

Il topo e l'elefante

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni, per affrontare problemi.</p> <p>Elaborare schematizzazioni utilizzando metodi simbolici ed interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata.</p> <p>Produrre soluzioni del problema attraverso una concatenazione delle azioni necessarie.</p> <p>Formulare congetture per esprimere le regolarità.</p>	<p>I polinomi e le loro operazioni.</p> <p>Equazioni e di primo grado in una incognita.</p> <p>Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.</p>	<p><u>Risolvere e porsi problemi</u></p> <p>Numeri ed algoritmi</p> <p>Relazioni e funzioni</p> <p>Argomentare e congetturare</p>	<p>Lingua italiana</p>

Contesto

Aritmetica: numeri razionali.

Il contesto è di tipo matematico e si colloca nell'ambito dell'aritmetica dei numeri interi e razionali. Si propone alla classe un semplice problema che presenta dei risvolti interpretativi e si può risolvere utilizzando più metodi. L'intenzione è anche quella di esaminare singolarmente i metodi risolutivi e poi confrontarli con opportune osservazioni.

Vediamo anzitutto alcuni esempi di problemi che presentano una stessa tipologia. Risolveremo in questa fase (quello che appare) il più semplice di essi invitando a seguire una analoga strada per gli altri.

Problema 1. *Al mercato di Rifredi, con 36 euro si può comprare un maglione, una camicia e nove paia di calzini. Sapendo che due camicie costano quanto un maglione e quattro paia di calzini, quanto costa ogni singolo pezzo di vestiario?*

Problema 2. *Alvaro aveva avuto torroncini in regalo dalla nonna ma quando arrivò a casa li aveva persi tutti. Alla madre che gli chiese quanti torroncini aveva avuto, il nostro amico Alvaro rispose astutamente che la nonna gliene aveva dati in confezioni da tre, Che i torroncini erano prodotti da una famosa ditta di Cremona, che le confezioni erano un numero dispari e che lui aveva pensato che, suddividendole con i suoi quattro amici, ciascuno avrebbe mangiato lo stesso numero di torroncini e che a lui gliene sarebbero rimasti tre in più. Sono sufficienti questi dati per rispondere alla richiesta della madre oppure Alvaro si è dimenticato qualche informazione?*

Il problema precedente presenta tipicamente la richiesta relativa alla (eventuale) esaustività ed alla (eventuale) sovrabbondanza dei dati.

Limitiamoci, come detto a risolvere, come caso propedeutico più semplice, il seguente problema:

Problema. *Un elefante ed un topo pesano assieme una tonnellata ed un etto. L'elefante pesa una tonnellata in più del topo. Quanto pesa il topo?*

Descrizione dell'attività

Il problema viene proposto alla classe nella fase di formalizzazione di un testo e ciascun studente è libero di ragionare per trovare la soluzione. Spesso gli studenti procedono subito per tentativi, senza riflettere prima sull'uso di entrambe le informazioni contenute nel testo. I loro ragionamenti si sviluppano in funzione degli stimoli intellettivi. E' bene comunque sottolineare questo aspetto, che forse in questo caso può sembrare banale, ma che in generale serve ad abituare lo studente al corretto esame del testo.

Un modo empirico per risolvere il problema dato può essere il seguente, che acquista forse più significato se chiamato :

- “Per tentativi”

Si parte dalle osservazioni dei ragazzi che in molti casi rispondono affrettatamente “*un etto*” ma subito si accorgono che la cosa non funziona perché contraddicono la seconda informazione “*che l'elefante ed il topo pesano assieme una tonnellata ed un etto*”

Si può allora far notare che il topo non può pesare 0 g (non esisterebbe) e neppure 100 g perché se così fosse, assieme al peso dell'elefante, non rispetterebbe la seconda informazione.

Non è per risolvere un problema così semplice ma essenzialmente per avviare lo studente alla formalizzazione ed al calcolo letterale che si può costruire la seguente tabella (di lavoro):

<i>Peso del topo:</i> T	<i>Peso dell'elefante:</i> $E=k+T$	<i>Totale:</i> $P=.....$
0 g	1000 kg	1000 kg
100 g	1000 kg e 100 g	1000 kg e 200 g

Tabella 1.a

Nota: È stata usata la lettera **k** per indicare la differenza di peso fra i due animali.

