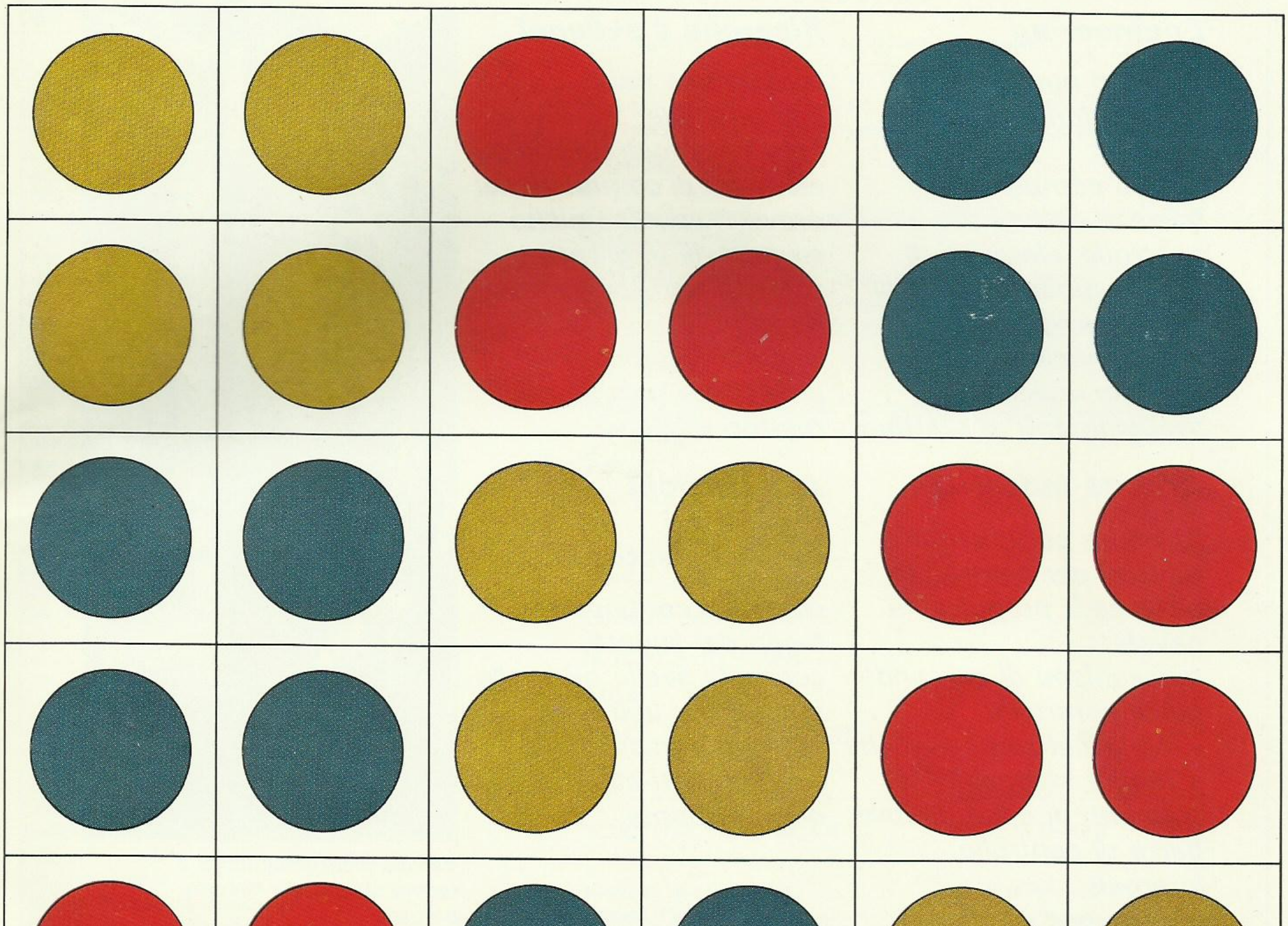
LE SCIENZE

edizione italiana di **SCIENTIFIC AMERICAN**

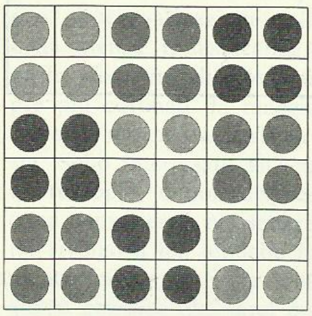


Ragionamento induttivo

Lire Seicento
Febbraio 1970
Numero 18

numero 18
febbraio 1970
anno III
volume III

LE SCIENZE
edizione italiana di SCIENTIFIC AMERICAN



La copertina

Il disegno della copertina (di Alan D. Iselin) è uno schema tipico che può essere usato nel nuovo gioco basato sul ragionamento induttivo e chiamato Configurazioni (*Giochi matematici*, pag. 94). Un giocatore, chiamato Disegnatore, crea una configurazione su una scacchiera sei per sei. Gli altri giocatori cercano di scoprire tale configurazione chiedendo informazioni su alcune caselle, formulando un'ipotesi e controllandola. Il Disegnatore tenta di dare alla sua configurazione una certa simmetria o un'altra forma di ordine in modo che almeno alcuni giocatori siano in grado di individuarla. La configurazione della copertina ha simmetria bilaterale, o speculare, attorno alla diagonale da destra in alto a sinistra in basso.

Articoli

Rubriche

Hanno collaborato:

per le traduzioni
Andrea Bissanti: *I dermatoglifi* e *Le cheratine*; Oriella Bobba: *La registrazione magnetica*; Paolo Di Marco: *Giochi matematici*; Sergio Frugis: *Come cantano gli uccelli*; Michele Lo Buono: *Cosa possiedono i poveri*; Raffaele Petrillo: *I primi abitatori delle Antille*; M. Pirastu: *Scienza in casa.*

per le rubriche
Walter Baier, Ferruccio Berti, Fabrizio Celentano, Giancarlo Lancini: *Scienza e società*; Roberto Magari e Corrado Mangione: *Giochi matematici*; Tullio Albertazzi: *Scienza in casa.*

per le recensioni
Rinaldo De Benedetti, Annamaria Di Marco, Michele Korfias, Daniele Vitale.

LE SCIENZE
edizione italiana di SCIENTIFIC AMERICAN
numero 18
febbraio 1970
anno III
volume III

Le applicazioni del calcolo baricentrico

Il calcolo baricentrico e alcune sue interessanti applicazioni stanno alla base di un originale esperimento didattico condotto dall'autrice in una terza media di una scuola di Roma

di Emma Castelnuovo

Il lettore sarà certamente sorpreso di trovare in una rivista come « Le Scienze » il resoconto di un esperimento didattico condotto in una scuola media. Si tratta è vero, come si avverte dal sotto-titolo, di un argomento di matematica, ma è pur sempre una matematica a livello di ragazzi di 13-14 anni.

Rispondo subito alle perplessità illustrando brevemente in che cosa consiste un lavoro di questo genere. Un esperimento di didattica della matematica si svolge in tre fasi: le prime due riguardano esclusivamente il professore. Si tratta, prima di tutto, di scegliere un argomento che viene ritenuto particolarmente formativo e di « farlo proprio », approfondendone le origini e seguendone gli sviluppi; questo è il lavoro della prima fase. L'argomento deve poi essere portato al livello delle capacità comprensive di allievi di una certa età, ed è in questa seconda fase che si esplica « l'intuizione didattica ». Vi è poi la terza fase, e questa si attua in classe comunicando agli allievi: vengono colte le difficoltà, gli interessi, le reazioni insomma. Il ragazzo non si accontenta mai della nostra spiegazione; molto spesso ricrea e, in questa sua ricostruzione, semplifica: la sua mente infatti, libera da preconcetti, da quella cultura che troppo spesso ci vincola a schemi fissi, segue la via diretta rendendo semplici, evidenti, dei passaggi che avevamo legato ad algoritmi algebrici. Quest'ultima fase è fuori dubbio la piú interessante: è una ricostruzione della teoria condotta in gruppo, ed è bello pensare che questo lavoro svolto in collaborazione porta molto spesso l'insegnante a ricreare le sue lezioni per i suggerimenti spontanei e geniali dati dai suoi piccoli allievi.

E ancora una domanda, e questa da parte del lettore piú vicino alla scuola: « Un argomento nuovo? perché? non è già troppo pesante il programma di matematica nella scuola media? e, dove si trova il tempo? » Tre ore di matematica alla settimana in classi di 25-30 allievi non sono davvero molte se vogliamo che tutti seguano, se, insomma, nessuno deve « perdersi » per strada.

Voglio rispondere cominciando dal « tempo a disposizione ». Per procurarsi del tempo, occorre trascurare qualcosa, è evidente. Ora, secondo me, vi è tutta una parte che si può trascurare, anzi che è bene trascurare: sono quelle tristemente famose espressioni aritmetiche che, da anni, hanno « invaso » la scuola italiana. Non si insegna la matematica facendo calcolare espressioni frazionarie « a piú piani » magari soffocate da un segno di radice quadrata; in questo modo, si addestrano gli allievi a un tecnicismo operatorio, utile – se si vuole – solo allo scopo di preparare bene a un corso *mal fatto* di una scuola superiore. Liberandosi da questo « drill » si acquista molto tempo nei tre anni di scuola media, e, cosa ancora piú importante, si acquistano « teste » capaci di pensare.

In una scuola media, uguale per tutti, la finalità didattica deve essere duplice: dare la possibilità a chi non continuerà gli studi di essere in grado di situare un problema scientifico al suo posto, di giudicare obiettivamente un fatto empirico, sia esso un fenomeno naturale, economico, sociale, e, nello stesso tempo, aprire le porte a uno studio piú approfondito e piú particolareggiato che sarà svolto in un corso superiore. Preparare dunque, gli uni e gli altri, a pensare criticamente.

Tralasciando gli artificiosi algoritmi numerici si acquista – come ho detto – del tempo. È cosí che ogni anno, e vengo adesso a parlare del mio insegnamento, svolgo qualche argomento « in piú » in tutte le mie classi.

