Quanto costa una pizza all'equatore

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni e fenomeni matematici e non, per affrontare problemi. Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. Confrontare i risultati con le aspettative. Individuare le cause delle inadeguatezze con opportuni elementi di controllo ritenuti importanti all'avvio del processo risolutivo. Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità.	Omotetie e similitudini nel piano. Lunghezza della circonferenza ed area del cerchio. Area e volume dei solidi.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Spazio e figure Argomentare, congetturare, dimostrare	Geografia astronomica Fisica

Contesto
Misure.

L'attività si colloca trasversalmente a varie conoscenze geometriche.
L'attività descritta rappresenta un buon esercizio sulle similitudini. I problemi proposti, in particolare i primi due, mettono in luce che l'intuizione è un aspetto importante nell'attività matematica, ma che è necessario supportarla con un corretto ragionamento ed una attenta analisi dei risultati. L'intuizione da sola può condurre ad affermazioni errate. Il terzo problema è di tipo aperto e invita a produrre delle congetture su un dato mancante e a sostenerle con ragionamenti pertinenti.
La serie di attività proposte richiede conoscenze che si acquisiscono durante il terzo e il quarto anno del corso di studi, per cui l'attività può essere suddivisa in tali anni. Per il suo svolgimento si utilizzano immagini del globo terrestre ed altre di oggetti tratti dall'esperienza quotidiana. Lo studente deve avere una buona conoscenza delle figure geometriche del piano e capacità di visione spaziale. Deve anche conoscere e sapere applicare le proprietà delle similitudini, nonché i concetti di peso e peso specifico.

Descrizione dell'attività
L'attività prevede la risoluzione di tre problemi che, per la loro apparente semplicità, potrebbero indurre gli studenti a fornire soluzioni di tipo immediato. Esse richiedono, invece, una riflessione attenta sulle proprietà delle figure geometriche e sulle relazioni tra esse.

Primo problema

- Si stende un nastro intorno alla superficie terrestre lungo tutto l'equatore e si osserva che la sua lunghezza deve essere circa 40.076.000 m, essendo il raggio *r* della terra, se questa è assimilata ad una sfera, lungo 6.370.000 m. Se si allunga il nastro di 2π metri (poco più di 6 metri e 28 centimetri), il nuovo nastro, disposto simmetricamente rispetto al centro della terra, si solleva abbastanza da consentire ad un coccodrillo di passarci sotto?
  (Nota: l'altezza media di un coccodrillo è di circa mezzo metro).

L'insegnante invita gli studenti a fornire una risposta e a giustificarla.
(Si avvia una discussione tra gli studenti: eccone una ragionevole sintesi, in una classe immaginaria).

Luca: *Non ci passa sicuramente perché, ben che vada, il nastro si alzerà di pochi millimetri; il nastro lungo quanto l'equatore non si accorge neppure dell'aggiunta di sei metri.*
Giovanni: *Hai ragione, al più ci potrà passare un foglio di carta sotto il nastro.*
Enrico: *Sono d'accordo, però mi piacerebbe sapere di quanti millimetri si solleva precisamente; facciamo il calcolo.*
Osservano allora che la lunghezza del nastro è $2\pi r$ metri e, se si aggiunge un altro pezzo lungo 2π *metri*, la lunghezza del nastro diventa $2\pi r+2\pi =2\pi (r+1)$ *metri.*
La conversazione riprende:
Luca: *Il raggio della nuova circonferenza misura (r+1) metri. Allora si solleva di un metro!*
Giovanni: *Se mi accuccio ci passo anche io!*
Enrico: *Il risultato sembra strabiliante, ma se ci pensiamo, come sei metri sono pochissimi rispetto alla lunghezza dell'equatore, anche un metro è poco rispetto alla lunghezza del raggio della terra. Infatti, il rapporto tra lunghezza di una circonferenza e del suo raggio è costante e vale* 2π.

Considerazioni matematiche.
Le circonferenze sono figure simili. Il rapporto delle lunghezze delle circonferenze è uguale al rapporto dei loro raggi.

Secondo problema

- Due amici, in pizzeria, ordinano due pizze napoletane: Andrea la prende normale, Paolo invece la sceglie "gigante". Quando gliele portano i due amici osservano che sono perfettamente circolari; la normale ha raggio 20 cm, la gigante 30 cm e sono anche dello stesso spessore. Quando portano il conto, Andrea deve pagare € 6,4 mentre Paolo, vedendo il suo conto, che è di € 12, si sorprende: "*Come mai la mia pizza costa quasi il doppio, mentre il raggio è aumentato solo del 50%" ?.*

Affidiamo la risposta alla nostra solita classe immaginaria.

Luca: *Paolo ha ragione: avendo la pizza più grande il raggio una volta e mezzo quello della più piccola, basta aggiungere la metà di 6,4 € cioè 3,2 €.Il prezzo giusto dovrebbe essere 9,6 €.*
Giovanni: *Però con le pizze così grandi - le maxi pizze - ci si mangia in due e mi ricordo che si paga molto di più.*
Enrico: *Facciamo il calcolo di quanta pizza in più c'è. Calcoliamo l'area del cerchio della prima pizza e quello della maxi pizza e proviamo a fare il rapporto.*

L'area della prima pizza è πr^2; l'area della maxi pizza è $\pi\left(r+\frac{r}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{3}{2}r\right)^2=\frac{9}{4}\pi r^2$.Il rapporto tra l'area della maxi pizza e quella della pizza normale è $\frac{9}{4}=2{,}25$.

