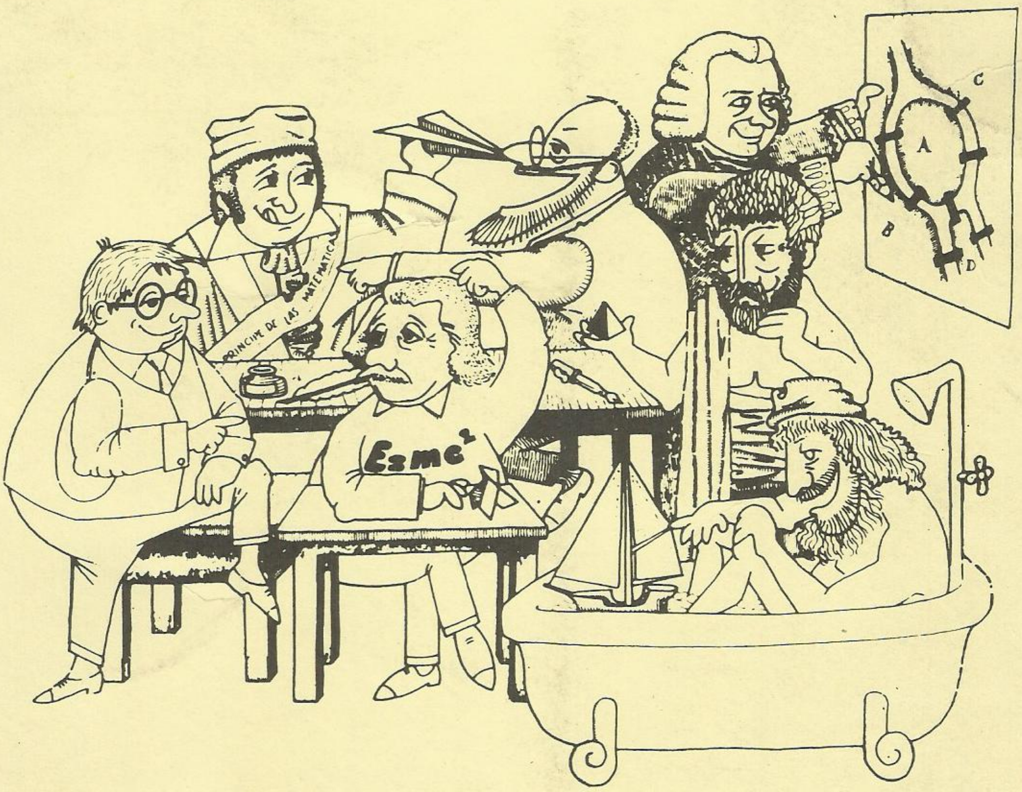
II JORNADAS REGIONALES DE DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS



ZAMORA

8, 9, 10 Y 11 DE SEPTIEMBRE DE 1987

Centro de Profesores
ZAMORA

TEMA : LOS FRACTALES

PONENTE : EMMA CASTELNUOVO

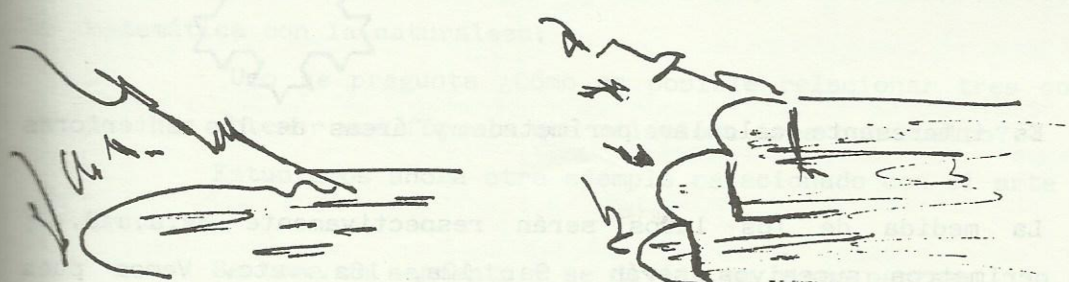
LOS FRACTALES

El tema de los fractales es un tema relativamente moderno. Fué introducido hace doce años, en 1.975, por un matemático franco-alemán MANDELBROT, Profesor de la Universidad de París y que actualmente trabaja en la IBM en los Estados Unidos.

Al oír el tema "los fractales", inmediatamente nos viene a la mente la idea de fracciones o fraccionamiento; en efecto, se estudia una figura que se fracciona sucesivamente repitiendo cada vez el mismo motivo, la misma norma.

Este hecho tiene una fuerte conexión con los fenómenos naturales.

Por ejemplo, en una foto tomada desde un avión de una bahía cualquiera, apenas se aprecia detalle de la costa, pero la misma foto tomada desde una distancia menor, nos descubre que esa bahía está formada a su vez por otras pequeñas bahías.



