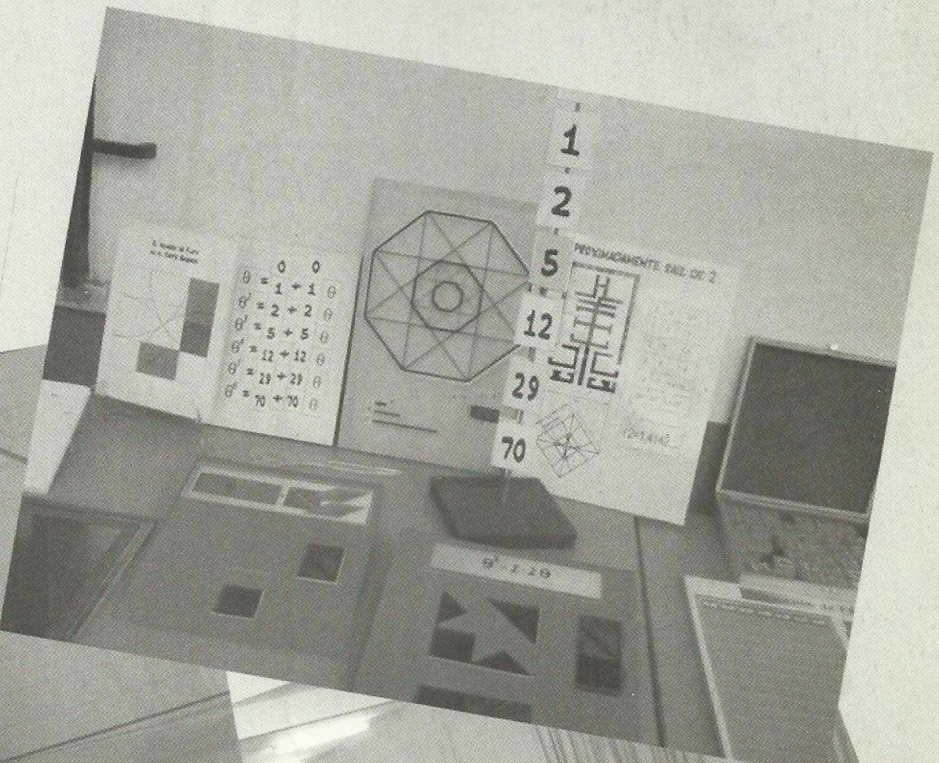
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
"EMMA CASTELNUOVO"

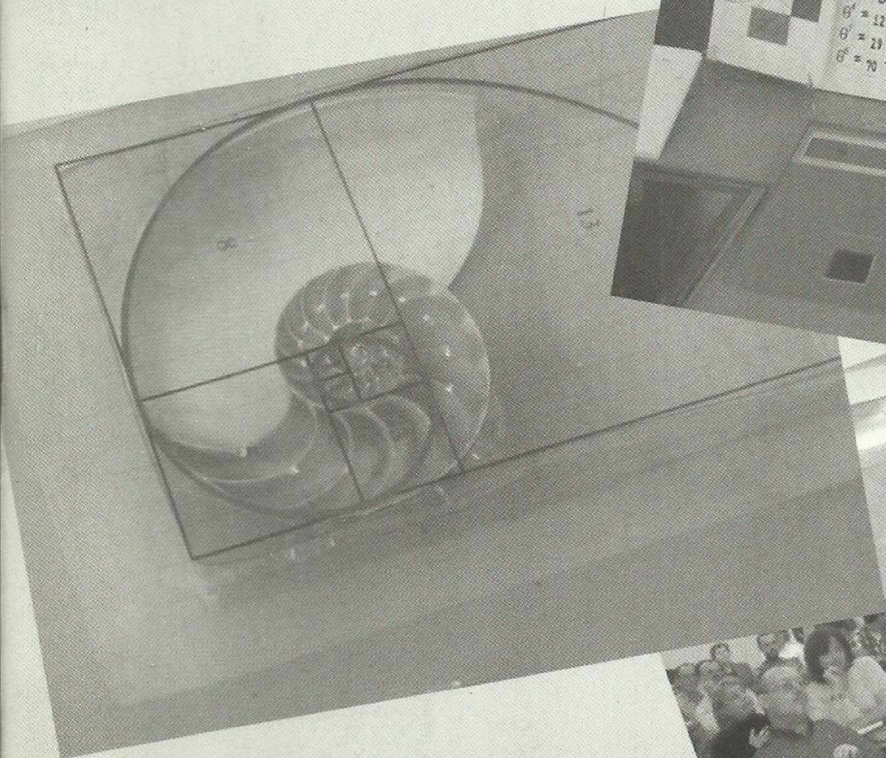
Boletín nº 2 - 3ª Etapa. Noviembre de 2004

www.smpm.es

VI ENCUENTROS DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS



Ponencias



Comunicaciones

Exposiciones

PROPORCIONALIDAD
CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS

Conferencia de Emma Castelnuovo

Quiero decir antes de nada que lo que diré no tiene nada de nuevo.