Io insegno in una scuola media di Roma. Nello scorso anno scolastico ho voluto tentare nelle mie due terze classi (allievi di 13-14 anni) un grosso argomento: il calcolo baricentrico. Si tratta di una teoria che è legata sia alla geometria sia alla meccanica e le cui origini vanno cercate molto lontano: nei lavori di Archimede sull'equilibrio della leva.

Questo articolo segue, passo passo, lo studio che abbiamo fatto in classe durante tre mesi e, alla fine, cerca di trarre dall'esperimento delle conclusioni e delle idee per un programma futuro; conclusioni e idee che troverete espresse in forma semplice e spontanea: sono prese infatti da qualche osservazione che i ragazzi hanno scritto in una prova finale di matematica.

L'argomento svolto si compone di due parti, la prima dedicata alle basi del calcolo baricentrico, la seconda ad alcune applicazioni.

Parte prima: il calcolo baricentrico

Alla base della trattazione del calcolo baricentrico vi è la ben nota legge di equilibrio della leva (*si veda la figura in alto in questa pagina*), legge che i ragazzi avevano già incontrato come esempio di proporzionalità inversa.

Il punto P attorno a cui si equilibria la sbarretta sospesa è ovviamente il baricentro del sistema; in questo punto è concentrato il peso somma dei due pesi m_1 e m_2 (*si veda la figura in basso in questa pagina*). In verità si dovrebbe sostituire al peso la massa al fine di rendersi indipendenti dal campo gravitazionale, ma molto spesso ho preferito far riferimento al peso in modo da eccitare l'intuizione degli allievi.

In seguito ho introdotto, in modo del tutto naturale, la notazione

$$m_1A_1 + m_2A_2 = mP$$

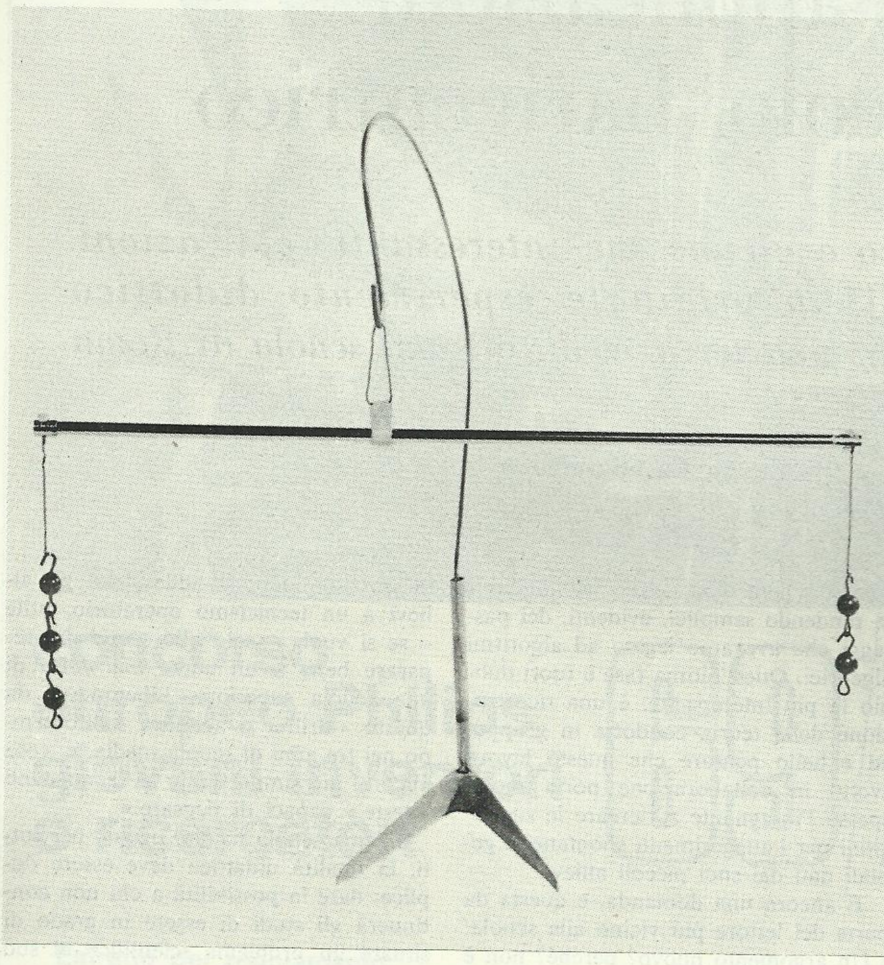
(una massa moltiplicata per un punto) per indicare la massa concentrata in quel punto. Per esempio, il fatto che il baricentro del sistema $2A_1 + 3A_2$ è un punto P in cui è concentrato un peso 5 si scrive brevemente

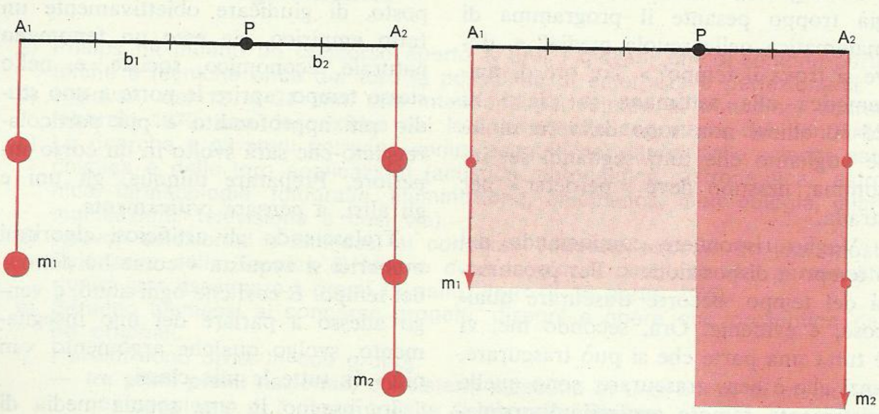
$$2A_1 + 3A_2 = 5P.$$

Il punto P divide la sbarretta in due parti b_1 e b_2 tali che $b_1 : b_2 = 3 : 2$.

Ora, è evidente che l'equilibrio non è alterato se si raddoppiano contemporaneamente i due pesi m_1, m_2, o se si moltiplicano entrambi per un numero qualunque. Dunque, in generale, a ogni punto P di un segmento A_1A_2 si può far corrispondere un'infinità di coppie equivalenti. Perché rimanga individuata una coppia si fa la convenzione di scegliere m_1 e m_2 in modo che la loro somma sia uguale a 1; con questa condizione m_1 e m_2 sono le coordinate baricentriche del punto P: le coordinate baricentriche sono dunque dei pesi. Nel caso precedente, le coordinate baricentriche di P sono $2/5$ e $3/5$; la somma di queste due frazioni è infatti uguale a 1.

Ora tutto questo, che una persona adulta accetta senza fare nessuna obiezione, ha sollevato una vera problematica da parte dei ragazzi. In effetti – e basta ricordare le ricerche dello psicologo Jean Piaget a proposito dell'equilibrio della leva – questa legge segna il passaggio dalla logica del bambino a quella dell'adolescente, e riguarda pertanto l'età dei nostri allievi. I bambini, infatti, sono condotti a sostituire la legge additiva (peso + braccio) alla legge moltiplicativa. Quando arrivano a capire che è la legge moltiplicativa che dà l'equilibrio, sentono il bisogno di rendersene conto con dei mezzi che non siano solamente sperimentali, « tanto piú – ha detto qualcuno – che se si viaggia verso la Luna, il peso non ha piú significato ». Guardando ancora una volta la sbarretta in equilibrio sono condotti a sostituire la sensazione fisica con la visione geometrica: « Si ve-





Apparecchio impiegato per illustrare la legge di equilibrio della leva (*in alto*) e rappresentazione schematica di una sua applicazione. Lo schema a sinistra in basso rappresenta il problema della leva in forma schematica e illustra anche i dati del problema. Lo schema a destra in basso mostra invece come i ragazzi « interpretano » l'equilibrio della leva passando da una verifica geometrica e una verifica fisica: i due rettangoli in colore hanno area uguale e pertanto la leva rimane in equilibrio.

dono dei rettangoli sospesi – dicono – e perché ci sia l'equilibrio quei rettangoli devono avere la stessa area ».

Il triangolo baricentrico

Siamo passati ben presto dalla retta al piano: dalla sbarretta a un triangolo « senza peso », realizzato con un reticolato a maglie fitte. Abbiamo applicato dei pesi ai tre vertici e abbiamo sospeso il triangolo, come si vede nella figura in questa pagina. Si è visto che se i pesi sono uguali, per esempio uguali a 1, il baricentro si trova in una posizione particolare che abbiamo determinato basandoci due volte sulla legge della leva: se il triangolo è ABC, si determina infatti prima il baricentro $2D$ fra $1A$ e $1B$, e poi il baricentro $3P$ fra $2D$ e $1C$.

Il punto P che abbiamo determinato è il baricentro di tre pesi uguali ed è anche, da un punto di vista geometrico, il centro di figura del triangolo. Ora, se applichiamo ai tre vertici dei pesi diversi, il baricentro, cioè il punto a cui si deve sospendere il triangolo perché sia in equilibrio, non si troverà piú nella posizione precedente. Accade dunque che, per ogni terna di pesi applicati ai vertici, esiste un punto e uno solo tale che il triangolo, sospeso per questo punto, resti in equilibrio.

