Archimede
XIII, 1961

# INDICE

## ...EDICESIMA ANNATA (1961)

(*PER RUBRICHE*)

### 1.
### *ARTICOLI DI TESTA*



### 2.
### *FILOSOFIA – METODOLOGIA DIDATTICA*



### 3.
### *ORDINAMENTO DEGLI STUDI SECONDARI DI MATEMATICA E DI FISICA*



### 4.
### *ANTOLOGIA*
(a cura di R. GIANNARELLI)

# L'INDIRIZZO DESCRITTIVO E QUELLO COSTRUTTIVO NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA INTUITIVA (*)

Quando si va a parlare dell'insegnamento della matematica, e in particolare di quello della geometria, si ha sempre l'impressione di ripetere qualcosa di già detto, qualcosa di molto noto. Per nessuna disciplina infatti, come per la matematica, la letteratura che riguarda l'insegnamento è così vasta e di così antica data: si può dire che il problema dell'insegnamento della geometria si sia presentato dalla più remota antichità, perchè anche i papiri egiziani e le tavolette di argilla babilonesi rappresentano non solo una raccolta di esercizi e di regole ma anche un'opera didattica; « per risolvere questo problema – vi si dice, per esempio – tu procederai così e così; e potrai infine verificare che il procedimento è esatto perchè.... ». Un'opera, fuori dubbio, didattica autoritaria, dommatica.

Per venire a un'epoca meno lontana, facciamo un salto di qualche secolo dal 1800-1600 a. C. e arriviamo al periodo socratico; qui troviamo nel *Menone* l'esempio classico di applicazione del metodo euristico, attivo, nei riguardi di un particolare problema di geometria « come costruire un quadrato doppio di uno dato ». Vediamo qui, a differenza delle opere prima citate, il maestro e l'allievo, e, seguendone il pensiero attraverso le domande e le risposte e le varie discussioni, ci sembra di leggere il resoconto di un'indagine psicologica condotta dalla Scuola di Ginevra sotto la guida di Jean Piaget, uno di quegli studi che vengono condotti oggi allo scopo di indagare sulla nascita e lo sviluppo delle strutture matematiche nella mente del fanciullo.

Poi, a breve distanza dagli scritti di Platone, ci troviamo davanti a un'opera colossale: gli *Elementi* di Euclide; un'opera che ha avuto, come sappiamo, un'importanza enorme nel corso dei secoli, sia dal punto di vista scientifico che da quello didattico. Si può dire anzi che, da quest'ultimo punto di vista, non si riesce a staccarsi dalla linea euclidea, pur perfezionata e messa a punto soprattutto nel secolo scorso con la critica dei principî, e che sugli *Elementi* continuano a formarsi generazioni e generazioni di allievi. Sarebbe interessante seguire gli alti e i bassi del successo scolastico di questo libro, i pro e i contro che si sono susseguiti, a seconda anche delle correnti filosofiche; sarebbe interessante, anzi sarà interessante, vedere, fra qualche decina di anni, dove sfocerà il grido « abbasso Euclide » lanciato oggi da molti paesi europei, e in particolare dalla Francia, e vedere se l'assiomatica tipo euclideo verrà sostituita da un'assiomatica del tutto diversa come potrebbe essere quella basata sui principî della Scuola Bourbakista, se, insomma, le cosiddette matematiche

---

(*) Conferenza tenuta l' 11 aprile 1960 presso l'Istituto di Matematiche complementari dell'Università di Torino.

moderne sostituiranno in pieno le matematiche classiche non solo nell'indirizzo scientifico ma anche in quello didattico.

