Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare congetture, proprie o altrui, e teoremi.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli.	Argomentare, congetturare, dimostrare Spazio e figure Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Figure geometriche piane.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del primo anno del primo biennio in un contesto tipicamente geometrico, quando gli studenti conoscono già la bisettrice di un angolo e il concetto di rette perpendicolari. Essa viene realizzata con l'ausilio di un software di geometria dinamica, di cui già gli studenti conoscono le funzioni fondamentali, ed ha come obiettivo la scoperta della relazione tra bisettrice e altezza di un triangolo, quando il triangolo è isoscele.
Tale relazione può essere espressa dal seguente teorema:
"Se la bisettrice di un angolo di un triangolo è anche perpendicolare al lato opposto allora il triangolo è isoscele; se il triangolo è isoscele la bisettrice è perpendicolare al lato opposto".

La discussione che segue l'attività di esplorazione offre anche l'occasione di ritornare sul concetto di altezza del triangolo e di darne una definizione rigorosa.
Il percorso si propone i seguenti obiettivi trasversali:
a) esplorare un problema aperto;
b) individuare degli invarianti, tramite le seguenti funzionalità permesse dal software: il trascinamento, la misura e la verifica di proprietà;
c) individuare relazioni geometriche tra figure, mettendo in evidenza i legami funzionali (quali oggetti della figura variano in dipendenza di quali altri) e variazionali (come variano);
d) formulare nuove congetture, tramite l'esplorazione della configurazione geometrica;
e) validare le congetture formulate, tramite prove su casi particolari, o trascinamento, o costruzioni, o altro;
f) dimostrare le congetture formulate.

Descrizione dell'attività

L'attività prevede una fase di elaborazione personale degli allievi e una successiva discussione collettiva delle soluzioni elaborate. In questo modo viene ad essere completamente trasformato il rapporto consueto tra insegnanti e studenti che vorrebbe l'insegnante responsabile della spiegazione e lo studente responsabile dell'applicazione di quanto spiegato: il contratto didattico che si propone, infatti, prevede che studenti e insegnante siano corresponsabili dell'apprendimento.

Il percorso didattico proposto punta sul supporto offerto dal software di geometria al fine di:

- introdurre gli allievi al mondo della geometria euclidea;
- sviluppare la capacità di formulare congetture nonché di elaborare per esse una dimostrazione;
- superare la frattura tra forme spontanee di argomentazione e la modalità specifica di una dimostrazione matematica.

Tecnicamente questi obiettivi si possono ottenere inibendo alcune delle funzioni del software e costruendo un "menu ridotto"[1].

E' esperienza comune che di fronte ai primi teoremi e alla richiesta di fornire una dimostrazione gli studenti incontrino difficoltà nel passare dalle conoscenze intuitive a una prospettiva teorica. Da qui le scelte seguenti:

1) le costruzioni geometriche come contesto tematico nel quale organizzare le attività didattiche;
2) il software come ambiente di mediazione per la costruzione del significato di un teorema;
3) la discussione collettiva in classe come contesto in cui far evolvere i processi argomentativi degli studenti verso la dimostrazione;
4) la verbalizzazione da parte degli studenti delle attività svolte per spingerli a descrivere e commentare la soluzione dei problemi e per seguirli nel loro processo di crescita logico-deduttiva;
5) Un "quaderno" dove gli studenti riportano le definizioni, gli assiomi e le giustificazioni delle costruzioni (teoremi) concordati in classe durante le discussioni collettive.

Si propone il seguente problema (gli studenti hanno a disposizione un software di geometria):
Dato un triangolo, tracciare la bisettrice di uno dei suoi angoli. Può risultare perpendicolare al lato opposto considerato?

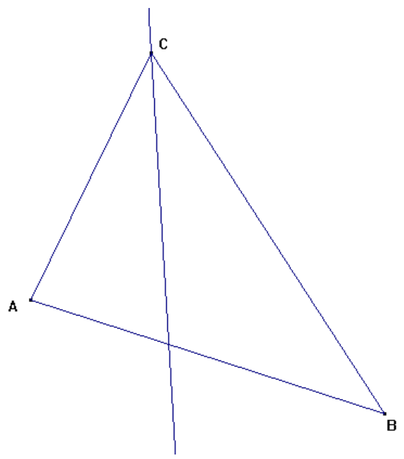

Figura 1

Il triangolo isoscele è una figura fin troppo nota, della quale gli studenti conoscono bene le proprietà più significative. Questo fatto può rivelarsi un ostacolo per riconoscere le relazioni corrette tra le diverse proprietà. In genere gli studenti non distinguono tra proprietà caratterizzanti (stabilite da una definizione) e proprietà da esse derivate (dimostrabili come conseguenze di una