Al fine di fissare una corrispondenza biunivoca fra ogni punto del triangolo e una terna di masse m_1, m_2, m_3 si fa la solita convenzione:

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1.$$

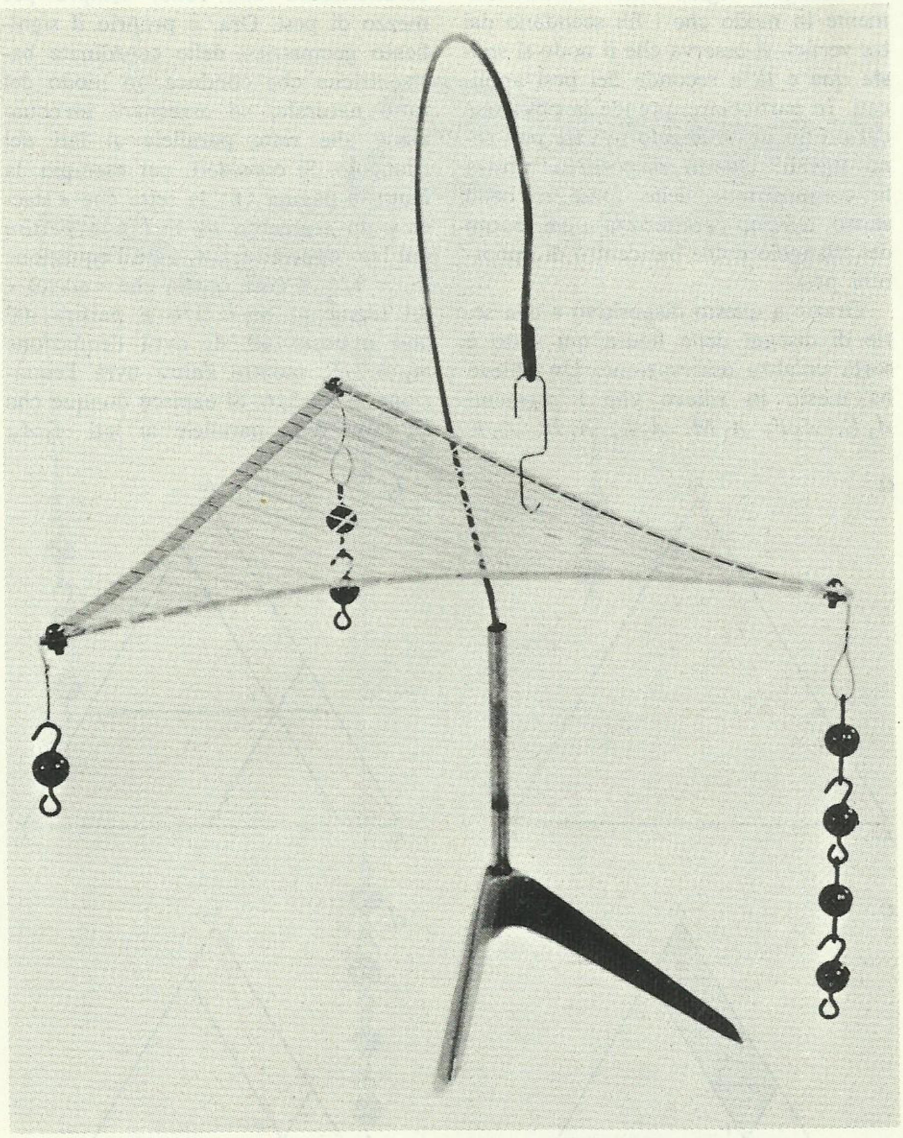
Le tre masse, con questa condizione, sono le coordinate baricentriche di un punto P del triangolo. Le coordinate baricentriche sono dunque dei pesi anche nel caso del triangolo.

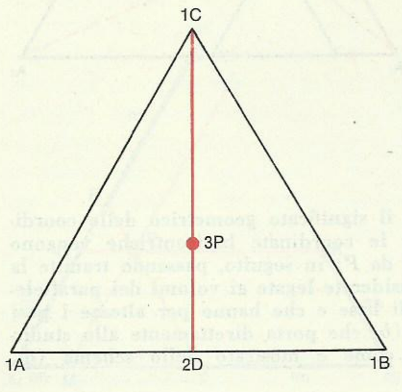
Ora, proprio come era accaduto per la sbarretta, i ragazzi non sono soddisfatti dal solo significato fisico. Tutti sostengono che le coordinate baricentriche devono essere legate alle distanze PA_1, PA_2, PA_3 del punto P dai tre vertici *(si veda la figura a pagina 14)*; « se il peso m_1 è piú grande, la distanza PA_1 è piú piccola », dicono i ragazzi. Viene spontanea l'idea di una proporzionalità inversa. Ma qualcuno osserva che non vi è un rapporto costante perché riducendo m_1 alla metà, pur mantenendo sempre uguale la somma dei tre pesi, non è vero che la distanza PA_1 diventi il doppio.

Allora altri pensano alla leva ma, ragionando per analogia, cadono ancora una volta in errore.

Una ragazza dice: « Vedo tre rettangoli sospesi che hanno per base la distanza di P da ogni vertice e per altezza i pesi "stilizzati" in vettori ». « Guardiamo » questi tre rettangoli sospesi, e sul momento abbiamo l'impressione che l'idea dell'allieva sia esatta. Ma poi qualcuno dei ragazzi ci fa capire che siamo ancora in errore: diamo dei valori ai pesi, applichiamo il teorema di Pitagora per determinare le lunghezze PA_1, PA_2, PA_3, calcoliamo l'area dei tre rettangoli che, ovviamente, non risultano uguali!

Durante queste discussioni un ragazzo aveva fatto alla lavagna il disegno (b) a pagina 14 che suggerisce ai compagni due idee. Uno dice: « Ecco, siamo nello spazio; non può dunque trattarsi di aree uguali ma di volumi ». E ci fa vedere, valendosi del disegno (c), che sono uguali i volumi dei tre parallelepipedi aventi come basi i parallelogrammi con diagonali PA_1, PA_2, PA_3, e per altezze i vettori che rappresentano i pesi applicati rispettivamente ad A_1, A_2, A_3.





Triangolo « senza peso » impiegato per illustrare il calcolo baricentrico nel piano. Il triangolo consente la composizione di tre pesi, per cui a ogni punto del triangolo viene a corrispondere una terna di coordinate baricentriche. Nel caso in cui i tre pesi applicati ai vertici sono tutti uguali, il baricentro del triangolo risulta essere proprio il centro geometrico di figura (*schema a sinistra*).

È lo stesso disegno che suggerisce ad altri compagni un'interpretazione fisica: è come se il punto A_1 fosse tirato da una corda verso A_2 con una forza uguale a 1, e verso A_3 con una forza uguale a 2. Siamo stati cosí condotti a studiare la composizione delle forze, dei vettori. Un ragazzo ha realizzato il dispositivo illustrato nella figura a pagina 15: tre fili legati con un nodo portano all'estremità libera dei pesi; se sovrapponiamo questo sistema di fili a un triangolo rigido tenuto orizzontalmente in modo che i fili scendano dai tre vertici, si osserva che il nodo si sposta qua e là a seconda dei pesi applicati. In particolare, prende la posizione del centro del triangolo se i tre pesi sono uguali. Questo dispositivo mostra la composizione delle forze e, nello stesso tempo, caratterizza ogni punto del triangolo come baricentro di opportuni pesi.

Grazie a questo dispositivo e alla serie di disegni della figura qui sotto è sorta un'altra osservazione. Un allievo ha messo in rilievo che i segmenti A_3E, A_2F, A_1M, A_3L, A_1H, A_2K indicano graficamente il valore dei pesi m_1, m_2, m_3. È questa l'interpretazione classica (data da A. F. Möbius) del significato geometrico delle coordinate baricentriche.

L'equazione di una retta

Abbiamo dunque visto che a ogni punto del triangolo corrispondono tre pesi, le tre coordinate baricentriche. Viene naturale chiedersi come si possa caratterizzare una retta, sempre per mezzo di pesi. Ora, è proprio il significato geometrico delle coordinate baricentriche che conduce, in modo del tutto naturale, ad assegnare un'equazione alle rette parallele ai lati del triangolo. Si consideri, per esempio, la figura a pagina 16: la retta che « stacca » un segmento $m_1 = 1/6$ a partire dal lato opposto ad A_1 avrà l'equazione $m_1 = 1/6$; e cosí, quella che « stacca » un segmento $m_2 = 2/6$ a partire dal lato opposto ad A_2 avrà l'equazione $m_2 = 2/6$, mentre l'altra avrà l'equazione $m_3 = 3/6$. Si capisce dunque che le varie rette parallele ai lati A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 hanno rispettivamente per equazione $m_1 = k$, $m_2 = h$ e $m_3 = l$.

Ma è molto piú interessante trovare l'equazione di queste rette, o di una retta generica basandosi su considerazioni fisiche: esprimendo cioè la condizione di equilibrio di un triangolo materiale che resta in equilibrio su un asse, come se si trattasse di una lama di coltello. La fotografia a pagina 16 mostra appunto un triangolo di legno che è in equilibrio su un'assicella molto sottile; vogliamo determinare l'equazione della retta « profilo » dell'assicella. Ecco il ragionamento che viene spontaneo: se il triangolo deve bilanciarsi sulla retta r, una parte m_3' del peso m_3 deve equilibrare il peso m_1, mentre l'altra parte m_3'' deve equilibrare il peso m_2. È proprio come se il triangolo si componesse di due leve: la leva A_3A_1 e la leva A_3A_2. Scriviamo allora l'equazione d'equilibrio per le due leve; si avrà che $m_3' \cdot 2 = m_1 \cdot 3$ e $m_3'' \cdot 3 = m_2 \cdot 1$, da cui si ha facilmente $m_3' = 3/2\, m_1$ e $m_3'' = 1/3\, m_2$. Sommando membro a membro si ottiene infine l'equazione della retta r

$$6m_3 = 9m_1 + 2m_2.$$

Bisogna notare che per stabilire l'equazione di una retta si poteva anche basarsi sulla nozione di momento assiale, liberandosi poi da questa nozione metrica con delle considerazioni sulla similitudine dei triangoli, considerazioni che permettono di sostituire alle distanze dei tre vertici dalla retta i segmenti determinati da questa retta sui lati. Seguendo questa via, invece di dividere un peso, si è condotti ad « alterare » i bracci. Nel caso precedente, i bracci di m_3, A_3P e A_3Q, vengono ridotti allo stesso numero di parti uguali, cioè 6; i bracci di m_1 e m_2 saranno allora composti rispettivamente di 9 e 2 parti. Suddividendo i lati in questo modo, si potrà allora, con un semplice sguardo alla figura, scrivere direttamente l'equazione della nostra retta r