Pro o contro Euclide? Non è questo l'argomento di cui vorrei parlarvi, benchè riconosca i motivi più che seri ed estremamente attraenti per un'ampia discussione sulla metodologia della geometria nei corsi superiori. Ma ritengo che oggi in tutto il mondo, e in particolare in Italia, il problema di carattere urgente sia quello dell'insegnamento della matematica nella scuola media di 1° ciclo; il problema esce addirittura dai limiti di una stretta didattica della matematica per ampliarsi in un quadro sociale-politico-economico: perchè è mutata la società scolastica dagli 11 ai 14 anni, e si prepara a mutare ancora di più e in modo molto rapido nei prossimi anni; e il mondo si evolve, mutano cioè le richieste della società lavorativa nei riguardi del reclutamento dei propri dipendenti, anche dei più modesti, e il linguaggio matematico è oggi riconosciuto altrettanto essenziale del linguaggio ordinario; mutano, d'altra parte, le correnti filosofiche e si rinnovano quelle pedagogiche; sorgono nuove scienze come la psicologia e si studiano attraverso indagini scientifiche le strutture mentali del fanciullo, e in particolare del bambino dagli 11 ai 14 anni.

Tutti questi motivi fanno sì che siamo ancora una volta scusati davanti ai nostri maestri se osiamo affrontare questo tema antico e tanto discusso: perchè il suo volto cambia ancora una volta alla luce della nuova società.

E poi, abbiamo anche un'altra giustificazione: i nostri maestri non si sono occupati che poco dei preadolescenti; dopo aver lasciato la cura della metodologia dell'insegnamento della matematica nelle scuole elementari ai filosofi, ai pedagogisti e recentemente agli psicologi, hanno rivolto ogni loro attenzione all'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori, sembrando dimenticare – fatto assai curioso ma di cui vedremo fra un momento le cause sociali e filosofiche – che fra gli 11 e i 14 anni vi è un'età intermedia, che è la preadolescenza.

A tutti è nota l'enorme influenza esercitata in Italia e anche all'estero dalla struttura dei programmi di geometria dettati nel 1867 da Cremona, Betti e Brioschi; con quei programmi, ispirati a una concezione purista della scienza, si voleva educare i giovani « a ragionare, a dimostrare, a dedurre », secondo le parole di Cremona, e si riteneva che un tale tipo di educazione non potesse attuarsi se non ritornando all'Euclide: « l'Euclide è veramente il testo che meglio serve a questi fini », dice Cremona. Non si ammetteva di poter condurre diversamente, in ogni ramo delle scuole secondarie, l'insegnamento della geometria, trascurando così, evidentemente, i bambini dagli 11 ai 14 anni che con grave difficoltà avrebbero potuto seguire un tale tipo d'istruzione. E tanta poca importanza si diede a questo primo ciclo di studi secondari che in un certo periodo – e precisamente dal 1867 al '70 – l'insegnamento della matematica fu del tutto soppresso dopo la scuola elementare fino ai 14 anni; fatto davvero assai strano! I bambini di classi sociali modeste si sarebbero contentati del « far di conto », mentre gli altri, l'élite della società, avrebbero appreso la matematica solo sotto la forma deduttiva.

Ma nel 1881 capitò un fatto altrettanto strano: fu istituito un corso triennale di geometria intuitiva o sperimentale o costruttiva (la denominazione subì vari cambiamenti) per l'influenza non di matematici, ma di un grande medico, Guido Baccelli, allora ministro della Pubblica Istruzione. Il Baccelli, partendo da considerazioni di carattere psicologico, ritenne opportuno introdurre questo corso che doveva precedere il corso razionale. Fu così che l'Italia, prima nazione del mondo, istituì un corso di geometria intuitiva! E di questa priorità, a distanza di quasi un secolo, possiamo andare veramente orgogliosi, dato che solo oggi si sostiene in tutti i paesi la necessità di un tale studio; e che solo oggi paesi ben più progrediti del nostro dal punto di vista dell'istruzione scolastica istituiscono un corso di geometria intuitiva (il Belgio nel 1947, la Francia oggi, ma in modo assai vago).

Ma vedremo fra un momento che questi avvenimenti di natura apparentemente strana sono invece del tutto logici quando s'inquadrino nel corso della storia. Domandiamoci infatti: *Perchè un corso di geometria intuitiva? Quale ne è lo scopo?* Si suole dare a questa domanda la seguente risposta: il corso di geometria intuitiva ha per scopo di dare al ragazzo le basi su cui costruire il corso successivo di geometria razionale. Risposta, questa, assai poco significativa. Perchè la domanda stessa ha poco significato se si limita allo stretto campo della didattica; quella domanda s'inserisce infatti in un problema filosofico, e non è che la traduzione di altre domande: come si costruisce la geometria? quali sono le radici di questa scienza? su quali basi deve essere fondata un'assiomatica?