In questo modo si invitano gli studenti a tentare di avvicinarsi alla soluzione per successive approssimazioni ed a costruire la tabella in cui riassumere i risultati

<i>Peso del topo:</i> T	<i>Peso dell'elefante:</i> $E=k+T$	<i>Totale:</i> $P=.....$
<i>Peso del topo</i>	<i>Peso dell'elefante</i>	<i>Totale</i>
10 g	1000 kg e 10 g	1000 kg e 20g
20 g	1000 kg e 20 g	1000 kg e 40g
30 g	1000 kg e 30 g	1000 kg e 50g
40 g	1000 kg e 40 g	1000 kg e 80g
50 g	1000 kg e 50 g	1000 kg e 100g

Tabella 1.b

Si può far notare che questo ragionamento è abbastanza spontaneo da parte degli studenti, ma che è facilitato dal fatto che si sono scelti dati interi.

Come sarebbe la situazione se, elefante e topo pesassero 1000 kg e 133,5 g? Tutto diventa più difficile?

Oppure se l'elefante pesasse 1005 kg?

<i>Peso del topo:</i> T	<i>Peso dell'elefante:</i> $E=k+T$	<i>Totale:</i> $P=.....$
<u> </u> g	1000 kg e <u> </u> g	1000 kg e 133,5 g

A queste domande si inizia a rispondere dicendo che sarà bene porre l'attenzione su un risultato importante che può essere dedotto direttamente dalla Tabella 1.b: il peso del topo è *sempre la metà* della differenza fra il peso complessivo topo-elefante e quello dell'elefante stesso. Tale osservazione ci permetterà poi di proporre una generalizzazione del problema ad altri dati possibili, ottenuta per via intuitiva ed empirica senza l'uso di strumenti sofisticati:

Ed ecco dunque una generalizzazione, attraverso l'uso del calcolo letterale, che giustifica l'intuizione ottenuta.

- Attraverso le equazioni.

Sia **P** il peso complessivo, topo-elefante, **k** la differenza -- che può essere scelta a seconda delle esigenze didattiche -- fra il peso dell'elefante e il peso del topo; e questi sono i nostri **dati iniziali**. Sia poi **T** il peso del topo e sia **E = k + T** il peso dell'elefante. Si nota che da sola l'informazione data dall'uguaglianza **E = k + T**, non ci permette di trovare una soluzione univoca (per **E** e **T**) conoscendo solo il valore di **k**, senza aver fissato il valore di **P**. Occorrerà a questo punto introdurre uno strumento cognitivo più forte che potrà anche consentire agli studenti di avere la certezza di aver trovato (se c'è!) l'unica soluzione possibile del problema assegnato.

Facciamo allora notare che **P** può anche essere scritto come **(k + T) + T = P** e quindi, usando il calcolo letterale, **P = k + 2T**; e ciò giustifica quello che abbiamo ottenuto per via intuitiva: ovvero **che $P - k = 2T$, cioè il peso complessivo meno la "differenza" data inizialmente** (lavorando dunque solo sui dati del problema) è sempre la metà di questa differenza e che questo ci dà pertanto il peso del topo avendosi $T = (P - k) / 2$.

Si devono invitare gli alunni a considerare la natura di queste grandezze, tutte positive, che occorre fissare rispettando dei limiti iniziali (i cosiddetti vincoli). Ciò abitua i ragazzi ad analizzare un testo ed a scoprire, oltre le regolarità, anche la presenza di limitazioni nei valori che possono essere assegnati.

Questo permette poi di generalizzare il risultato nelle situazioni problematiche esposte sopra.

Ad esempio, se insieme pesassero $P = 1000 \text{ kg e } 133,5 \text{ g}$ e $k = 1000 \text{ kg}$, *quanto peserebbe in più del topo l'elefante?*

Possiamo dire subito che $2T = 133,5 \text{ g}$ e quindi, il topo pesa 66,25 g.

Si può anche invitare i ragazzi a provare a cambiare le informazioni iniziali; ad esempio, a trovare il peso dell'elefante sapendo quanto pesa *meno* del topo ed invitarli a fare prove con valori diversi, non interi, ed a trovare analoghe regolarità. Ciò è uno stimolo che può spingerli, motivati, ad usare il calcolo letterale, alla generalizzazione, al trovare relazioni sul problema e sulla natura delle grandezze coinvolte. Un ulteriore spunto interessante di questo problema è anche quello di essere un punto di avvio per la considerazione dei sistemi, qualora si volessero usare contemporaneamente entrambe le informazioni.

Uno strumento utile, per la ricerca empirica della soluzione, può infine essere la predisposizione del foglio elettronico per simulare il processo di soluzione con dati iniziali diversi.