$$m_3 \cdot 6 = m_1 \cdot 9 + m_2 \cdot 2.$$

Rette parallele

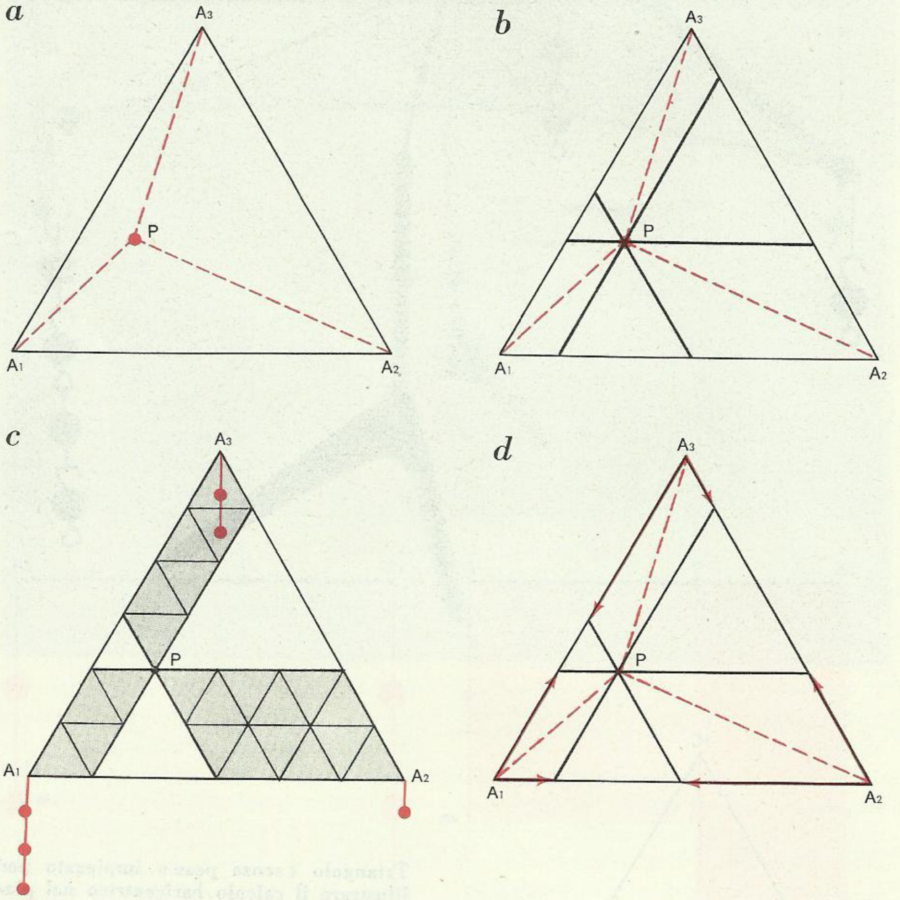
Avevamo osservato con i ragazzi, a proposito delle rette parallele ai lati, che la forma non omogenea dell'equazione indica se due rette sono parallele; per esempio le rette $m_3 = 1/4$ e $m_3 = 3/4$ sono parallele: le equazioni differiscono infatti solo per il termine noto. Lo stesso avviene per rette in posizione generica. Per esempio, la retta d'equazione

$$6m_3 = 9m_1 + 2m_2$$

può scriversi, eliminando m_3 (dato che $m_1 + m_2 + m_3 = 1$), cosí:

$$15m_1 + 8m_2 = 6$$

Il termine noto ha un significato geo-



Ecco come i ragazzi giungono a « visualizzare » il significato geometrico delle coordinate baricentriche del triangolo. Dapprima (*a*) le coordinate baricentriche vengono considerate come legate alle distanze dei vertici da *P*; in seguito, passando tramite la fase (*b*), le coordinate baricentriche vengono considerate legate ai volumi dei parallelepipedi che hanno tali distanze come diagonali di base e che hanno per altezze i pesi « stilizzati » in vettori (*c*). È sempre lo schema (*b*) che porta direttamente allo studio della composizione delle forze e dei vettori, come è mostrato nello schema (*d*).

metrico: indica che la retta ha subito una traslazione di « 6 » a partire da A_3 (*si veda la figura a pagina 17*). Risulta allora immediato scrivere l'equazione di una retta qualunque parallela a questa; per esempio le parallele passanti per A_1, A_2, A_3 avranno rispettivamente le equazioni:

$$15m_1 + 8m_2 = 15$$
$$15m_1 + 8m_2 = 8$$
$$15m_1 + 8m_2 = 0.$$

In generale, l'equazione di una generica retta parallela alla retta passante per A_3 e di equazione $am_1 + bm_2 = 0$ avrà la forma $am_1 + bm_2 = k$.

Disequazioni e semipiani

È chiaro che abbiamo passato molte lezioni lavorando sulle equazioni delle rette: si scriveva l'equazione di una retta e si controllava l'equazione con la esperienza fisica, cioè verificando se il nostro triangolo di legno si bilanciava effettivamente sulla lama di coltello corrispondente alla retta; oppure si seguiva il cammino inverso: si eseguiva prima l'esperienza e poi dai dati sperimentali si passava all'equazione.

Si aveva cosí davvero l'impressione di veder nascere l'equazione come condizione d'equilibrio. Se capitava in classe qualche professore « ospite », i ragazzi, per mostrare la semplicità con cui costruivano le equazioni delle rette, partivano da un caso particolare: una retta passante per uno dei vertici. Appoggiando il loro ragionamento su un disegno come quello della figura a sinistra a pagina 18, risultava chiaro che perché il triangolo si bilanciasse sulla retta r, i pesi m_2 e m_3 dovevano essere uguali; dunque l'equazione della retta r risultava $m_2 = m_3$.

Proprio a proposito di questo ragionamento, una volta ho posto la domanda: « E se fosse m_2 maggiore di m_3? » La risposta è stata immediata: « È evidente che il triangolo penderebbe dalla parte di A_2 ». Dunque, la disequazione $m_2 > m_3$ caratterizza il semipiano contenente A_2. Cosí come la disequazione $m_2 < m_3$ caratterizzerà il semipiano contenente A_3.

Queste considerazioni d'ordine fisico sono valevoli evidentemente per una retta qualunque. E precisamente, la retta r della figura a destra a pagina 18, rappresentata dall'equazione

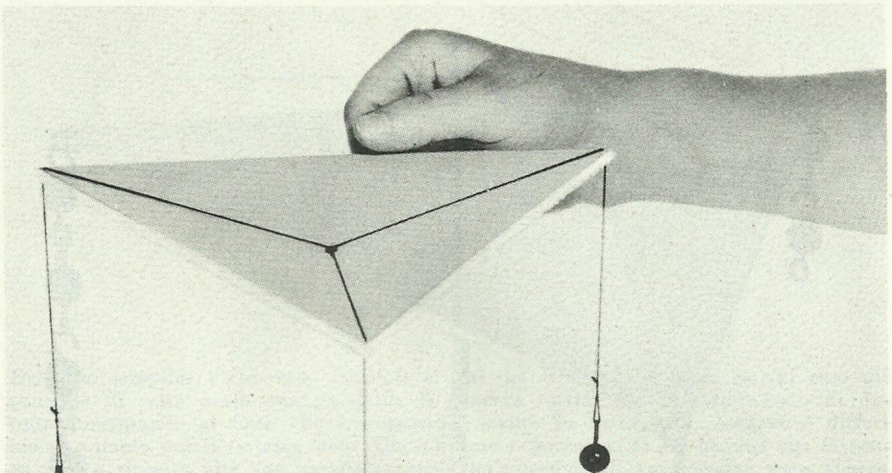
$$2m_1 = 3m_2 + 5m_3$$

divide il piano in due semipiani a ciascuno dei quali corrisponde una disequazione. Per esempio, la disequazione $2m_1 > 3m_2 + 5m_3$ caratterizza il semipiano contenente A_1 perché, se vale questa disequazione, il triangolo tracolla dalla parte di A_1; la disequazione opposta caratterizzerà il sempiano contenente A_2 e A_3.

Parte seconda: qualche applicazione

La prima parte del mio esperimento a scuola ha preso piú tempo di quanto non avessi pensato per via delle tante e diverse questioni che si presentavano ogni momento alla mente dei ragazzi: il significato fisico e quello geometrico si sovrapponevano qualche volta, altre volte sembravano essere in contraddizione, altre volte ancora si chiarivano uno per mezzo dell'altro, e, in tutti i casi, mettevano in evidenza le diverse attitudini e sensibilità degli allievi.

Quanto alla seconda parte, credo davvero che saremmo ancora là a lavorare insieme se la scuola non fosse terminata! Non mi era mai capitato di vedere dei ragazzi cosí impressionati: ho avuto la sensazione che le varie questioni che abbiamo studiato li fa-



Questo dispositivo ideato da uno dei ragazzi mostra la composizione di tre pesi e permette anche di dimostrare in maniera evidente come a ogni punto del triangolo corrisponde una terna di coordinate baricentriche (cioè di pesi). Lo schema a sinistra mostra come i segmenti « staccati » sui lati del triangolo corrispondano al valore dei pesi.

cessero diventare piú grandi, piú maturi, piú consapevoli. Questa seconda parte è stata dedicata alle applicazioni: probabilità; programmazione lineare; colorimetria.