Alle risposte che si possono dare a queste domande, ai vari atteggiamenti che si assumono nei riguardi dell'una o dell'altra impostazione filosofica, corrisponderanno, sul piano didattico, altrettante metodologie.

Se ci si ispira alla tesi che sostiene che l'ente geometrico è una costruzione della mente umana, indipendente e preesistente alla considerazione di oggetti reali, non ha senso, evidentemente, premettere al corso deduttivo di geometria un corso a carattere sperimentale, sensoriale. Si comprende perciò come quegli uomini e quei paesi (in particolare la Francia tutta imbevuta dello spirito cartesiano) che sostenevano la tesi razionalista non abbiano mai pensato – ed è giustissimo dal loro punto di vista – all'istituzione di un corso di geometria intuitiva.

Ma se, al contrario, si parte dall'ipotesi che l'ente geometrico si formi nella mente umana *per astrazione* a partire da osservazioni di oggetti reali e da esperienze su questi, dobbiamo, sul piano didattico, far precedere il corso razionale da un corso a carattere sperimentale, dove gli assiomi trovino le loro radici naturali.

È chiaro che, da un punto di vista didattico, il primo indirizzo offre un terreno estremamente semplice e rapido: si tratterà di scegliere un gruppo di assiomi e di procedere a partire da questi per successive deduzioni; un terreno piano, senza salti, senza emozioni. Un terreno però che, nell'aula scolastica, si è dimostrato assai poco indicato proprio per la mancanza di emozioni di cui il bambino è sempre avido, per la sua freddezza dipendente dalla eccessiva perfezione, e per il suo carattere impositorio.

Il secondo indirizzo, invece, pone immediatamente una problematica dal punto di vista didattico e dà luogo, a sua volta, a un duplice cammino: se infatti dobbiamo cercare di formare il ragazzo alla concezione dell'ente geometrico a partire da osservazioni su oggetti reali, dovremo domandarci quale è il senso che va dato a questo *ricorso al concreto*, a *questo ricorso all'oggetto e all'azione* che servirà, in un secondo tempo, come trampolino per astrarre. Ora, è proprio la frase « ricorso all'oggetto e all'azione » che ci indica, sempre partendo dal concreto, due strade distinte: ricorrere all'oggetto significa osservare l'oggetto in quanto tale, con atteggiamento passivo, significa, in breve, *intuire l'oggetto nel senso etimologico della parola* (intuire significa guardare dentro, guardare con attenzione); ricorrere all'azione, invece, significa osservare un fenomeno che riguarda l'oggetto, operare, esperimentare sull'oggetto, interrogare l'esperienza, significa insomma *intuire nel senso pestalozziano della parola*. Ma qui riconosco che, pur trovandomi a parlare del concreto, rischio di perdermi nelle generalità astratte; permettetemi perciò di portare un esempio ricorrendo a un concreto molto particolare: immaginiamo di voler parlare dell'introduzione dell'ente geometrico « il quadrato » a dei bambini di 11 anni. Per introdurre questa figura, del resto già nota a tutti i bambini di quell'età, e arrivare a una definizione a partire dal concreto, si potrà far ritagliare dei quadrati di carta, far osservare lati e diagonali, far citare dagli allievi stessi degli oggetti che hanno forma di quadrati, far guardare le facce di un cubo...; si potrà far disegnare un quadrato con riga e compasso. Si potrà anche far confrontare il quadrato con altri quadrilateri insistendo sui caratteri distinti e su quelli che sono comuni a queste figure. Da tutte queste osservazioni l'allievo dovrebbe essere condotto a dare da solo una definizione; ma una definizione esigerebbe una facoltà d'astrazione capace di cogliere la proprietà caratteristica dal confronto di un numero finito di figure. Ora, questo processo verso l'astrazione a partire da un certo numero di osservazioni, un bambino di 11 anni non è in generale capace di farlo da solo.