Quiero examinar las leyes más fáciles, las de la proporcionalidad, desde el punto de vista didáctico. Me refiero a chicos de 12-14 años.

Considero este asunto, más que clásico, desde un punto de vista geométrico, refiriéndome a dos características que conciernen a cada figura: **la forma y la extensión**. Como figura considero el rectángulo.

La forma. Proporcionalidad directa

En nuestros países, España e Italia, típicamente latinos, la gente no tiene en general ideas muy claras sobre la forma de un rectángulo. Dicen: "es cierto que todos los rectángulos tienen la misma forma; en efecto se dice que un objeto tiene forma rectangular". Y estas ideas bastante vagas las tienen también personas cultivadas que no se ocupan de ciencia o de tecnología o de artesanía...

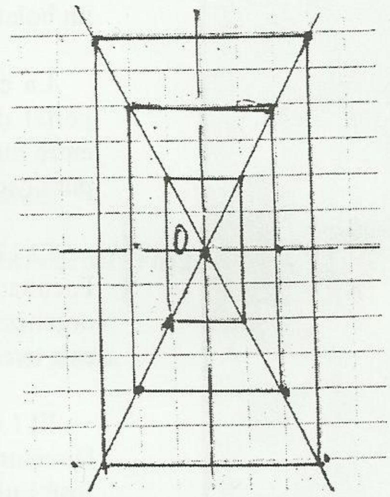
Se debe decir que hace cuatro años la Unión Postal Europea realizó unas clarificaciones: se comunicó, en efecto, que no todos los formatos de sobre podían enviarse como "prioritaria"; por ejemplo no se podían enviar sobres cuadrados. Estas disposiciones tuvieron la consecuencia de decidir que había sobres de dos formatos: "normales" y "largos".

Otra clarificación se debe a las fotocopias más o menos grandes; porque el dibujo más grande tiene la misma forma del original. Por este uso de todos los días, el verbo "agrandar", es decir hacer más grande, ha tomado recientemente el sentido más específico de ser más grande y con la misma forma.

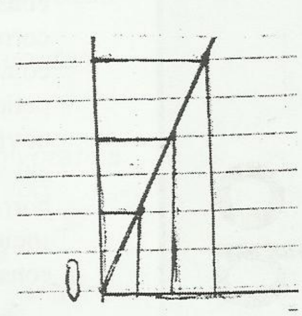
Después de estas reflexiones sobre el lenguaje común, pienso en la enseñanza. Estoy en el aula. Empiezo con una experiencia.

Ilumino un cartón rectangular con una lámpara puntiforme puesta en el centro, y observo su sombra sobre una pared paralela. Acerco y alejo la lámpara del cartón y los rectángulos-sombra, que tiene la misma forma del cartón, son más grandes o más pequeños. Ya este experimento en el aula gusta mucho y estimula la observación, cosa que siempre es difícil.

Para fijar la atención reproduzco en el dibujo algunos de estos rectángulos y evidencio también los rayos que van del centro a los vértices.



Para hacer más fácil la traducción en términos geométricos considero ¼ del conjunto de rectángulos y tengo este dibujo



Estos rectángulos tienen un vértice común y dos vértices que deslizan sobre rectas perpendiculares, mientras el vértice "libre" desliza sobre la recta diagonal de los rectángulos.
Se puede considerar este conjunto de rectángulos de dos modos: uno discontinuo y uno continuo.

De modo discontinuo

Fijo la atención sobre la base y la altura de cada rectángulo y observo que: si la base se duplica, triplica..., la altura también se duplica, triplica... Se abre el capítulo clásico de proporcionalidad directa, un estudio que siempre ocupó una parte importante de la aritmética. Pero hoy día no es fácil encontrar problemas del tipo "si 3,5 Kg. de harina cuestan un euro, ¿cuánto cuestan 4,8 Kg. de la misma harina?"; porque la harina y casi todos los alimentos de este tipo se venden en paquetes ya confeccionados. Ni son los problemas bancarios o los concernientes a los descuentos que se pueden solicitar porque los chicos no se interesan por este tipo de problemáticas.