[1] Ad esempio, in Cabri Géomètre, si può usare il menu Opzioni/Configurazione degli strumenti per togliere (o aggiungere) "strumenti" a Cabri. Per esempio, nell'attività proposta si può togliere lo strumento retta perpendicolare dalla casella degli strumenti Costruzioni.

definizione). In altri termini, una definizione è intesa in termini di descrizione, piuttosto che in termini di condizione caratterizzante, dalla quale è possibile dedurre altre proprietà. In questo caso, un triangolo isoscele risulta "definito" da tutte le proprietà note. E' la presenza di questa difficoltà ad offrire l'occasione per affrontare una discussione generale sul significato dell'attività di definizione.
Il punto fondamentale della discussione consiste nel far emergere la formulazione di una congettura basata sull'esplorazione. E' importante arrivare ad una formalizzazione accettata da tutti di una o di entrambe le implicazioni del teorema.
Un punto importante da mettere in luce è comunque la distinzione tra le due implicazioni; si tratta di una buona occasione per suggerire alcune riflessioni sul linguaggio da utilizzare ("se ...allora", "... se e solo se ...") e sulla distinzione tra ipotesi e tesi. Lo spunto può essere infatti offerto dall'analisi degli elaborati prodotti dagli studenti come resoconto delle attività di esplorazione. A questo proposito un'evoluzione possibile della discussione consiste nel raccogliere i suggerimenti che senz'altro qualche intervento offrirà in relazione alle convinzioni che gli studenti hanno maturato durante l'esperienza della scuola media.
La nozione di altezza è nota a tutti ed il termine *altezza* è certamente usato dagli studenti durante la discussione che segue l'attività proposta; il suo uso deve essere sistemato in modo rigoroso attraverso una definizione: l'altezza relativa ad un lato di un triangolo diviene la retta passante per un vertice e perpendicolare al lato opposto.
Si può notare che in questo modo l'altezza viene definita come retta e non come segmento. È bene sottolineare questo aspetto, perché l'idea intuitiva di altezza che gli studenti hanno è legata a quella del segmento (da misurare!) che congiunge il vertice con il piede della perpendicolare. Inoltre, la definizione dovrebbe sottolineare il legame tra il vertice ed il lato opposto rispetto ai quali si considera la perpendicolare. Tutto questo dovrebbe aiutare a superare le difficoltà legate allo stereotipo dell'altezza come "segmento verticale che sta all'interno del triangolo".
L'attività si può suddividere in quattro fasi.
<u>Prima fase</u>
Gli studenti lavorano al computer con un menu ridotto con la modalità di trascinamento e prendono nota, individualmente, di tutto quello che osservano sul loro quaderno.
<u>Seconda fase</u>
Discussione collettiva sui risultati dell'esplorazione.
<u>Terza fase</u>
Sistemazione formale delle osservazioni e formulazione del teorema ("se in un triangolo la bisettrice di un angolo è perpendicolare al lato opposto, esso è isoscele; e viceversa") e condivisione della dimostrazione.
<u>Quarta fase</u>
Definizione rigorosa di altezza applicata alla geometria del triangolo.

Possibili sviluppi
1. Un'attività che può essere iniziata a questo punto e può essere ripresa anche successivamente, è quella del confronto fra testi, ovvero chiedendo agli studenti di confrontare formulazioni differenti di enunciati di proprietà geometriche per stabilire se abbiano lo stesso significato o meno.

2. Come approfondimento si può discutere in classe su questo problema (con "carta e matita" oppure con l'uso di software di geometria):
In un triangolo *ABC* si tracciano le bisettrici degli angoli *A* e *B* (Figura 2). Sia *O* il loro punto di incontro. E' possibile, modificando opportunamente i lati del triangolo *ABC*, fare in modo che le due bisettrici siano tra loro perpendicolari? Scrivere tutte le osservazioni.

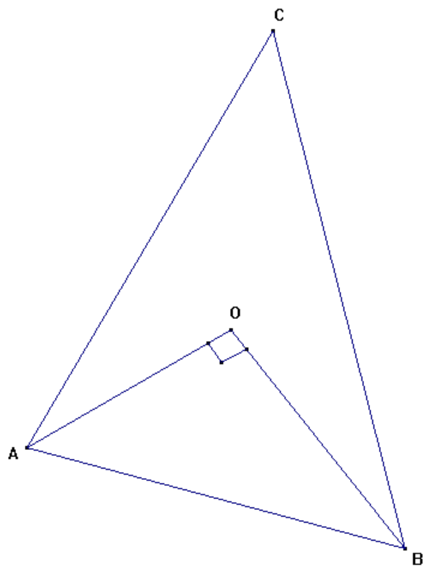

Figura 2

3. Si propone, con l'uso di un software di geometria, la seguente attività di "esplorazione":
In un triangolo rettangolo *ABC*, tracciare le bisettrici degli angoli acuti *B* e *C*. Sia *P* il loro punto di incontro. Descrivere le posizioni di *P*, al variare dei vertici *B* e *C* su due rette perpendicolari in *A*. Scrivere tutte le osservazioni.