Vorrei invece far vedere, sempre a proposito della figura quadrato, come il passaggio dal concreto all'astratto sia reso più naturale non attraverso a delle osservazioni sull'oggetto ma attraverso a delle *operazioni* sull'oggetto. Ecco come si potrebbe condurre lo studio del quadrato: si dànno al bambino delle strisce uguali e delle viti (come quelle del meccano) e gli si dice di costruire un quadrato. Appena avrà fatto questa costruzione, si accorgerà da solo, e con enorme meraviglia, che la figura che ha nelle mani può articolarsi, può trasformarsi in un rombo. Questa trasformazione è molto suggestiva: l'allievo si rende conto che il quadrato è un rombo particolare, che fa parte della famiglia dei rombi. Fra gli elementi che non cambiano (gli invarianti) e quelli che cambiano nel passaggio da una figura all'altra, si potrà portare la sua attenzione sulla costanza della somma degli angoli, sulla variazione di area, sulla variazione della somma delle diagonali. Il bambino avrà l'intuizione della costanza o della variabilità di una funzione attraverso l'osservazione dei casi limite, cioè dei casi in cui il rombo tende a un segmento, e il materiale tende a smaterializzarsi. E la considerazione di un numero infinito di figure anzichè finito, cioè la trasformazione di un tipo di figura in infiniti altri, condurrà a caratterizzare la figura nella classe di altre e quindi a definirla. La definizione del quadrato, ad esempio, apparirà dal carattere che la distingue dalla classe dei rombi a cui appartiene. « Definire – dice Enriques – importa assegnare i caratteri discontinui che valgono a distinguere una classe dalle rimanenti; questi caratteri vengono concepiti come qualità comuni agli oggetti della medesima classe ». Quello che mi preme di sottolineare è che a un tal genere di definizione il bambino arriva da sè, e che questa non gli viene dunque imposta dall'alto.

Credo che l'esempio ora dato valga a mostrare la differenza notevole che passa fra due metodologie che prendono, però, entrambe origine dal concreto: per l'una il carattere del corso è *descrittivo*, per l'altra è *costruttivo*; la prima metodologia – descrittiva – ha dato origine a tutta la trattatistica sulla geometria intuitiva a partire dal Veronese.

* * *

Sulla base di una concezione costruttiva svolgo, ormai da molti anni, il mio corso di geometria intuitiva.

Devo dire che sono stata indirizzata a questa metodologia dalla lettura di un libro del' 700, gli *Eléments de géométrie* di A. C. Clairaut; e che, priva del tutto di qualunque base filosofica o metodologica, mi buttai completamente alla ventura nel mio corso di geometria intuitiva sulla base di questo gioiello della didattica matematica. È solo più tardi che, con calma, cercai di organizzare sistematicamente il mio pensiero, passando cioè dal concreto all'astratto....

Senza entrare nei particolari, vi descriverò in breve la linea seguìta dal Clairaut: partendo da quelle che generalmente si ritengono le origini della geometria, e cioè la determinazione dell'area dei campi, Clairaut pone il lettore, fin dalle prime pagine del libro, di fronte a un problema estremamente naturale e attuale: come calcolare l'area di un campo poligonale? A chiunque viene in mente di semplificare il problema, di analizzarlo cioè: viene l'idea di dividere il poligono in tanti triangoli; e l'area del triangolo? è semplice determinarla perchè il triangolo è la metà di un rettangolo, e l'area del rettangolo si può calcolare con un riporto effettivo del quadrato unità di misura sul rettangolo.

Ma ecco che, quando il problema fondamentale della geometria piana – quello relativo all'*equivalenza* dei poligoni – sembra risolto, qualche ostacolo viene a porci una nuova problematica: può infatti accadere, ed è caso frequentissimo, che nell'interno del campo poligonale si trovi un lago, una costruzione..., che impedisca di prendere delle misure dirette. Tutto il procedimento di prima sembra a un tratto crollare. Come si fa? Sorge l'idea di riprodurre un poligono uguale al dato in una vicina spianata, libera da ostacoli, e il capitolo dell'*eguaglianza* segue così, in modo del tutto naturale, a quello dell'equivalenza; noi prenderemo sul nuovo poligono tutte le misure.