Probabilità

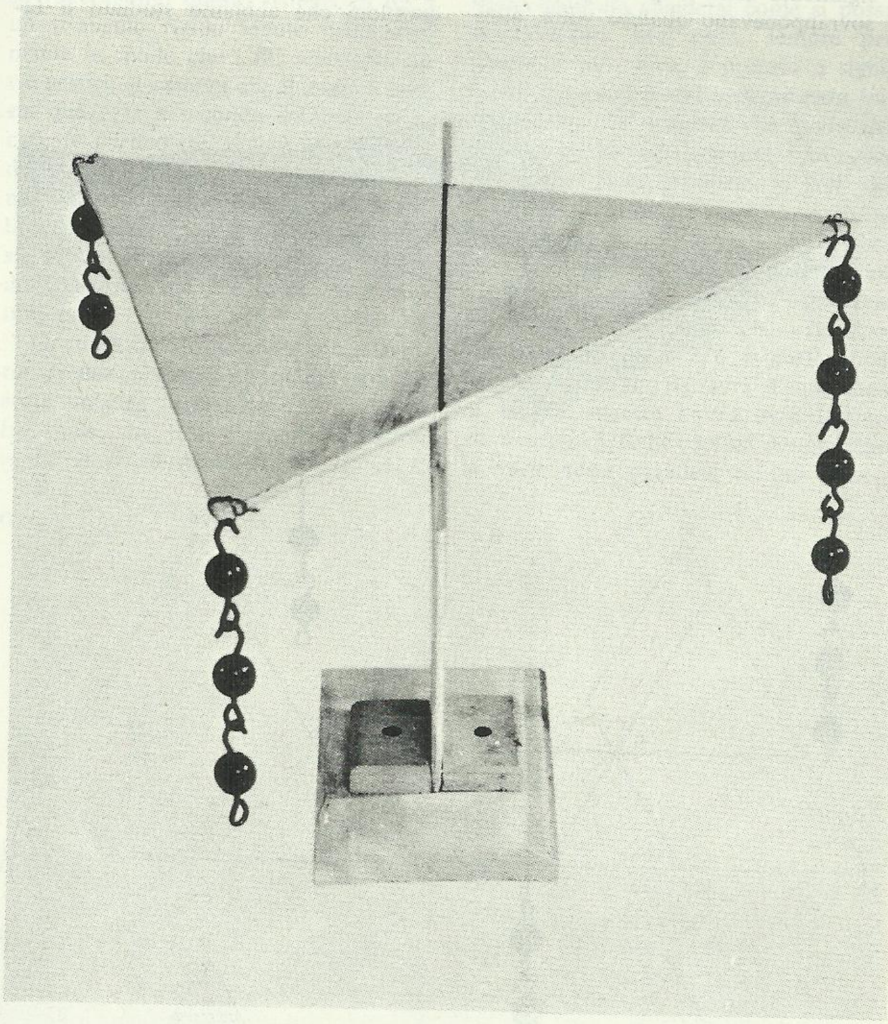
Ho cominciato col dare qualche esempio di probabilità (la probabilità che lanciando un dado si presenti questa o quella faccia, che la somma dei numeri che si ottengono lanciando due dadi abbia un certo valore e cosí via) al fine di condurre i ragazzi a « sentire » la probabilità di un evento come rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili. Poi, con qualche esempio (in particolare quello sulla probabilità che il prossimo nascituro sia maschio o femmina), sono passata alla nozione di probabilità statistica. Tutto questo molto brevemente; non avevo molto tempo, e volevo arrivare al piú presto a risolvere qualche questione di probabilità con l'aiuto del calcolo baricentrico.

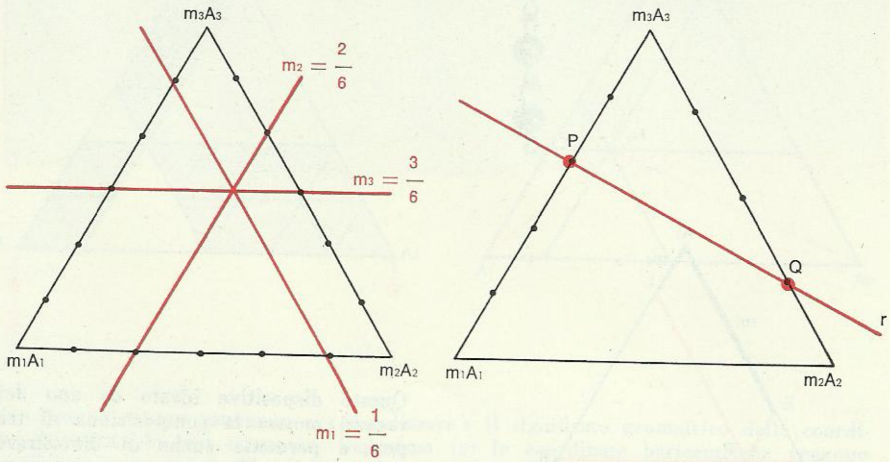
Ho posto il problema: ho una bacchetta di materiale fragile; si sa che quando cade si rompe sempre in tre parti, e si sa inoltre che ogni punto della bacchetta è « ugualmente fragile ». Le tre parti possono dunque essere di lunghezza qualunque. Ci si chiede quindi quale è la probabilità che con questi tre pezzi si possa costruire un triangolo. È chiaro, e gli allievi lo sanno bene, che per costruire un triangolo ogni lato deve essere minore della somma degli altri due: ci sono dunque dei vincoli. Ma questi vincoli appaiono evidentemente, da un punto di vista psicologico, molto larghi; tutti rispondono infatti con sicurezza che è molto probabile che si possa costruire un triangolo.

Però, come calcolare questa probabilità? L'idea di fare appello al calcolo baricentrico viene subito appena dico: i tre pezzi in cui la sbarretta si rompe non li conosciamo, saranno piú o meno lunghi; indichiamoli con m_1, m_2, m_3. Qualcuno ha osservato che m_1, m_2, m_3 potrebbero rappresentare i pesi dei tre pezzi se la bacchetta è omogenea e in tal caso si potrebbero mettere ai vertici di un triangolo baricentrico.

È tutto, da parte degli allievi. Speravo che portassero avanti le loro deduzioni, ma, solo piú tardi, mi sono resa conto che si trattava di un'enorme astrazione. Sono stata io, allora, a continuare il discorso: ho detto che, di conseguenza, a ogni punto del nostro triangolo baricentrico venivano a corrispondere tre pesi e, quindi, una certa suddivisione della bacchetta. Un punto significava dunque una suddivisione, ossia un evento. Vi confesso che ho avuto per qualche istante l'impressione di avere oltrepassato la soglia delle possibilità di astrazione dei ragazzi; vi è stato infatti qualche istante di silenzio assoluto. Poi, un ragazzo ha detto: « Allora il centro del triangolo rappresenterà la divisione della bacchetta in tre parti uguali ». È bastata questa osservazione per far cogliere alla classe il significato del triangolo baricentrico come « modello » di una questione probabilistica; alcuni allievi si sono precipitati alla lavagna per indicare col gesso qualche punto del triangolo, quasi volessero confermare a se stessi questo fatto straordinario: un punto rappresentava questa o quella situazione, questo o quell'evento.

È allora che ho ricordato il nostro





Ecco come si arriva all'equazione di una retta in coordinate baricentriche. La fotografia mostra un triangolo in equilibrio su un'assicella molto sottile che rappresenta appunto una retta: dalle condizioni di equilibrio per il triangolo si risale all'equazione della retta, «profilo» dell'assicella. Gli schemi mostrano invece tre rette parallele ai lati (*a sinistra*) e una retta generica (*a destra*), di cui vengono determinae le equazioni.

problema: siamo interessati, ho detto, solamente a quei punti che rappresentano una suddivisione che permette di costruire un triangolo. Sono gli allievi, ora, a scoprire i vincoli: si tratterà di tre lunghezze m_1, m_2, m_3 tali che ogni parte non superi la metà della bacchetta; deve essere dunque $m_1 \leqslant 1/2$, $m_2 \leqslant 1/2$ e $m_3 \leqslant 1/2$. Ora, ogni disequazione caratterizza un semipiano nel nostro modello (*si veda la figura a pagina 19*). E il modello parla da solo: i casi favorevoli sono racchiusi in un triangolo che è un quarto del nostro triangolo, cioè di tutti i casi possibili. Dunque la probabilità di poter costruire un triangolo è soltanto uguale a 1/4.

Abbiamo seguito per la determinazione della probabilità il genere di dimostrazione sintetica utilizzata dal matematico Bruno de Finetti a proposito di una distribuzione casuale; questo significa, nel modello, che vi è una densità di probabilità uniforme in tutto il triangolo baricentrico. La probabilità è, in questo caso, la misura (qui l'area) dell'insieme dei punti che soddisfano alle condizioni fissate.

È inutile dirvi come i ragazzi siano rimasti impressionati d'aver risolto con dei mezzi cosí elementari un problema che sembrava tanto misterioso. Ho sentito un allievo che diceva di aver finalmente capito cosa occorre per far della matematica; occorre aver fantasia.

Ho cercato di trovare degli esempi espressivi al fine di mettere in rilievo la portata di questo metodo per la determinazione della probabilità nel caso di una distribuzione casuale, accennando in particolare alla previsione dei decadimenti di una particella in tre particelle di energie diverse a seconda delle forze che la bombardano (fenomeno noto come Dalitz Plot).

Programmazione lineare

L'applicazione che ha colpito maggiormente i ragazzi è stata quella relativa alla programmazione lineare. Il termine « programmazione » non è riuscito nuovo agli allievi: effettivamente alla televisione e alla radio si parla molto spesso di programmare il piano di questa o quella industria; ma non avevano nessuna idea di questo lavoro. Abbiamo perciò preso in considerazione una fabbrica particolare, quella della cioccolata.

I componenti fondamentali della cioccolata sono cacao, zucchero e latte che entrano nella miscela in quantitativi diversi, m_1, m_2, m_3, a seconda della qualità della cioccolata. Sono gli allievi adesso a continuare il discorso. Rappresentano questi tre componenti come vertici C, Z, L di un triangolo (*si veda la figura a pagina 20*) e danno loro stessi l'interpretazione; a ogni punto del triangolo corrisponde un miscuglio di cacao, zucchero e latte: le cioccolate piú amare si trovano verso il vertice C, le piú dolci verso il vertice Z e quelle « piú al latte » verso il vertice L. Ho però detto loro di fare attenzione: è vero che a ogni punto del triangolo corrisponde un certo miscuglio, ma certi miscugli risultano troppo liquidi o troppo dolci o, ancora, non corrispondono alla domanda del mercato. Insomma, vi sono delle condizioni a cui devono soddisfare i quantitativi m_1, m_2, m_3. Le condizioni siano per esempio queste:

$$m_3 \leqslant 1/2$$
$$m_2 \leqslant 3m_1$$
$$m_2 \leqslant 3m_3$$
$$m_1 \leqslant m_3 + 3m_2.$$

Ciascuna di queste disequazioni caratterizza un semipiano, ed è facile per i ragazzi determinare la zona definita da queste disequazioni. I ragazzi notano subito che vi è un punto « particolare », il punto R nel quale intervengono solo due componenti: il cacao e il latte. Qualcuno dice che tale punto rappresenta la cioccolata per i diabetici!