(In Figura 3 sono riportate alcune delle posizioni di *P*).

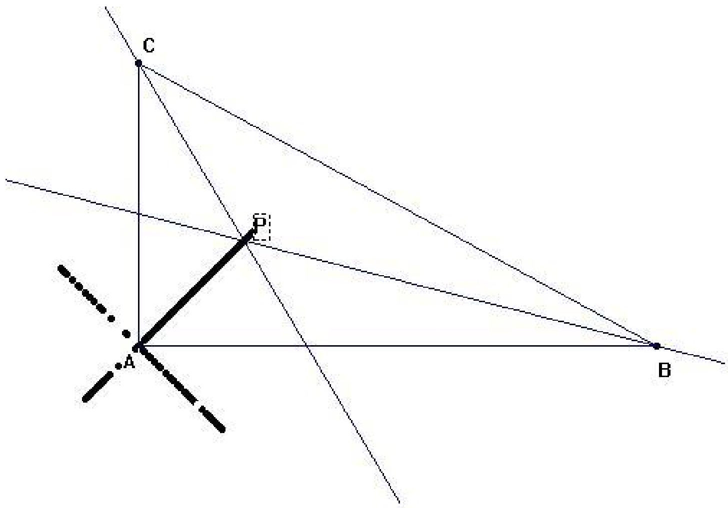

Figura 3

Elementi di prove di verifica

1. Considerare la bisettrice dell'angolo interno *BAC* di un triangolo *ABC*. Sia *M* il punto in cui tale bisettrice interseca il lato *BC* del triangolo. Sotto quali condizioni il triangolo *AMB* è isoscele? Sotto quali condizioni sono isosceli sia il triangolo *AMB*, sia il triangolo *AMC*? Giustificare le risposte.

2. Sia dato un triangolo isoscele avente come lati congruenti *AC* e *BC*. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo *ACB* lo divide in due triangoli congruenti.

3. Siano dati due triangoli *ABC* e *A'BC* che hanno il lato *BC* in comune e che sono situati da parti opposte rispetto a *BC*. Inoltre è noto che il lato *BC* sta sulla bisettrice degli angoli *ABA'* e *ACA'*. Dimostrare che i triangoli *ABA'* e *AA'C* sono isosceli. Dimostrare anche che, comunque si prenda un punto *M* su *BC*, la retta passante per *M* e per *B* incontra il segmento *AA'* nel suo punto medio *H*.

4. Sia dato un angolo *ABC*. Considerare la semiretta *BX* di origine *B* che sia bisettrice dell'angolo *ABC* e una retta *r* che intersechi *BX* in un punto *H* e formi con *BX* quattro angoli congruenti. Siano *M* e *N* le due intersezioni di *r* con i lati dell'angolo *ABC*. Dimostrare che *BMN* è isoscele.

5. Disegnare l'asse del segmento *AB* e la bisettrice dell'angolo *POQ* di figura utilizzando i seguenti strumenti e metodi:
a) matita, carta riga non graduata e compasso
b) matita, carta, riga graduata, squadra e goniometro
c) matita, carta e piegamenti della carta
d) un software di geometria.

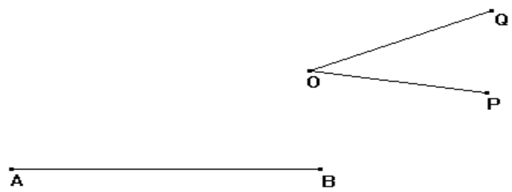

Figura 4

6. Dati una retta *r* e due punti *A* e *B* situati dalla medesima parte di *r*, determinare il cammino più breve che si deve compiere sul piano per andare da *A* a *B* toccando *r*.

7. Tracciare la traiettoria che si deve far compiere a una palla da biliardo per passare da una posizione *A* a una posizione *B*, toccando nell'ordine le sponde *r* e *s* (Figura 5).

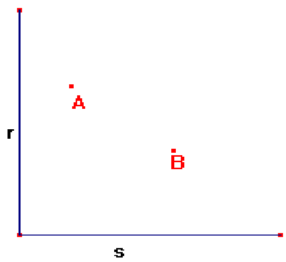

Figura 5