Ma anche qui sorgono dei dubbi: e se non c'è nelle vicinanze una spianata libera da ostacoli? La riproduzione di un poligono uguale al dato può non essere effettuabile. E allora? Siamo obbligati a fare un nuovo passaggio; ma è il ragazzo stesso che ve lo suggerirà, tanto l'idea sorge spontanea. Saremo condotti a riprodurre la figura in piccolo: si apre, s'impone addirittura lo studio delle figure *simili*.

I capitoli fondamentali della geometria piana – *equivalenza, eguaglianza, similitudine* – vengono così ad essere legati fra loro secondo una linea che non è certamente euclidea, e che, d'altra parte, non rappresenta probabilmente lo sviluppo della storia della matematica nel senso di cronaca, ma che potrebbe intendersi come un'interpretazione della storia.

Questo, quanto risulta da un rapido sguardo agli *Elementi* di Clairaut.

Se poi esaminiamo il libro con spirito pedagogico, ci accorgiamo dei pregi ma anche delle lacune del libro stesso: Clairaut immerge il debuttante in una « situazione matematica », in un problema complesso riguardante una figura geometrica, in un « globale »; poi analizza e arriva alla considerazione degli elementi: i lati, gli angoli, le rette.... Si accorge allora che, per esempio, due rette nel piano possono trovarsi in posizione particolare (essere perpendicolari o parallele), e si accorge anche che alcuni poligoni possono essere particolarmente interessanti (per esempio il quadrato). Allora si propone di studiare queste posizioni e queste figure particolari, e decide di costruirle col disegno: viene così ad alternare il metodo analitico che ha applicato partendo dal globale e passando dal complesso al semplice, all'elemento, col metodo sintetico (nel senso di costruttivo) che gli permetterà di passare dagli elementi al complesso. Ma, mentre secondo la prima linea d'indagine (il metodo analitico) è partito dal concreto, da una situazione concreta (quale è quella per esempio della considerazione di un campo), nel seguire la linea opposta (il metodo sintetico) egli opera invece solo col disegno. Ora, partire da una costruzione grafica non significa partire dal concreto; il disegno infatti, fissando la figura, non fa vedere i vari tentativi, non permette dunque al bambino di arrivare da solo alla scoperta. Il disegno rappresenta sì un concreto, ma solo lo stadio più avanzato, lo stadio finale del concreto.

È proprio questa non coerenza nella metodologia che si avverte nella lettura degli *Elementi* di Clairaut, ed è proprio l'osservazione di questa lacuna che mi ha condotto a fare un passo più avanzato nella concezione del ricorso al concreto.

Ho cercato di togliere questa brusca divergenza di metodo rivolgendomi ancora alla storia, cioè a quella che abbiamo voluto chiamare un'interpretazione della storia. Mi sono cioè domandata quali siano le origini del disegno geometrico, come e perchè l'uomo sia stato condotto alle costruzioni grafiche; mi sono insomma chiesta come siano nate le figure geometriche. A questa domanda non dà risposta la storia ma la preistoria. Non voglio tediarvi col riferire il genere di ricerche che ho seguìto; vi dirò solo che mi sembra di poter concludere che alla costruzione grafica di una figura geometrica si è arrivati solo dopo la costruzione effettiva, materiale, della figura stessa, che la costruzione grafica rappresenta insomma l'immagine, il quadro di una costruzione materiale. Così, per esempio, la figura geometrica triangolo appare nel periodo neolitico dopo che l'uomo aveva scoperto l'utilità delle forme triangolari nelle costruzioni statiche (capriate, puntelli di sostegno, ecc.).