De modo continuo

El mismo conjunto de rectángulos similares se puede considerar de modo continuo, así: el vértice libre corre sobre una recta por O, siempre con la condición impuesta de esos rectángulos, que la altura es el doble de la base, es decir

$$h = 2 \cdot b$$

Está claro que se pueden dibujar rectángulos similares con la condición

$$h = 3 \cdot b \quad \text{ó} \quad h = 4 \cdot b \; ....$$

Las rectas

$$y = m \cdot x$$

se introducen de modo natural.

Una consideración didáctica: por "natural" entiendo que no se trata de una interpretación gráfica fijada "por fuera". Me explico enseguida con otro ejemplo: cuando se hace el gráfico correspondiente a problema "área del cuadrado en función del lado", es decir,

$$y = x^2$$

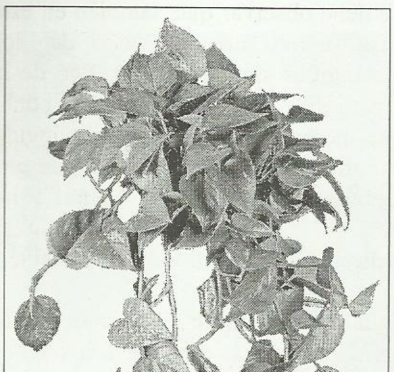
somos nosotros los que establecemos que los valores de los lados están indicados sobre el eje de abscisas y los de las áreas sobre el eje de ordenadas, teniendo de tal modo un arco de parábola. Pero, muchas veces los chicos encuentran dificultades por el hecho de que se interpretan como longitudes.

Otras veces, vamos a confundir las ideas. Ejemplo: en el movimiento uniforme con velocidad v, los espacios están ligados a los tiempos por la ley

$$s = v \cdot t$$

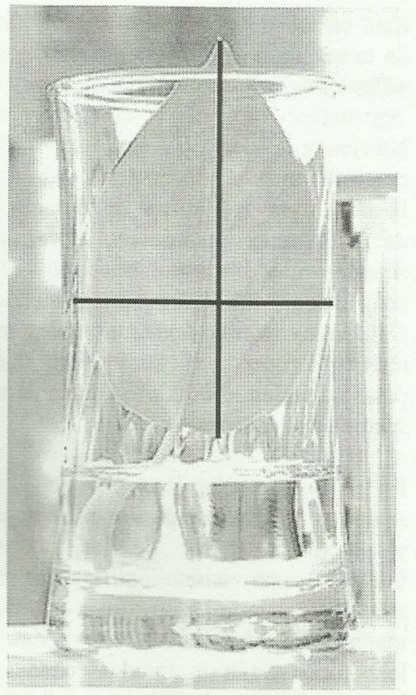
Cuando se representan los tiempos sobre el eje de las x, y los espacios sobre el de las y, se tiene como gráfico una recta que pasa por O. Ahora bien, es muy frecuente que los chicos interpreten esta recta como el espacio, la carretera efectivamente recorrida por el coche.

Por el contrajo, el gráfico de los rectángulos similares y la ecuación de la recta $y = m \cdot x$, resulta fácil porque son los mismos rectángulos los que trazan la recta; no es un gráfico planteado "desde fuera".



Hojas de poto

Esta introducción previa de la geometría analítica, a través de la proporcionalidad, puede adquirir un sentido particular en el campo de la botánica.

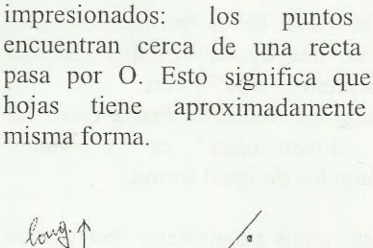


Sucede que las hojas de una misma planta, jóvenes y viejas, tiene al crecer, con muy buena aproximación, la misma forma.

La representación gráfica puede destacar esta propiedad.
Aquí tenemos las medidas de la anchura máxima y de la longitud de unas hojas de rama un poto. Una lista que no dice nada.

Anchura	longitud
2,7	3,45
3	3,6
3,65	4
4,45	4,7
4,5	4,95

Pero si vamos a representar estos números como coordenadas de puntos en el plano cartesiano, estamos impresionados: los puntos se encuentran cerca de una recta que pasa por O. Esto significa que las hojas tiene aproximadamente la misma forma.



Está claro que el discurso se amplía: de la botánica al crecimiento de otros seres vivos.