Luca: *E' più che raddoppiata!*
Giovanni: *Ecco perché ci si mangia in due.*
Luca: *Che strano il raggio era aumentato solo della metà.*
Enrico: *Già, ma il rapporto tra le aree di due cerchi, che sono figure simili, è uguale al quadrato del rapporto tra i loro raggi. Perciò se si considerano due cerchi di raggi* $\frac{3}{2}r$ *ed r, come sono le pizze considerate, il rapporto tra i loro raggi è* $\frac{3}{2}$ *e il quadrato è* $\frac{9}{4}=2{,}25$. La maxi pizza deve costare 6,4 x 2,25 *€= 14,4 €. Quindi a Paolo, il pizzaiolo, ha fatto addirittura lo sconto !*

Considerazioni matematiche
I cerchi sono figure simili. Il rapporto delle aree dei cerchi è uguale al quadrato del rapporto dei loro raggi.

<u>Terzo problema</u>

- Negli Stati Uniti le monete da 50 cent e da 10 cent sono entrambe d'argento ed hanno un peso proporzionale al loro effettivo valore. Proviamo a disporre delle monetine da 10 cent sulla moneta da 50 cent, senza che si sovrappongano e non debordino dal contorno della moneta grande. Quante monete da 10 cent riusciamo a mettere?

Luca: *Bisognerebbe fare un modellino delle monete.*
Giovanni: *Ritagliamole da un foglio di carta.*
Luca: *Prendo il compasso per disegnarle.*
Giovanni: *Ma che raggi diamo?*
Luca: *La più grande vale 50 cent, la più piccola 10 cent; perciò io darei alla più grande un raggio di 5 cm e alla più piccola di 1 cm.*

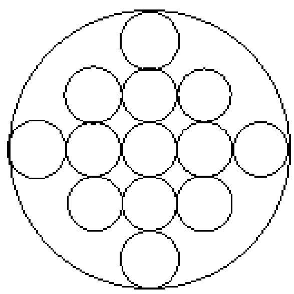

Figura 1

Enrico: *13 monetine mi sembrano troppe. Quando sono stato negli Stati Uniti ho visto le monete e quelle da mezzo dollaro non mi sembravano così grandi. Il problema afferma che le monete hanno un peso proporzionale al loro valore, ovvero la moneta da mezzo dollaro pesa 5 volte la moneta da 10 cent. Essendo entrambe d'argento anche i loro volumi sono nello stesso rapporto. E siccome le monete sono dei cilindri dobbiamo conoscere il loro spessore. Siccome non abbiamo questo dato possiamo tentare delle ipotesi.*
Giovanni: *Le monete potrebbero avere lo stesso spessore.*
Luca: *Mi sembra poco verosimile: ho sempre visto le monete di maggior valore più spesse.*
Giovanni: *Allora potrebbero avere altezze proporzionali.*
Insegnante: *Dovete dire proporzionali a che cosa e in che modo.*

Giovanni: *Potrebbero essere due cilindri simili.*
Insegnante: *Che cosa intendi?*
Giovanni: *Il rapporta tra le misure è costante.*
Insegnante: *Quali misure?*
Giovanni: *Ad esempio quelle dei raggi di base e delle altezze.*
Insegnante: *Questa ipotesi è sensata.*
Enrico: *Proviamo con questa ipotesi a calcolare questo rapporto. Chiamiamolo **k**. I raggi di base li chiamiamo r (10 cent) e R (50 cent); le altezze rispettivamente h e H . Il volume del cilindro della moneta da 10 cent è* $\pi r^2 h$ *e quello della moneta da 50 cent è* $\pi R^2 H$*. Poiché* $R= \mathbf{k}\, r$ *;* $H= \mathbf{k}\, h$ *, il volume della moneta da 50 cent diventa* $\pi (\mathbf{k}\, r)^2 \mathbf{k} h = \pi \mathbf{k}^3 r^2 h$ *. Il rapporto tra il volume della moneta da 50 cent e quello della moneta da 10 cent è dunque* $\mathbf{k}^3$*. Allora il rapporto dei volumi è uguale al cubo del rapporto dei raggi di base e delle altezze. Siccome questo rapporto è 5, risulta* $k = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$ *circa. La moneta da 50 cent ha un raggio che non è neppure il doppio di quello della moneta da 10 cent.*
Giovanni: *Con questa ipotesi, dunque, non è possibile metterne neppure due, ma solamente una. Questa risposta mi convince perché lo stesso accade con le nostre monete da 50 e 10 centesimi di euro.*

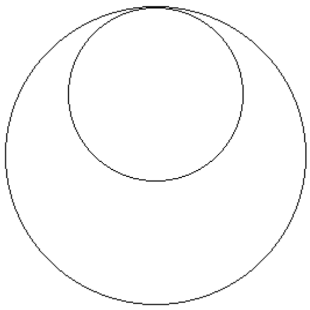

Figura 2

Considerazioni matematiche
I due cilindri, nella ipotesi fatta, sono figure simili (il docente può spiegare intuitivamente il significato di solidi simili). Il rapporto dei volumi è uguale al cubo del rapporto dei raggi di base oppure al cubo del rapporto delle altezze.

Sintesi matematica
Possono essere messe a confronto le tre situazioni, evidenziando la proporzionalità “lineare”, la proporzionalità “quadratica” e quella “cubica”.