Ho preso appunto ispirazione dalla preistoria per trattare il capitolo del disegno geometrico, non imponendo il disegno immediatamente, ma facendolo nascere solo in seguito, successivamente a una costruzione materiale, a un'operazione fatta sul concreto effettivo; ed è questa operazione che suggerisce al bambino stesso la traduzione in termini grafici

Al capitolo del disegno geometrico, così trattato, fanno poi seguito i capitoli fondamentali della geometria piana, svolti, come abbiamo visto prima, sulla linea del Clairaut.

* * *

Vorrei, nel concludere, cercar di riassumere brevemente quanto ho detto, sottolineando i punti che mi sembrano più importanti:

1. – Se, nell'insegnamento della geometria, ci si ispira a una tesi razionalista, si deve partire da una serie di assiomi, stabiliti *a priori*, senza che essi debbano essere riferiti a basi concrete. Non ha dunque senso, secondo tale impostazione filosofica, un corso di geometria a carattere sperimentale-intuitivo.

Se invece si prende ispirazione dalla tesi che sostiene che all'idea dell'ente geometrico si arriva solo per astrazione, dopo aver fatto ricorso al concreto, s'impone un corso di geometria che preceda lo studio deduttivo; questo corso avrà per scopo di gettare le basi per l'assiomatica successiva.

Per la metodologia di tale corso, che si suole designare col nome di corso di geometria intuitiva, si possono seguire due strade: per l'una si ricorre all'oggetto in quanto tale, all'osservazione dell'oggetto; l'aggettivo intuitivo ha dunque in tal caso un significato statico, contemplativo. Per l'altra, invece, si ricorre all'azione sull'oggetto, all'operatività sul concreto; il significato di intuitivo ha dunque, in questo caso, un valore dinamico, costruttivo.

2. – Per costruire una geometria di quest'ultimo tipo ho trovato un opportuno modello nello sviluppo storico dei concetti. Ma non si tratta – è bene ripeterlo ancora una volta – di seguire una storia della matematica nel senso di cronaca, bensì uno sviluppo della matematica reso necessario da una logica degli avvenimenti, dove questi, in quanto avvenimenti umani, si succederanno per crisi, per salti, per fratture: così, per esempio, abbiamo visto che è proprio per una crisi che si è condotti a passare dal capitolo dell'equivalenza a quello delll'uguaglianza e ancora per un'altra crisi che si deve passare allo studio della similitudine. Il corso che segue questa metodologia è quindi pieno di emozioni: il pensiero, giungendo alla maturazione, sente i limiti di ogni questione, ed è obbligato, è forzato a passare a un'altra questione, a un altro problema.

A un certo momento, il pensiero umano, ma anche quello del fanciullo, avvertirà i limiti di tutta la trattazione, avvertirà i limiti del concreto. E allora, e solamente allora, avrà luogo un'altra crisi – la più profonda di tutte – quella del distacco dal concreto, quella che condurrà a una visione astratta dell'ente matematico, che condurrà alla seconda fase di comprensione della geometria, dove gli enti sono depurati da ogni attributo concreto. E allora, e solamente allora, avrà senso il riordinare la materia secondo una linea deduttiva, a partire da quegli assiomi le cui radici hanno trovato vita, giustificazione e sviluppo nello studio precedente.

Ma uno studio razionale non dovrà mai significare – a mio parere – il distacco totale dal concreto e il disprezzo per il reale, perchè è dal concreto, dalla realtà tangibile, dalla natura delle cose che il pensiero prenderà continua ispirazione per astrarre. Se, infatti, da una parte è vero che l'insegnamento della geometria deve divenire sempre più astratto, d'altra parte, secondo l'impostazione che seguiamo, è altrettanto vero ed essenziale che questo astratto non deve cadere dal cielo, ma deve essere «estratto» dal concreto, e che, in ogni istante, il professore dovrà far comprendere ai propri allievi lo sforzo dell'umanità e non cercare di nascondere le tracce del lavoro, spesso faticoso e arduo e tortuoso, che ha condotto e che conduce alla scoperta; perchè è proprio dalla comprensione attiva di questo lavoro e non dalla contemplazione estatica del risultato ottenuto, che il ragazzo trarrà ispirazione e incoraggiamento per inoltrarsi anch'egli nelle vie della ricerca scientifica.

EMMA CASTELNUOVO.