Attività con software geometrico

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a contro-esempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare congetture, proprie o altrui, e teoremi.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare</u> Spazio e figure Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto
Figure geometriche.

Nel seguito sono proposte attività di risoluzione di problemi presentati in forma “aperta”, cioè che presentano le seguenti caratteristiche:
- hanno un enunciato abbastanza corto;
- non contengono in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi;
- non inducono automaticamente a uno specifico metodo di risoluzione;
- non contengono l’esplicitazione di tutte le richieste; le domande poste sono del tipo:

“*Quali configurazioni assume ... Quali relazioni puoi trovare tra ...*”.
I problemi si presentano come situazioni in cui lo studente deve esplorare, utilizzando ciò che gli viene suggerito e anche ciò che egli stesso ritiene utile, per trarre delle conclusioni che non si configurano come “il risultato”, ma come le conseguenze delle premesse che ha usato.
Gli studenti generalmente risolvono i problemi sul foglio del quaderno, mentre qui il software di geometria dinamica affianca l’uso di carta e matita.
I livelli di utilizzo del software sono diversi. A un primo livello il software è utilizzato per mostrare un disegno “costruito bene”, quindi come uno strumento utile a soppiantare carta e matita laddove si voglia raggiungere un alto grado di precisione. In questo caso l'utilità rimane a livello grafico, senza sfiorare la dinamicità del trattamento delle figure.
A un secondo livello può essere utilizzato per visualizzare oggetti geometrici che, se trascinati, mettono in evidenza proprietà e invarianti legati alla trattazione degli argomenti curricolari di geometria. In questo caso si sfrutta la potenzialità della “funzione di trascinamento” (dragging), ma l'uso del pacchetto è ancora nelle mani dell'insegnante, che mostra risultati di procedure preparate precedentemente.
Un terzo livello di lavoro è quello in cui il software viene utilizzato dagli studenti, per costruire figure geometriche sotto precise consegne, giustificando o meno le scelte fatte.
Infine, il software può essere utilizzato per scoprire proprietà indagando su figure costruite.

È difficile che il primo livello di utilizzazione del pacchetto incida molto sull'attività tradizionale di spiegazione-studio-dimostrazione-esercizio, mentre col secondo livello di utilizzo è più facile che ci sia una modificazione non solo dell'approccio degli studenti a un problema di geometria, ma anche della visione che essi hanno dei contenuti, dei metodi e dello statuto conoscitivo della disciplina stessa.
Vengono proposti agli studenti due tipi di problemi: quelli con richiesta di congetture e dimostrazioni, detti "di esplorazione", e quelli con richiesta di costruzione e validazione, detti "di costruzione".
L'attività di costruzione e quella di esplorazione nel software risultano in realtà strettamente interdipendenti.
Ad esempio, una volta formulata una congettura in un problema di esplorazione, si può cercare di fare una costruzione per validare la scoperta: si può costruire una figura con la proprietà congetturata e vedere se essa supera il test del trascinamento.
Ogni proposta di lavoro nei problemi di esplorazione, si articola in tre fasi diverse:
Prima fase - lavoro a gruppi utilizzando il software e compilazione di schede;
Seconda fase - discussione in classe sulle scoperte e sistematizzazione da parte dell'insegnante;
Terza fase - dimostrazione delle congetture.
Lo studio della geometria affrontato per scoperta e non in modo passivo rende il lavoro più stimolante di quello di un percorso tradizionale.

Prima fase

In questa fase l'insegnante ha un ruolo molto delicato; egli deve riuscire a:

- evitare che i suoi interventi "chiudano" il problema;
- evitare che i suoi interventi sopprimano l'autonomia dell'alunno;
- incoraggiare la ricerca;
- non classificare un risultato in "giusto" o "sbagliato", ma far capire allo studente che qualunque tentativo può farlo progredire nella sua ricerca;
- non stabilire a priori che cosa si può fare e che cosa non si può fare;
- interagire con i vari gruppi senza che i suoi interventi orientino in modo determinante l'attività degli studenti.

Al termine del lavoro in laboratorio l'insegnante raccoglie tutte le schede e qualunque altro materiale utilizzato per la produzione dei risultati.

Seconda fase

La seconda fase è collettiva, in essa sono presentate e discusse le decisioni e le soluzioni di ogni gruppo. Questa discussione di bilancio consiste nell'interazione del gruppo-classe orchestrata dall'insegnante. In questi problemi si sottolineano con gli studenti gli elementi delle procedure del software che sono già passi di dimostrazione, procedendo così in modo continuo dalla congettura alla dimostrazione. Spesso le dimostrazioni possono già essere fatte in classe durante il lavoro a gruppi, direttamente ragionando sulle figure del software. Nella fase di discussione esse vengono esplicitate, poi vengono riscritte in modo preciso. In realtà non si insiste sull'aspetto formale delle dimostrazioni, prestando invece maggiore attenzione alla loro costruzione.

Terza fase

L'ultima fase viene svolta singolarmente dagli studenti, che consegnano poi all'insegnante la dimostrazione delle congetture.
Durante l'attività di gruppo il ruolo dell'insegnante è di aiuto per coloro che si trovano in difficoltà nella risoluzione della proposta di lavoro. Egli non suggerisce né risolve il problema al posto degli studenti, bensì pone domande opportune, in modo che siano gli stessi allievi a trovare le risposte ai loro dubbi.

Descrizione dell'attività

Nel seguito vengono proposti alcuni problemi da risolvere con l'uso di un software geometrico.

In queste attività viene usato il software Cabri Géomètre, ma l'insegnante potrebbe usare eventualmente anche un altro software. I problemi sono di tre livelli e vanno affrontati nell'ordine proposto.