No sucede en general que el crecimiento se produzca por similitud. Basta pensar en la forma de la cabeza de los recién nacidos y la forma después de unos meses. O, refiriéndose a unas páginas de Galileo, mostrar como los animales no pueden crecer por semejanza, las patas no serían lo bastante fuertes para sustentar el cuerpo.

En mi opinión, ampliando el argumento, nunca se pierde el tiempo, y se da, a partir de las clases inferiores, una visión científica que es más importante que un estudio matemático específico. De otro lado, los chicos están motivados hacia la investigación de otras leyes matemáticas.

La extensión. Proporcionalidad inversa

Dejamos la proporcionalidad directa para estudiar un tema cercano pero opuesto; la proporcionalidad inversa.
Todavía es más difícil encontrar ejemplos de la vida actual que puedan interesar.
Durante años, como ejemplo "real" se llevó lo de los obreros que debían hacer un cierto foso. Decía más o menos así: "si 2 obreros emplean 5 horas para hacer un foso, ¿cuánto tiempo emplearán 60 obreros?"
Reconocemos que problemas de este tipo pueden ser útiles para estimular la fantasía y la realización de viñetas humorísticas...

En el caso de la proporcionalidad directa, una ayuda visual y también conceptual nos vino de los rectángulos donde la razón entre las dos dimensiones es constante: rectángulos de igual forma.

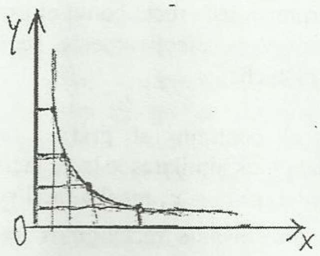
Ahora vamos a considerar rectángulos donde es constante el producto de las dimensiones, es decir rectángulos de igual área.
Si por ejemplo el área, en una unidad dada, es igual a 12, las dimensiones pueden ser: 1 y 12, 2 y 6, 3 y 4...

Vamos a dibujar estos rectángulos equivalentes, como los de igual forma, en el primer cuadrante cartesiano, de modo que tengan el vértice común en O y que dos vértices deslicen a lo largo de los ejes.

Se descubre que el vértice libre describe guanín curva: es un arco de hipérbola. Esta curva, que representa los rectángulos de área 12, es decir, base · altura = 12 se escribe, en símbolos

$$x \cdot y = 12$$

Esta es la ecuación de nuestra hipérbola.



Se debe observar que, también en este caso como en el caso de los rectángulos similares, el gráfico de la hipérbola está dibujado por un punto que pertenece al mismo rectángulo variable. Se trata, por lo tanto, de una representación gráfica "natural": no está fijada "por fuera", sino que es indicada por la misma figura variable.

Esta curva se puede evidenciar con un experimento concerniente a los vasos capilares. Es bien conocido que el principio de los vasos comunicantes no es válido cuando la sección del vaso es inferior a 1 mm^2. Sucede que si el vaso es capilar, el nivel del agua es inversamente proporcional al diámetro del vaso.

Ahora bien, para evidenciar este fenómeno, en vez de tomar tantos vasos con diámetros capilares siempre más pequeños, se puede experimentar de un modo continuo, así: se disponiendo dos placas iguales de vidrio de modo que por un lado estén unidas mientras por el lado opuesto estén separadas poniendo entre las dos unos palillos muy finos.

Es como si este aparato simulase una serie de vasos comunicantes con diámetro que va creciendo desde 0 hasta 1 mm. Si ponemos este aparato en un recipiente lleno de agua (mejor si está coloreada para destacar el fenómeno) se ve que el agua penetra entre las dos placas, pero no se dispone al mismo nivel que tiene el recipiente. Sucede que alcanza una altura mayor por la parte donde las placas están casi unidas, mientras que el nivel del agua baja poco a poco hasta el nivel del agua en el recipiente.

El perfil del agua es una hipérbola, mostrando así la ley de la proporcionalidad inversa. Se trata de un experimento sencillo y muy significativo.

La ley de los vasos capilares toma el nombre de dos médicos; se llama Ley de Jurin-Borelli. Alfonso Borelli era un médico y matemático italiano del siglo XVII y James Jurin era un médico y físico inglés del siglo XVIII.

Pero la ley nace antes, en el siglo XVI con dos estudios del médico alemán Leonhard Furst, conocido por sus importantes trabajos en botánica. Furst había observado que en las plantas que tiene la caña muy fina, el agua se levanta de la tierra a lo largo de la caña hasta llegar a la flor. Furst hablaba de una fuerza de abajo arriba.
Aquí la reproducción de una pintura que se encuentra en su libro de botánica: se trata de una planta de pimienta roja. Furst representa esta planta enormemente más alta que en la realidad; y esto para destacar el fenómeno.

