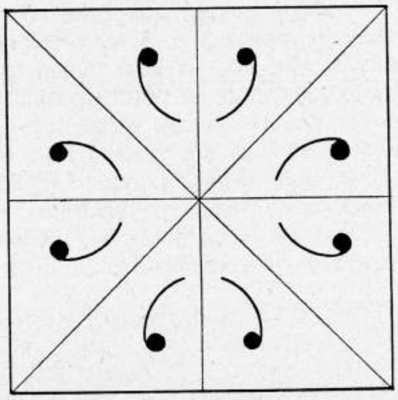

Fig. 6.

con R e con S l'operazione di rotazione e quella di simmetria, si avrà, simbolicamente, la legge:

o	R	S
R	R	S
S	S	R

E, ancora una volta, passiamo ad un altro argomento: il prodotto di due numeri relativi, cioè la cosiddetta regola dei segni. Indicando simbolicamente con P e con N un numero positivo ed uno negativo, si ha lo schema seguente per il prodotto:

o	P	N
P	P	N
N	N	P

Cambiano gli elementi su cui si opera, cambiano le leggi di composizione, ma gli stessi 'motivi' si riaffacciano qua e là in questioni del tutto diverse che si incontrano nel corso triennale.

E vien da chiedersi se sia un fatto puramente estetico, il ripetersi di un motivo, o sia l'intuizione di una delle piú grandi scoperte matematiche che tanto affascina i nostri ragazzetti. Forse è l'uno e l'altro.

Quello che maggiormente colpisce noi insegnanti è il fatto che questioni fuori dubbio astratte sono vissute dal bambino molto piú intensamente di altre che sembrerebbero dovergli essere piú vicine perché concrete.

Ma forse siamo noi che ci sbagliamo: noi le vediamo come astratte, tanto da indicarle sotto il nome di algebra astratta, perché sono molto generali, perché abbracciano gli argomenti piú disparati, mentre, proprio per questo fatto, esse possono adattarsi anche a fenomeni concreti, possono rivestire apparecchiature tecniche, regolando, ad esempio, il passaggio o meno di una corrente elettrica. Anche qui, come abbiamo osservato a proposito delle trasformazioni geometriche, potremo dire che le matematiche moderne sono molto piú vicine al mondo reale, e quindi agli interessi del ragazzo, di quanto non sia un'algebra classica, spesso irrigidita in stretti schemi.

Vorrei che da questa relazione risultassero chiare le idee che il nostro gruppo è andato formandosi sulla base di considerazioni pedagogico-psicologiche, sulla conoscenza delle esperienze che si fanno all'estero, soprattutto nel Belgio, con cui siamo in continuo contatto, e sulla base del lavoro che svolgiamo nel nostro ' laboratorio ' che è la scuola di tutti i giorni: noi riteniamo essenziale introdurre le matematiche moderne nella scuola secondaria inferiore, ma non nel senso di presentare ai bambini una trattazione sistematica dei vari argomenti, dove ogni concetto, ogni nozione, ogni relazione abbia il suo posto definitivo. Vogliamo invece far vivere al ragazzo quel periodo di ansia e di irrequietezza, di lavoro di scoperta e di gioia, che dà la fase di studio precedente; vogliamo fargli provare, attraverso quella operatività sul concreto che egli è in grado di analizzare, l'intimo travaglio del matematico, non tenendogli mai nascosti i nostri dubbi e le nostre incertezze perché sono soprattutto questi piú che la limpida esposizione di una teoria che incitano al lavoro scientifico e che, pertanto, sono altamente formativi.

È evidente quindi che molti e molti argomenti rimarranno imprecisati, tutt'altro che rigorosi, talvolta appena abbozzati, ma sappiamo che quei cenni faranno nascere nei ragazzi il desiderio di indagare ancora.

D'altra parte, come ho detto all'inizio, nostra costante preoccupazione è quella di mettere un ordine fra i tanti argomenti, di raggrupparli, di darne una linea, e noi pensiamo che un vero aiuto nel senso didattico ci venga offerto dalla matematica moderna con la sua potenza unificatrice. È proprio lo spirito delle matematiche moderne, e non una esposizione sistematica, che da parecchi anni cerchiamo di introdurre nella scuola media, quello spirito che predisporrà l'allievo che continua gli studi alla successiva comprensione di un'assiomatica, e che darà all'allievo che termina la scuola dopo il triennio una larga visione dell'unità della scienza.

Esperienze matematiche nella scuola primaria

di Bruno Ciari *

Quel che dirò in forma di resoconto, che vuol esser vivo e concreto, si riferisce al lavoro quinquennale di una classe, e in parte anche al successivo lavoro svolto in una prima. Debbo accennare, sia pure molto sommariamente, ad alcuni presupposti teorici dai quali mi movevo, e ch'erano frutto di alcuni studi ma anche di una certa esperienza.

Un proposito in me era chiaro e intransigente: non preoccuparmi per niente d'incoraggiare abilità esteriori, meccaniche, che non fossero frutto di una ricerca e di una conquista intellettuale, di un effettivo progresso delle facoltà logiche di ordinare, stabilire relazioni, operare nel mondo della realtà e in quello dei simboli. Niente operazioni fatte a orecchio, niente esercizi per dar la polvere negli occhi a chicchessia o stare al passo con quel che si faceva nelle classi parallele. I frutti si dovevan cogliere solo quando fossero stati maturi per davvero; la massima cura doveva esser data al lento processo d'interiorizzazione delle operazioni e di conquista dei simbolismi.

Un secondo presupposto era quello di sempre: la ricerca matematica doveva manifestarsi nel clima della comunità scolastica con perfetta naturalezza, così come si poneva l'esigenza di esprimersi, di giocare, di compiere osservazioni; i problemi, le operazioni, dovevan corrispondere non a espedienti, a occasioni di calcolo che io potevo cogliere, ma a bisogni, a qualcosa che non si poteva eludere anche volendo, poiché era implicito nel nostro fare.

Materiale strutturato non ce n'era. La base di tutto era la vita della comunità; piú questa sarebbe stata ricca di contenuti, piú la dimensione matematica dell'esperienza sarebbe emersa.

* Bruno Ciari insegna nelle scuole elementari di Certaldo. È membro del Movimento di Cooperazione Educativa. È imminente la nuova edizione, presso gli Editori Riuniti, del suo volume *Le nuove tecniche didattiche*.