Diverse scritture per una formula

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scoprire e descrivere regolarità in situazioni osservate. Usare linguaggi :linguaggio simbolico dell'algebra elementare. Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare</u> Numeri e algoritmi	

Contesto
Aritmetica: numeri interi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo biennio, quando gli studenti sanno calcolare il valore di un'espressione numerica e algebrica.
L'attività:
- è pensata per un avvio precoce, ma "sensato" al linguaggio dell'algebra,
- è un problema aperto,
- può essere svolta con carta e matita, ma anche con l'ausilio di strumenti di calcolo.

Ha per obiettivi:
- favorire la produzione di congetture,
- avviare, quando opportuno, alla formalizzazione nel linguaggio dell'algebra,
- avviare alla validazione delle congetture.

Descrizione dell'attività
E' consigliabile che:
- i problemi proposti vengono svolti in piccoli gruppi e che poi le strategie di approccio al problema vengano condivise e discusse alla presenza dell'intera classe, con la mediazione e il coordinamento dell'insegnante,
- durante l'attività di gruppo l'insegnante non intervenga, ma osservi sia i processi che gli studenti individualmente mettono in atto, sia il tipo di interazioni tra i membri del gruppo,
- l'attenzione dell'insegnante sia maggiormente concentrata sulla scelta delle strategie da parte degli studenti e sul processo risolutivo, piuttosto che sul prodotto finale,
- l'insegnante, nella fase di discussione collettiva, evidenzi limiti e potenzialità dell'uso del linguaggio algebrico nella validazione delle congetture prodotte nell'affrontare i problemi proposti.

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti il seguente problema: *Che cosa si può dire sulla somma di due numeri dispari consecutivi? Giustifica le tue affermazioni.*

La risposta si ottiene immediatamente con l'uso del linguaggio dell'algebra: $2n-1+2n+1=4n$.
Si deduce che la somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 4.
Non è questa l'unica strategia risolutiva né l'unica forma di scrittura (altre possibili sono: 2n + 1 + 2n + 3, d + d + 2): fra le altre, è possibile anche utilizzare esclusivamente il linguaggio naturale e schemi mentali organizzati sulla retta numerica. In tal caso si potrebbe notare che la somma di due numeri dispari consecutivi è il doppio del numero pari che è compreso fra i due numeri dispari e quindi, essendo il doppio di un numero pari, è divisibile per 4 (o altre parafrasi indotte dalla scrittura).
In questa fase l'insegnante osserva l'attenzione degli studenti nella lettura e nella comprensione del testo (valuta chi dimostra di comprendere il testo, per esempio provando con numeri dispari consecutivi, rispetto a chi dimostra di non comprenderlo, per esempio usando numeri che non sono dispari o che non sono consecutivi). Si tratta di una valutazione dell'attenzione al compito proposto e del livello di concentrazione nell'attività da svolgere. La valutazione è significativa, perché il fatto che gli studenti lavorino in gruppo consente un controllo che non sarebbe possibile nel lavoro individuale e quindi minimizza il rischio di errori dovuti a semplice distrazione.

Seconda fase

Risoluzione del problema.

- Possibili approcci risolutivi del problema

I gruppi possono:

- esplorare con numeri "piccoli",
- esplorare con numeri "grandi" (potrebbero dare l'impressione di una maggiore generalità nell'"esplorazione, rispetto a quella consentita da numeri "piccoli"),
- esplorare con numeri sia "piccoli" che "grandi",
- formalizzare con espressioni del tipo $a + b$, … ,
- formalizzare con espressioni del tipo $d + d + 1 = 2d + 1$, oppure $d + d + 2 = 2d + 2$, usando la lettera d come abbreviazione della parola "dispari". In tal caso vi è un uso della lettera come "etichetta", che non favorisce successive e significative esplorazioni. Nelle eventuali successive esplorazioni, valutare anche se gli studenti sostituiscono a d valori che contraddicono l'ipotesi che d sia dispari: ciò potrebbe suggerire una difficoltà a mantenere il significato di una formula. Valutare inoltre se gli studenti non sanno andare avanti, oppure se interpretano il risultato, riconoscendo semplicemente che si tratta di un numero pari (in tal caso si può supporre che siano nel *frame* pari-dispari, invece che in quello dei multipli),
- usare il linguaggio naturale come strumento di controllo e di operazione:

  "dispari più dispari = pari",
- avere già in mente una possibile modellizzazione: per esempio rappresentare i numeri su una retta e concludere che il numero cercato è il doppio del numero "di mezzo"; oppure usare palline che raggruppano opportunamente, come mostrato in Figura 1

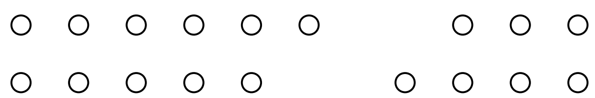

Figura 1

- mettere in formula in maniera opportuna:

$$(2n + 1) + (2n + 3) = 4\,n + 4, \text{ oppure } (2n - 1) + (2n + 1) = 4\,n,$$

e concludere che si tratta di un multiplo di 4.

- Possibili atteggiamenti nei confronti del problema

Gli studenti:

- utilizzano i numeri per fare una congettura e danno una giustificazione del risultato a livello empirico ("va bene nei casi verificati, quindi va bene sempre"),
- utilizzano i numeri per esplorare, fanno una congettura, sono consapevoli della necessità di una giustificazione generale, ma non riescono a trovarla,
- imboccano una strada infruttuosa utilizzando un formalismo non adeguato e si bloccano,
- riescono a giustificare in modo soddisfacente il risultato congetturato.

Terza fase

Comunicazione dei risultati, osservazioni possibili.

Gli studenti:

- non riescono a esprimere in maniera chiara i risultati del lavoro di gruppo,
- si rivolgono, nel linguaggio e nel riferimento ai contenuti, solo all'insegnante,
- si rivolgono, nel linguaggio e nel riferimento ai contenuti, in maniera comprensibile ai componenti del gruppo e a tutta la classe,
- utilizzano il linguaggio naturale per supportare il ragionamento (in fase di scoperta?, in fase di sistemazione e di comunicazione?),
- espongono i risultati facendo uso di un linguaggio simbolico adeguato (in fase di scoperta?, in fase di sistemazione e di comunicazione?).

Quarta fase

Discussione collettiva.

Durante la discussione collettiva, alla presenza dell'intera classe, l'insegnante, nell'ottica dell'apprendistato cognitivo ([1]), avvia lo studente verso l'uso del linguaggio algebrico come linguaggio per generalizzare e dimostrare (spiegare all'interno di una teoria) le congetture prodotte. Nella conduzione delle discussione matematica in classe, l'insegnante deve sempre avere presenti problematiche di tipo storico-epistemologico, sia di tipo cognitivo, sia di carattere psico-pedagogico relative agli argomenti oggetto di trattazione e alle metodologie utilizzate.

Possibili sviluppi

- Differenza fra in quadrati di numeri dispari consecutivi.
- Somma di tre numeri dispari consecutivi.

[1] Vedi Indicazioni metodologiche.