È adesso che comincia la parte piú interessante, quella che riguarda il prezzo dei diversi tipi di cioccolata. Se si suppone che i prezzi unitari p_1, p_2, p_3 del cacao, dello zucchero e del latte siano nel rapporto $p_1 : p_2 : p_3 = 4 : 2 : 1$ il prezzo totale della materia prima per la fabbricazione di cioccolata contenente i quantitativi m_1, m_2, m_3 di cacao, zucchero e latte sarà

$$p = 4m_1 + 2m_2 + 1m_3.$$

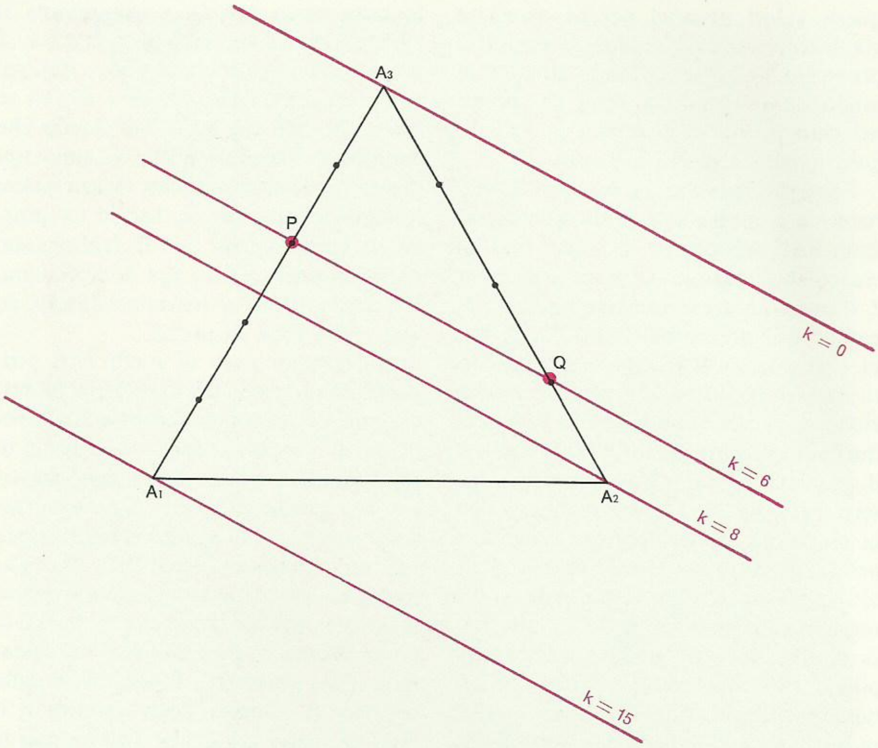
È questa l'equazione dei prezzi del nostro miscuglio: a ogni terna (m_1, m_2, m_3), cioè a ogni punto del triangolo, essa fa corrispondere un prezzo, prezzo che deve riguardare solo quei punti contenuti nella « zona » in cui si può fabbricare della cioccolata. Ora, la nostra equazione è una retta e sappiamo che, al variare del termine noto p, la retta si sposta parallelamente a se stessa. Per avere la direzione di questa retta basterà dare a p un valore qualunque, per esempio il valore zero, anche se questo non ha significato in un problema economico. Consideriamo allora la retta di equazione

$$4m_1 + 2m_2 + 1m_3 = 0.$$

È evidente che questa retta è « fuori » del triangolo. Per disegnarla basta trovare i punti d'intersezione con due lati del triangolo, per esempio con i lati CZ (di equazione $m_3 = 0$) e ZL (di equazione $m_1 = 0$). Si ha cosí

$$2m_1 = -1m_2 \quad \text{e} \quad 2m_2 = -1m_3.$$

Gli allievi non sono meravigliati da



Dal caso semplice delle rette parallele ai lati del triangolo si passa poi al caso piú generale di rette comunque parallele. Si osserva infatti che il parallelismo di due rette corrisponde al fatto che le equazioni scritte in forma non omogenea differiscono soltanto per il termine noto. Quest'ultimo rappresenta la traslazione che la retta ha subito rispetto alla sua parallela avente un'equazione il cui termine noto è zero.

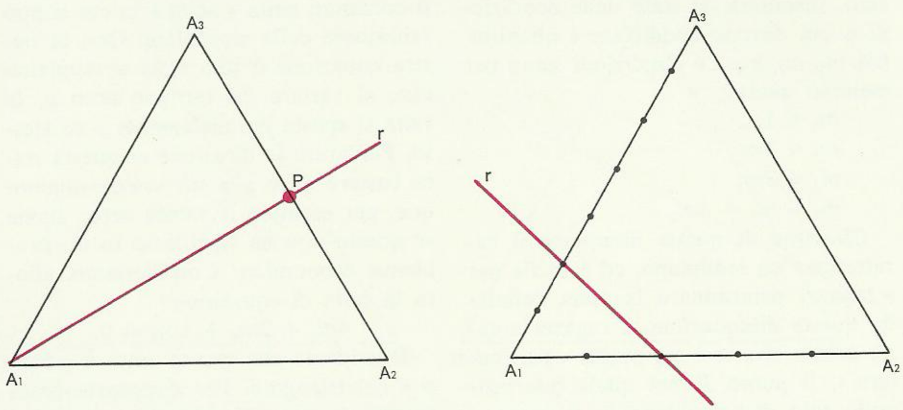
questi valori negativi perché avevamo già incontrato casi di questo genere a proposito della leva. Sono dunque in grado di disegnare la retta dei prezzi nel caso $p = 0$: è la retta PQ della figura in alto a destra a pagina 20.

Facendo spostare la retta parallelamente a se stessa ci si rende conto graficamente del prezzo di ogni tipo di cioccolata. Quando la retta passa per L il prezzo è evidentemente uguale a 1, perché è il prezzo del latte. Poi la retta « penetra » nel triangolo e, a un certo momento, arriva alla zona di produzione, cioè alla zona in cui si può produrre cioccolata: siamo in A. È ora che il problema economico comincia a essere interessante: quale è il prezzo della cioccolata in A? Occorre conoscere prima di tutto la composizione della cioccolata in A. Ora, A appartiene alla retta di equazione $m_3 = 1/2$ e alla retta di equazione $m_2 = 3m_1$; inoltre sappiamo che $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Si ottiene facilmente che in A: $m_1 = 1/8$, $m_2 = 3/8$ e $m_3 = 4/8$. Sostituendo questi valori nell'equazione dei prezzi si ha $p = 7/4$. È il *prezzo minimo*: si tratta del tipo di cioccolata piú economico.

La retta continua a spostarsi e va a passare per Z: in questo caso il prezzo è 2, perché è il prezzo dello zucchero. Si arriva infine al punto B, prima di uscire dalla zona di produzione: è in B che si ha il tipo di cioccolata con *prezzo massimo*. Si verifica che la composizione della cioccolata in B è $m_1 = 10/14$, $m_2 = 3/14$, $m_3 = 1/14$, e il prezzo corrispondente risulta $p = 47/14$. Si esce ora dalla zona interessata: la retta traversa ancora il triangolo ma non si hanno piú dei tipi di cioccolata; si hanno solamente dei miscugli di cacao, zucchero e latte. Infine, la retta passa per C, e rappresenta il prezzo del cacao, cioè il prezzo 4. I prezzi della cioccolata sono dunque compresi fra $7/4 = 49/28$ e $47/14 = 94/28$, cioè fra 49 e 94. Quello che colpisce l'attenzione è che vi sono tipi diversi di cioccolata che, senza avere la stessa composizione, hanno un prezzo di costo uguale per il fabbricante: corrispondono, questi tipi di cioccolata, a dei punti che si trovano allineati su una stessa retta di prezzi.

Abbiamo parlato di molti altri problemi di programmazione: dalla fabbricazione dei prodotti zootecnici ai problemi di trasporto, dalla produzione di fertilizzanti a quella delle leghe ternarie. Un giorno entro in classe e mi dicono subito: « Ha sentito il telegiornale ieri sera? Hanno detto che, alla Camera, stanno programmando un piano regionale; hanno detto che si tratta di un problema di programmazione lineare con tre parametri: la superficie della regione, il numero degli abitanti e il reddito medio regionale. Perché non si potrebbe proporre di farci fare questo lavoro? »

Mi piace riferirvi tutto questo perché cosí potete forse rendervi conto fino a che punto dei ragazzi di 13-14 anni fossero rimasti impressionati da problemi che, a prima vista, sembrerebbero essere molto lontani dagli interessi dei bambini. Vi dico la verità che mi sembrava, in quel periodo, di andare sviluppando una « matematica sociale »: il corso di matematica aveva fatto prendere coscienza della situazione economica del nostro paese, li aveva appassionati al mondo della produzione, aveva loro fatto sentire i problemi piú gravi, ma, anche, aveva fatto intravedere il modo di risolverli matematicamente.



Il semplice caso di una retta passante per un vertice e per il punto medio del lato opposto (*a sinistra*) e il caso piú complicato di una retta qualsiasi (*a destra*) servono a introdurre il concetto di disequazione. Ove infatti i pesi non si facciano equilibrio, il triangolo tracolla dalla parte del peso maggiore. Nel nostro caso la disequazione $m_2 > m_3$ caratterizzerà il semipiano contenente A_2 (*a sinistra*) mentre la disequazione $2m_1 > 3m_2 + 5m_3$ caratterizzerà il semipiano contenente A_1 (*a destra*).

La colorimetria

Ho voluto terminare questo programma « extra » in bellezza, con un argomento estetico, il colore. Un argomento che sembrava ai ragazzi molto lontano dalla matematica. Sono rimasti molto impressionati dal fatto che tre colori « indipendenti » bastano per produrre un colore qualunque e che la composizione dei colori è stata matematizzata un secolo fa da H. Grassmann. Questa teoria è stata precisata recentemente, ma vi sono ancora molti punti oscuri per quanto riguarda la fisiologia dell'occhio.