Livello A

Problemi di costruzione

1. Costruire l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo senza utilizzare i comandi del menu.
2. Costruire un triangolo equilatero di lato dato.
3. Dividere un segmento in *n* parti uguali mediante una costruzione.
4. Costruire un quadrato di lato dato.

Problemi di esplorazione

1. *Sia data una circonferenza di centro O.*
   Proposta di lavoro:
   - costruire un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza; siano *A*,*B*,*C*,*D*, i suoi vertici;
   - facendo variare il quadrilatero *ABCD*, quali quadrilateri particolari si possono ottenere?
   - C'è una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Si può trovare una condizione per decidere se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza?

2. *Sia dato un parallelogramma ABCD, tre rette passanti per A, B, C e parallele tra loro e una retta qualunque passante per D. Siano E, F e G i punti di intersezione delle tre rette parallele con quella uscente da D.*
   Proposta di lavoro: studiare le relazioni che sussistono tra il segmento *BF* e i segmenti *AE*, *CG*
   - al variare della retta per *D* in un fascio tenendo fisse le parallele;
   - al variare delle parallele tenendo fissa la retta per *D*.

3. *Sia dato un triangolo equilatero.*
   Proposta di lavoro: studiare la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolari condotti da un punto interno (esterno) a ciascuno dei tre lati.

4. *Sia dato un triangolo ABC.*
   Proposta di lavoro: quali ipotesi si devono aggiungere su *ABC* affinché risulti divisibile in due triangoli isosceli?

Livello B

Problemi di costruzione

1. *Siano dati una retta t, un suo punto P e un punto Q non appartenente a t.*
   Proposta di lavoro:
   - costruire la circonferenza che passa per *P* e *Q* ed è tangente a *t* in *P*;
   - giustificare la correttezza della costruzione.

2. *Costruire un parallelogramma data la lunghezza delle sue diagonali.*
3. *Costruire una circonferenza dati due suoi punti e la lunghezza del raggio.*
4. *Costruire una parabola come luogo geometrico.*

<u>Problemi di esplorazione</u>

1. *Siano date due circonferenze C e C' con centri O e O' che si intersecano in due punti distinti A e B; siano D ed E i punti diametralmente opposti ad A rispettivamente su C e C'.*

   Proposta di lavoro:
   - che relazione c'è tra i punti *D*, *B* ed *E*?
   - Quali relazioni ci sono tra i segmenti *DE* e *OO'* ?
   - Che tipo di quadrilatero è *DOO'E*?
   - Quali configurazioni particolari può assumere? Dalla variazione di quali oggetti dipendono queste configurazioni?

2. *Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N e P rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.*

   Proposta di lavoro:
   - quali proprietà ha il quadrilatero *LMNP*?
   - Quali configurazioni particolari assume il quadrilatero *LMNP*?
   - Quali ipotesi occorre fare sul quadrilatero *ABCD* affinché *LMNP* assuma tali configurazioni particolari?

   Scrivere le proprie congetture e dimostrarle.

3. *Sia dato un triangolo.*

   Proposta di lavoro:
   - tracciare le mediane, le altezze e gli assi;
   - studiare la relazione che esiste tra baricentro, ortocentro e circocentro.

4. *Sia dato un quadrilatero ABCD. Tracciare gli assi a del lato AB, b del lato BC, c del lato CD, d del lato DA. Sia H il punto di incontro degli assi a e b, K il punto di incontro di a e d, L il punto di incontro di c e d, M il punto di incontro di c e b.*

   Proposta di lavoro:
   - studiare come varia *HKLM* al variare di *ABCD*;
   - dimostrare le congetture prodotte durante l'esplorazione fatta in Cabri.

5. *Sia ABCD un parallelogramma qualsiasi. Si costruisca il punto P_2 proiettando il suo centro su AB, parallelamente a BC. Il segmento P_2D incontra la diagonale AC in un punto; si costruisca il punto P_3, proiettando tale punto su AB, parallelamente a BC. Analogamente si costruiscano i punti P_4, P_5, ..., P_n.*

   Proposta di lavoro: qual è la lunghezza di AP_n , in funzione di *AB*?

Livello C

<u>Problemi di costruzione</u>

1. *Costruire una tangente comune a due circonferenze.*
2. *Data una circonferenza C_1 e una circonferenza C_2 tangente internamente a C_1, costruire una circonferenza C_3 tangente esternamente a C_2 e internamente a C_1.*

<u>Problemi di esplorazione</u>

1. *Sia* dato *un quadrilatero ABCD. Considerare le bisettrici dei quattro angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M (in senso orario).*

   Proposta di lavoro:
   - far variare *ABCD*, esaminando tutti i casi particolari: come cambia la figura *HKLM*?
   - Scrivere tutte le scoperte e congetture e dimostrarle.

2. *Tre circonferenze aventi lo stesso raggio passano per un punto comune P.*
 Proposta di lavoro:
 - esiste una relazione tra gli altri tre punti di reciproca intersezione?
 - E tra i loro tre centri?

3. *È stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:*
 vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P_1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P_2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P_1P_2.
 Proposta di lavoro: Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Potrà trovare ugualmente il tesoro?

4. *Sia dato un quadrilatero ABCD. Sui suoi lati costruire quattro quadrati esternamente al quadrilatero. Determinati i centri dei quattro quadrati, unirli per ottenere il quadrilatero EFGH.*
 Proposta di lavoro:
 - quali configurazioni può assumere *EFGH*, al variare di *ABCD*?
 - Dimostrare le congetture formulate.