Matemática, botánica, física: una invitación, una vez más, a observar la realidad.

Una vez más para decir que de tal modo se puede dar a nuestros alumnos aquel entusiasmo para el estudio científico que no se encuentra muy frecuentemente en una enseñanza demasiado especializada.

He presentado un tema clásico: la proporcionalidad. Puede ser la ley matemática más antigua. Una ley que cruzó siglos, milenios, penetrando en los países más lejanos y en civilizaciones muy distintas. Y todo esto para ayudar al hombre en sus actividades más variadas.

Problemas de proporcionalidad se encuentran en el más antiguo documento matemático: el Papyro de Rhind del 1650 a.C., en Egipto. Además de problemas sobre pan, cerveza y cantidad de grano, hay algunos que hablan de paga.

Dice un problema: "Un fabricante de sandalias trabaja durante 15 días recibiendo la paga cada 5 días. Si el fabricante hace el mismo trabajo en 10 días, ¿cada cuántos días debe ser pagado?"

Un problema de otro tipo pero siempre concerniente a las proporciones, se plantea en un mapa de la antigua ciudad de Nippur (Babilonia) descubierta durante unas excavaciones. El mapa se remonta al año 1000 a.C. Hablar de todo esto interesa muchísimo a los chicos de hoy en día porque la ciudad de Nippur se encuentra en Irak.

De estos problemas prácticos se pasa a problemas matemáticos en Grecia. Es Thales de Mileto (600 a. C.) a quien se debe la aplicación inolvidable de la proporcionalidad. Thales viaja de Mileto a Egipto por razones comerciales: quiere vender el aceite producido en sus campos. Su viaje se debe por tano a razones comerciales. Impresionado por las pirámides, se siente impulsado a calcular su altura. De comerciante Thales se convierte en Matemático. Tiene la idea de aplicar la proporcionalidad, comparando la altura incógnita de la pirámide con la de un bastón, y medir las dos sombras. Hay, está claro, una proporcionalidad.

Después de Thales, es Arquímedes quien, basándose en la proporcionalidad, crea métodos turísticos para la determinación de áreas.

Sólo tras muchos siglos la proporcionalidad estará al alcance de todos. Es en la India donde, a partir

del siglo VII, se aplicará la proporcionalidad para resolver problemas de comercio, de dinero, de la vida. Esta importancia se debe al hecho de que la India ha sido durante siglos el centro de actividades comerciales. Son los Indios los que dieron a esta regla de oro el nombre de "regla de tres", estableciendo las operaciones necesarias para tener el valor de la incógnita. Sobre problemas de proporcionalidad todos tenían que ejercitarse, no sólo si el problema concernía a temas de dinero. No se debía reflexionar sobre el tema del problema, bastaba aplicar la regla. Se llegó así a proponer problemas como el del cojo. Es del siglo VII, dice: "un cojo recorre 1/8 de un camino en 7 días y medio, ¿qué longitud recorrerá en 3 años y 1/5?"

Y los problemas más absurdos se transmitieron a lo largo de los siglos en las escuelas de todo el mundo....

Quisiera ahora destacar el sentido que, en mi opinión, puede tener el estudio de la proporcionalidad. Me parece que, en un mundo cada vez más complejo, resulta importante hoy, mucho más que ayer, habituar a las nuevas generaciones a captar las conexiones entre "objetos", descubriendo leyes que unen magnitudes diferentes. Y las leyes más sencilla son las de la proporcionalidad.

Su introducción con el apoyo geométrico, es decir, basándose en una geometría pre-analítica, requiere por un lado la observación de la realidad, y, por otro, estimula la investigación matemática hacia otras relaciones, otras leyes.

Es lo que he tratado de hacer proponiendo una luz un poco diferente sobre un tema más que clásico

Madrid, 21 de abril de 2004

Emma Castelnuovo

de Profesores de Matemáticas
Sociedad Madrileña

Emma Castelnuovo

SUMARIO

Edita

S.M.P.M. "Emma Castelnuovo"
C/ Limonero 28
28020 Madrid
Tel/Fax 91/5709403
Web: www.smpm.es
e-amil: : smpm@smpm.es

Equipo de redacción

Antonio Pérez Sanz
Guido Ramellini

Portada y Maquetación

Antonio Pérez Sanz

Imprime

GRAFITES. S. L.
C/ Elfo 76 (posterior). Madrid

Depósito legal
M-36.870 - 1993

I.S.S.N.
1135-8823