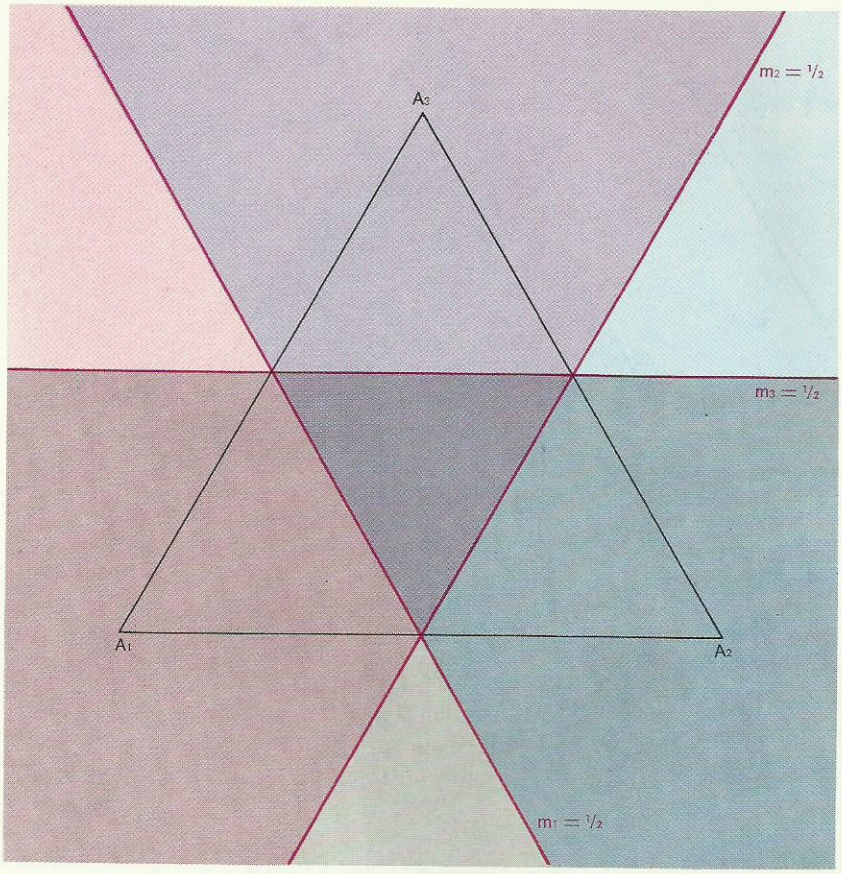
Abbiamo detto « tre colori indipendenti », ma se vogliamo ottenere tutte (o quasi tutte) le sfumature di colore per sintesi additiva conviene prendere come sistema di riferimento il rosso, il verde e il blu, definiti attraverso certe lunghezze d'onda in modo che il miscuglio di tre unità di ciascuno di questi colori dia il bianco (è la Convenzione Internazionale del 1931).

Il fatto che ogni colore possa ottenersi per sintesi additiva a partire da quei tre colori fondamentali suggerisce in modo del tutto naturale il modello del triangolo baricentrico i cui vertici rappresentano il rosso, il verde e il blu (*si veda la figura a pagina 21*). I diversi quantitativi m_1, m_2, m_3 con cui intervengono questi tre colori caratterizzano il colore composto C secondo la relazione: $C = m_1 R + m_2 V + m_3 B$. Se $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ si ha il bianco dato che – come si è detto – abbiamo scelto le lunghezze d'onda in modo che il miscuglio di tre quantità uguali dia il bianco. Il bianco si trova dunque nel centro di figura O del triangolo. I punti che si trovano sui lati rappresentano colori ottenuti mescolando due soli dei colori fondamentali; per esempio, il punto medio del lato RV è il giallo (un certo giallo), il punto medio di BV è il blu-pavone e il punto medio di RB è il cremisi. È molto interessante notare che il complementare di un colore rappresentato da un punto H di un lato è il punto K ottenuto intersecando la retta HO con un altro lato del triangolo; in altri termini, ogni segmento passante per il centro di figura O collega due colori complementari rappresentati da due punti del contorno del triangolo. Si verifica cosí, in particolare, che il giallo è complementare del blu, il cremisi del verde e cosí via.

Tutto questo... per via teorica. Ma, nello stesso tempo, abbiamo voluto « visualizzare » la teoria; per mezzo di tre lampade inserite, ciascuna, in una scatola dotata di una parete di vetro colorato (una scatola con una parete di vetro rosso, una con un vetro verde e una con un vetro blu) abbiamo ottenuto le tre luci dei colori fondamentali. Allontanando o avvicinando una lampada a uno schermo, l'illuminazione sullo schermo veniva naturalmente a variare; alle distanze delle tre lampade dallo schermo corrispondevano quindi i quantitativi m_1, m_2, m_3 e si vedeva quindi l'uno o l'altro colore composto.

Il problema dei colori dà luogo a delle questioni che appartengono alla fisiologia dell'occhio, ed è proprio qui – come abbiamo detto – che molti problemi sono lungi dall'essere chiariti. Per esempio, si è arrivati a stabilire che delle distribuzioni diverse di luci, cioè delle terne diverse m_1, m_2, m_3, possono dare la stessa sensazione di colore. Queste terne si troverebbero su delle linee. Si ha dunque un fenomeno analogo a quello che abbiamo incontrato nella programmazione lineare; nel modello baricentrico della fabbricazione della cioccolata, per esempio, ci sono miscugli diversi allineati su rette che corrispondono al medesimo prezzo: qui ci sarebbero delle linee « isocolorate ».

Sono proprio i problemi non ancora risolti che affascinano i ragazzi; ed è parlando di queste ricerche di fisiologia che ho voluto terminare il nostro studio, durato tre mesi, sul calcolo baricentrico e le sue applicazioni.



Il problema di determinare la probabilità che una bacchetta di materiale fragile si rompa in tre pezzi di lunghezza tale che con essi si possa costruire un triangolo dà luogo a tre disequazioni e a tre semipiani. Nel triangolo baricentrico questi delimitano un triangolo piú piccolo (*al centro, in colore piú intenso*) che racchiude i « casi favorevoli »; la probabilità è 1/4 poiché il triangolo ottenuto è pari a 1/4 del triangolo di partenza.

Conclusione

Vorrei ora invitare il lettore che ha seguito questo lungo resoconto didattico, meravigliandosi forse qualche volta di un programma cosí lontano dal consueto, a riflettere sulle reazioni dei ragazzi. E devo dire subito che non si trattava davvero di allievi eccezionali: erano ragazzi e ragazze di ogni ambiente sociale, di intelligenza media normale, e dotati – occorre anche dirlo – di una volontà di studio assai modesta.

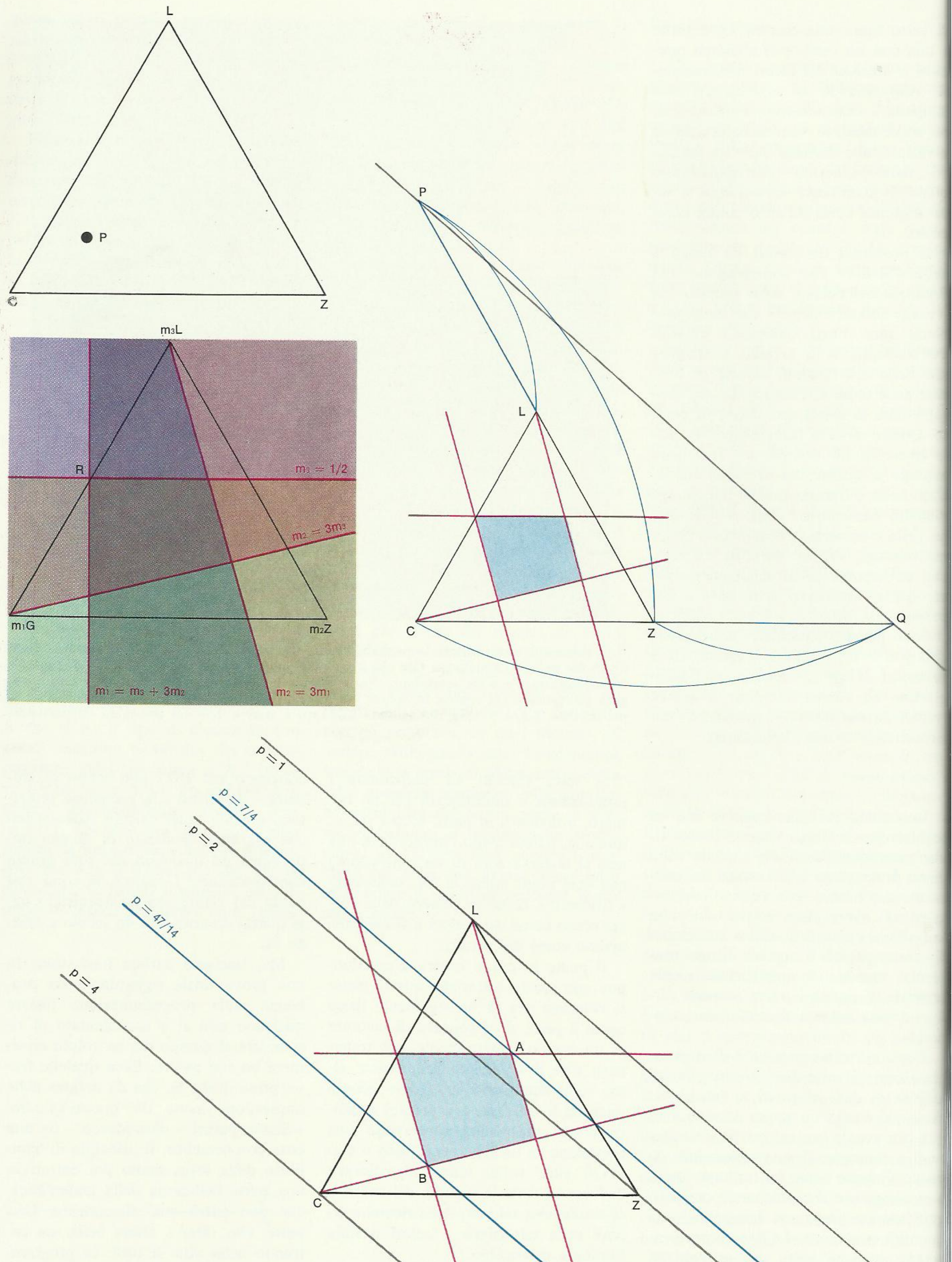
Dopo un primo momento di stupore, gli allievi si sono ben presto abituati all'idea di dare ai punti le interpretazioni piú varie: un punto è un miscuglio, un evento, un colore. Si sono abituati a concepire il punto preceduto da un coefficiente come un tutt'uno: era il *punto-massa*, e il coefficiente poteva significare un peso, una lunghezza, una quantità qualunque. Le linee rappresentavano qualche volta dei prodotti di ugual prezzo, altre volte indicavano la stessa sensazione di colore. L'intersezione di semipiani era una zona di produzione, o l'insieme degli eventi favorevoli, o i colori di una certa tonalità.