Si tomamos ahora como ejemplo un arbol, observamos que de cada rama principal parten varias ramas, de éstas a su vez parten otras y así sucesivamente, de manera que cada vez, en pequeño, se va repitiendo el mismo motivo.

En una foto de una zona desértica se observa que las acumulaciones de arena repitan el mismo motivo.

Del estudio de los ejemplos anteriores, vemos que la naturaleza observa una geometría que no tiene nada que ver con la geometría tradicional (cuadrado, rectángulo, cilindro...etc.); son dos cosas diferentes.

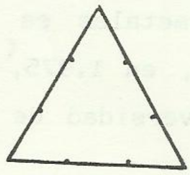
¿Cómo se podrían relacionar las dos?.

No es tan difícil. Vamos a estudiarlo con un ejemplo clásico el del copo de nieve.

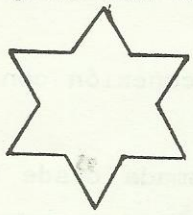
Hay un estudio clásico del copo de nieve, de finales del siglo pasado que no tiene nada que ver con las teorías modernas pero sin embargo ese estudio facilita la comprensión de la matematización del fenómeno natural.

.../..

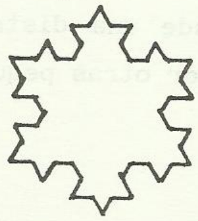
Se parte de un triángulo equilátero y se divide cada lado en tres partes iguales :



Se saca la parte central de cada lado y sobre esa parte se construye externamente un pequeño triángulo equilátero. Así pues los lados del triángulo pequeño son la tercera parte de los lados del triángulo primitivo.



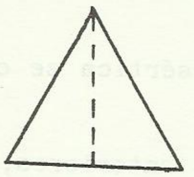
Se sigue el proceso y se llega a la siguiente figura que corresponde a la curva del cristal de nieve :



Es interesante calcular perímetros y áreas de las anteriores figuras.

La medida de los lados serán respectivamente 3a,a,a/3... etc., los perímetros sucesivos serán 9a, 12a, 16a...etc. Vemos pues que el perímetro de la figura límite tiende a infinito.

Veamos ahora lo que ocurre con las áreas de estas figuras. Calculamos el área de la primera figura:



$$A_1 = \frac{9}{4} a^2 \sqrt{3}$$

Al calcular el área de las sucesivas figuras, observamos que éstas forman una progresión geométrica de razón menor que 1. Así pues, en el límite el valor del área será:

$$A = \frac{18}{5} a^2 \sqrt{3}$$

que como podemos ver, no tiene un valor infinito.

Si hallamos la razón entre las áreas,tenemos;

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\frac{18}{5} a^2 \sqrt{3}}{\frac{9}{4} a^2 \sqrt{3}} = \frac{8}{5} = 1'6$$

...//...

Comprobamos que el área de la figura límite supera en poco el valor del área del primer triángulo.

Al calcular el área y el perímetro límite del cristal como de nieve, se produce un fuerte choque entre la intuición y la realidad, al mismo tiempo que se da una paradoja singular : la curva cristal de nieve es una curva cerrada de longitud infinita que rodea una superficie finita.

Estos son estudios clásicos y pasaremos ahora a la teoría moderna de los fractales.

Consideramos únicamente un lado del triángulo y repetimos la operación primitiva

Del lado del triángulo se pasa a una poligonal de 4 partes, es decir, se pasa de tres partes a cuatro.

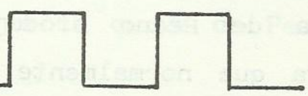
Se continúa el proceso, siempre con el mismo módulo, y se llega a una curva, la curva copo de nieve, que relaciona en cierta manera la matemática con la naturaleza.

Uno se pregunta ¿Cómo es posible relacionar tres con cuatro?. ¿Es posible obtener una fórmula que relacione tres con cuatro?.

Estudiamos ahora otro ejemplo relacionado con el arte clásico: "La greca".

Se toma un segmento y se divide en cinco partes:

sobre las partes a y b se construye la siguiente figura que constituye el friso arquitectónico conocido con el nombre de greca.



Como en el caso anterior, pasamos de un segmento dividido en cinco parte a una poligonal formada por 9. Nos preguntamos ¿Cómo relacionar 5 con 9 ?.

Veamos otro ejemplo. Tomemos un segmento que dividimos en tres partes iguales,

Sobre la parte central se constituye un rectángulo Sobre la parte central se constituye un rectángulo en el que la altura sea el doble de cada parte del segmento, obteniéndose esta figura :

.../..

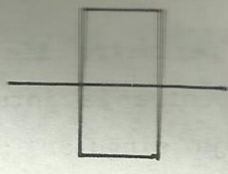
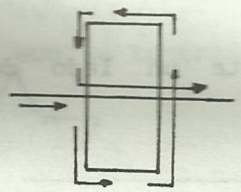
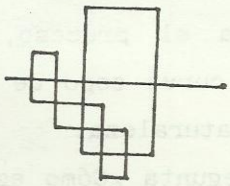


fig. 1

La figura 1 es una poligonal ya que se puede recorrer de principio a fin sin pasar dos veces por el mismo segmento y sin levantar el lápiz

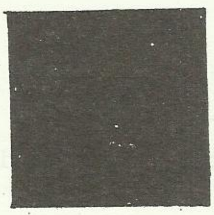


Está claro que se puede repetir ese proceso. Sobre cada pequeño segmento, se construye un pequeño rectángulo y siempre se verifica que se puede recorrer de modo contínuo



Continuando y continuando este proceso, se va hacia una curva clásica famosa : "La curva de PEANO" (1.840).

Si utilizamos un ordenador al que le hemos dado la orden de repetir este proceso anterior indefinidamente, nos encontramos con la siguiente figura :



Esta figura es la conocida curva de Peano.

La curva de Peano produjo una verdadera revolución en el campo matemático, ya que normalmente la dimensión de una curva es uno, dos si se trata de un área, tres si nos movemos en el espacio. Peano demostró que su curva tiene dos dimensiones.

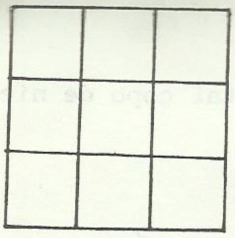
Ahora bien, ¿Cómo se puede demostrar de una forma matemática que la curva de Peano tiene dos dimensiones, es decir, pasa por cada punto del cuadrado?.

Se puede comprobar de la siguiente manera, aunque previamente vamos a comentar algo de su construcción.

Se parte de un segmento que se divide en tres partes y se construye la poligonal de la figura 1 que está formada por 9 trozos.

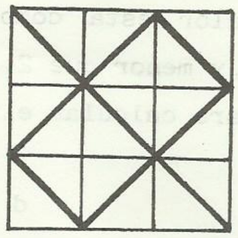
Con la división del segmento en tres, podemos obtener también esta figura :

.../..



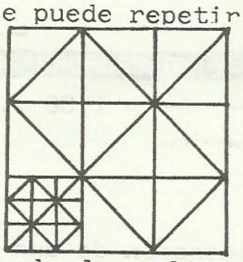
Esta figura está formada por 9 cuadritos iguales, por tanto se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los segmentos y los cuadraditos. Esto nos facilitará mucho la comprensión de que la curva de Peano pasa por cada punto del cuadrado.

Observemos a continuación la siguiente figura :



Nuestra poligonal, que es la línea más marcada, está construída sobre el cuadrado, de modo que el segmento primitivo es la diagonal del cuadrado y cada segmento de la poligonal, es la diagonal de cada cuadradito.

Este proceso se puede repetir sobre cada cuadrito

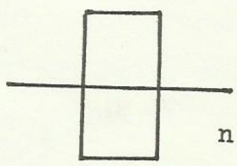


Al límite, cuando la poligonal tiende a la curva, se entiende intuitivamente que la curva pasa por cada punto del cuadrado ya que al límite, cada cuadrado tiende a un punto, su centro; pero al mismo tiempo cada diagonal tiende a su centro, el centro del pequeño cuadrado.

Así pues, comprobamos que la curva de Peano, tiene en efecto dos dimensiones.

Vamos a ver si a través de la curva de Peano se puede llegar a una fórmula

$s = 3$



$n = 9$

en este caso se verifica : $\underline{n = s^2}$

Con este acto de creación matemática, podemos afirmar que el exponente dos, tiene el sentido de o está relacionado con el hecho de que la dimensión de la curva es dos.

Sigamos con este razonamiento para el resto de los ejemplos expuestos anteriormente.

.../..

En primer lugar con el cristal copo de nieve

$n = 4$

$s = 3$

en este caso no podemos afirmar que $n = s^2$ ya que $4 \neq 3^2$. Ahora bien, si queremos relacionar estas dos medidas mediante una igualdad, pondremos:

$$4 = 3^d$$

entendiendo por "d" la dimensión de la curva. En el copo de nieve este valor está comprendido entre 1 y 2, es decir, tiene que ser mayor que 1 y menor que 2.

para calcular el valor de "d", pasamos a los logarítmos y tendremos :

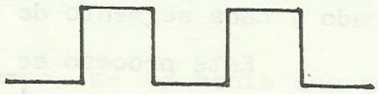
$$d = \frac{\lg 4}{\lg 3} = 1{,}26\ldots\ldots$$

obtenemos así una dimensión fraccionaria, es decir, una curva fractal.

En el ejemplo de la greca :

$n = 9$

$s = 5$



se tiene : $9 = 5^d = = = d = \dfrac{\lg 9}{\lg 5} = 1{,}36\ \ldots\ldots$

Así pues, concluyendo :

> "Cuando la dimensión de una curva construída por dilatación (repitiendo el mismo motivo) está comprendida entre 1 y 2, es una curva fractal".
>
> Benoit Mandelbrot