Si sono abituati ad addizionare i punti-massa, a moltiplicarli per un numero, a dividerli in parti, e cosí via, e, qua e là, hanno avuto l'impressione (ma non si trattava solo di un'impressione) che quei punti dotati di un coefficiente « tirassero » come se fossero delle forze: erano come dei vettori e si comportavano come dei vettori.

Il piano in cui si lavorava era dunque uno spazio vettoriale: questo piano si colorava ora di un significato fisico come il peso, se si pensava di lavorare in un campo gravitazionale, ora tratteneva solo il significato geometrico; altre volte acquistava un valore economico (la produzione e il prezzo) o indicava una probabilità suggerendo una previsione su un fenomeno fisico o chimico; altre volte, infine, si colorava davvero di tutta la gamma dei colori e ci conduceva nel vivo delle ricerche attuali sulla televisione a colori o sulla fisiologia dell'occhio.

Era cosí il nostro piano: l'avevamo reso tanto ricco d'interpretazioni regalandogli solo tre punti e la legge d'equilibrio della leva. Era questo il piano che August Ferdinand Möbius aveva concepito nel 1827 allo scopo di studiare « da vicino » la geometria proiettiva, creando quel calcolo baricentrico che era stato giudicato di dubbia importanza da qualcuno dei suoi grandi contemporanei. I ragazzi si sono resi conto del valore che ha acquistato oggi questa creazione di un secolo e mezzo fa.

Ma, lasciamo parlare loro stessi: in una prova finale riguardante un problema sulla programmazione lineare qualcuno non si è accontentato di rispondere al quesito ma ha voluto esprimere un suo parere. Ecco qualche frase, presa qua e là, che dà un'idea delle impressioni avute da questo studio: « Siamo partiti – dice Marco – da una cosa cosí semplice: il principio di equilibrio della leva; siamo poi entrati in una parte bellissima della matematica. che non potrò mai dimenticare. Una parte, che, oltre a essere bella, sta entrando nella vita di tutti: la programmazione sta ormai diventando una cosa indispensabile per le piccole e le grandi industrie ». Dello stesso parere è Piero: « Nessuno avrebbe mai pensato che un principio scoperto da Ar-

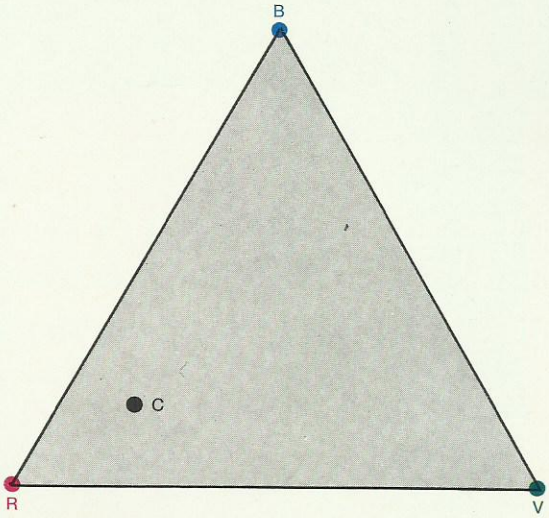


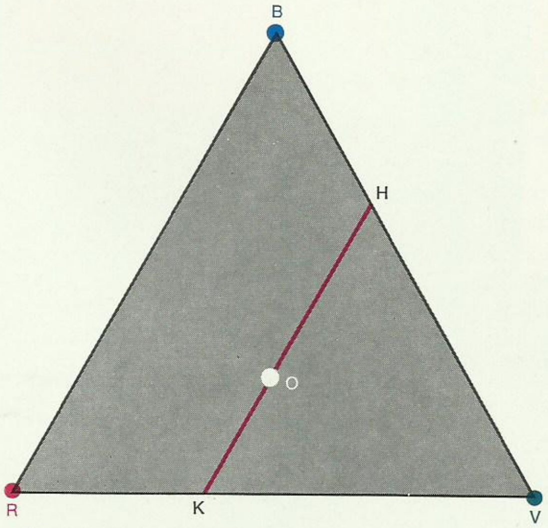
Applicazione del calcolo baricentrico alla programmazione della fabbricazione di cioccolata i cui componenti si trovano ai vertici di un triangolo. Le condizioni a cui deve soddisfare il prodotto sono rappresentate da quattro disequazioni e cioè da quattro semipiani che delimitano un quadrilatero (*in colore*). Introducendo le condizioni di prezzo (*sotto*) si ha una retta che, al variare del prezzo si sposta parallelamente a se stessa passando dal prezzo minimo al prezzo massimo della cioccolata.

chimede, quello dell'equilibrio della leva, potesse avere poi, a distanza di secoli, delle applicazioni a problemi economici ». « Eppure – dice Francesco – il calcolo baricentrico sembrava agli inizi del secolo scorso una cosa inutile, stimata poco utile anche dai piú grandi matematici di quel tempo. Non potevano certo immaginare l'importanza che avrebbe avuto nell'epoca delle macchine! »

Sono le applicazioni che rendono vive le teorie agli occhi dei ragazzi; cosí vive e cosí vicine da farsele proprie: « Grazie a Möbius – dice Luca – si può conoscere quale sia il tipo di prodotto piú buono e piú a buon mercato ». E poi aggiunge, pensando alla scuola media che sta per lasciare: « Questo programma mi ha interessato moltissimo, e sarei contento se, quando alla media ci saranno i nostri fratelli, questo programma fosse reso obbligatorio in tutte le scuole ». E anche Paola parla delle applicazioni, e in particolare della programmazione: « Credo – dice – che questo argomento mi abbia tanto interessato perché è vivo e ci mostra delle applicazioni pratiche di una teoria fisico-matematica. Tutte le aziende moderne dovrebbero fare un programma di lavoro basato sulla programmazione lineare. Quando si fabbrica un prodotto bisogna rendersi conto della richiesta del pubblico, dei prezzi sul mercato dello stesso prodotto e dei prezzi delle materie prime. Una volta stabiliti determinati vincoli, si può costruire la zona di produzione, al di fuori della quale o si avrebbe un prodotto troppo caro o scadente o poco richiesto. Con la programmazione lineare si sono risollevate le situazioni di molte aziende che sono cosí riuscite a produrre l'ottimo con il minimo costo. »

« Questo non è un argomento che studieremo ancora nel corso superiore – dice Francesca –, però penso che ci servirà nella vita e lo approvo come studente ». Anche Fabio pensa alla vita del lavoro e si vede già inserito nel personale di concetto di un'azienda: « Nel mondo di oggi – dice –, alle industrie servono molto degli uomini che sappiano programmare e noi siamo già in grado di farlo ». E poi, anche lui pensa alla scuola: « Mi dispiace immensamente lasciare questa matematica perché non è fatta solo di calcoli e di applicazioni ma anche di scoperte, e, soprattutto, è una matematica in cui la logica elementare è l'essenziale ». E anche Laura pensa alla scuola media e al corso superiore, e la sentiamo già pronta per una giusta contestazione: « È stato molto interessante questo programma sul calcolo baricentrico; ma è certamente ingiusto che noi che veniamo da una scuola media moderna si debba riprendere, al superiore, lo studio "dell'altra" matematica. Perché ci si ostina a insegnare la matematica del medioevo? » Piú calmo si mostra invece il « contestatore » Federico; questo programma l'aveva reso piú consapevole dei problemi del paese, piú maturo, piú sereno. Egli cerca di esprimere la sua soddisfazione con poche, chiare parole: « Mi ha interessato questo nuovo programma non solo per la sua bellezza, ma soprattutto per la sua modernità, per la sua logica elementare, per le sue applicazioni indispensabili al giorno d'oggi ».





Applicazione del calcolo baricentrico alla composizione dei colori. Il triangolo dei colori semplificato (*in alto*) ha ai suoi vertici i tre colori rosso, verde e blu definiti in modo che il miscuglio di quantitativi uguali dia il bianco (*O*). Risulta chiaro che ogni punto del triangolo corrisponde a un ben determinato colore (*C*). Da notare che ogni retta passante per il centro di figura (*in basso*) collega due colori complementari qualsiasi rappresentati da due punti sul contorno del triangolo.

Ho parlato, all'inizio, dei fini che deve proporsi un insegnamento della matematica nella scuola media: preparare gli uni alla vita dell'immediato domani, e, gli altri, a uno studio piú approfondito che sarà svolto nel corso superiore. Se risulta evidente l'importanza formativa che ha uno studio sul calcolo baricentrico quale preparazione al « saper vedere » fatti e fenomeni del mondo che ci circonda, non c'è bisogno di sottolineare l'interesse che vi sarebbe nel creare una « base concreta » per quella teoria degli spazi vettoriali che, fuori dubbio, dovrà trovare largo posto nei nuovi programmi di matematica della scuola secondaria superiore.

Ritornando infine al lavoro svolto nello scorso anno, desidero terminare anch'io, come i miei allievi, dicendo che non dimenticherò certo questo programma « extra »: e non lo dimenticherò soprattutto perché non mi era mai accaduto di sviluppare una ricerca in collaborazione con ragazzi di 13-14 anni. Sono lieta oggi di poterli ringraziare su queste pagine.