# Il biliardo

**Livello scolare:** 2° biennio

| **Abilità interessate** | **Conoscenze** | **Nuclei coinvolti** | **Collegamenti esterni** |
|---|---|---|---|
| Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non, per affrontare problemi.<br>Produrre una soluzione del problema attraverso un'opportuna concatenazione delle azioni necessarie (costruzioni geometriche).<br>Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie. | Isometrie nel piano: simmetrie e traslazioni.<br><br>Proprietà delle figure geometriche.<br><br>Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie. | Risolvere e porsi problemi<br><br>Spazio e figure | Fisica<br><br>Disegno |

**Contesto**
Trasformazioni geometriche.

L'attività si colloca nell'ambito sia matematico sia extramatematico; per quest'ultimo aspetto riguarda la vita sociale.
Il problema proposto si colloca nel secondo biennio con l'obiettivo di applicare le isometrie, e non semplicemente definirle e descriverle, ad una situazione reale che è quella che si presenta nel gioco del biliardo, quando si vuole che la biglia colpita segua un certo percorso. Il problema si presta anche ad una soluzione analitica che, tuttavia, si presenta eccessivamente complessa. L'esempio vuole dimostrare l'importanza di una scelta di metodo conveniente per il problema posto. L'alunno deve conoscere le isometrie del piano, le loro composizioni, la disuguaglianza triangolare, e le equazioni e i sistemi lineari.

**Descrizione dell'attività**
Il problema consiste nell'individuare la direzione di lancio della biglia, che si trova inizialmente in un punto *P* del biliardo, in modo che, dopo aver battuto successivamente contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il punto *P*.

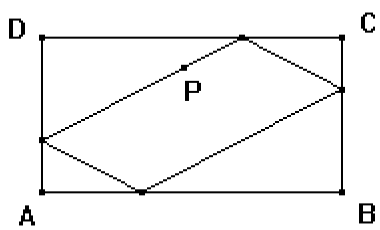


*Figura 1*

Conviene proporre dapprima dei problemi più semplici al fine di abituare lo studente all'utilizzo delle trasformazioni geometriche come metodo di risoluzione di problemi. Lo studente potrà in tal modo apprezzare la potenza di un metodo diverso da quelli consueti, più idoneo in taluni casi a fornire soluzioni rapide ed eleganti.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante propone agli studenti il problema noto come *Problema di Erone*, formulato con riferimento ad un contesto del mondo reale.

- Una persona che si trova in una posizione *A* deve andare a riempire dei secchi d'acqua, attingendo da un ruscello posto ad una certa distanza, e portarli ad una fattoria che si trova in un punto *B* dalla stessa parte di *A* rispetto al ruscello, facendo il cammino più breve. Si chiede di aiutare la persona ad individuarlo.

Lo studente intuitivamente comprende che il cammino deve essere rettilineo dal punto A al ruscello; poi, ancora rettilineo, dal fiume alla fattoria. Rappresentando il fiume con una retta *r* si può visualizzare la situazione con la seguente figura:

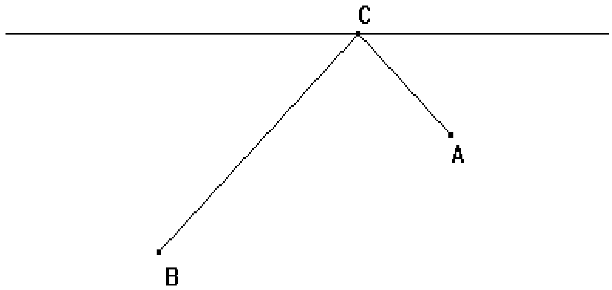


*Figura 2*

Il problema si presenta allora come un problema di minimo: dati due punti *A* e *B*, posti dalla stessa parte di una retta *r*, determinare su essa un punto *C* tale che $\overline{AC} + \overline{CB}$ sia minimo. La risoluzione analitica è, dal punto di vista operativo, non semplice e utilizza strumenti matematici non ancora noti allo studente.
L'insegnante pone la seguente domanda alla classe.
"Se la fattoria stesse dall'altra parte del ruscello in un punto *B'* e non ci fossero problemi di attraversamento del ruscello, quale sarebbe il cammino più breve?"
La risposta è ovvia: "Il segmento *AB*' ".
L'insegnante chiede ancora: "Dove deve stare il punto *B'* ? "
A questo punto gli studenti intuiscono che *B*' deve essere il simmetrico di *B* rispetto alla retta *r* e, facendo alcune considerazioni sulle proprietà di tale trasformazione (punti e segmenti corrispondenti), pervengono alla risposta corretta: il punto *C* è il punto d'intersezione del segmento *AB'* con la retta *r*.
E' chiaro che il procedimento scelto è rapido ed elegante, specialmente se confrontato con un eventuale procedimento analitico.

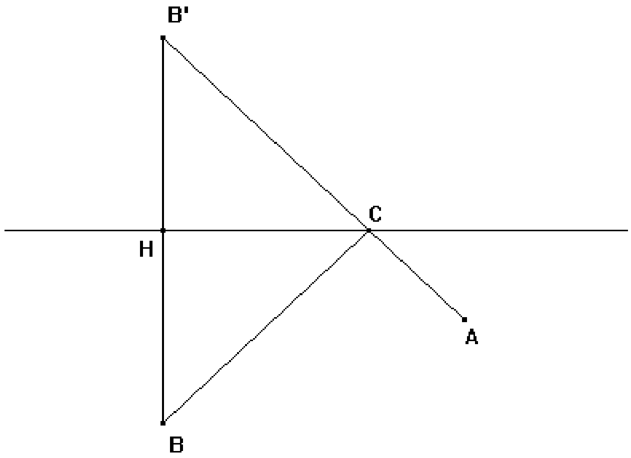


*Figura 3*

Seconda fase

L'insegnante propone il seguente esercizio:

- Siano date due rette *a* e *b* perpendicolari tra loro in un punto *P* ed una retta *r* passante per *P*. Che relazione c'è tra le rette che si ottengono da *r* come corrispondenti nelle simmetrie assiali rispetto agli assi *a* e *b*?

La risposta degli studenti è immediata: le rette coincidono. L'esercizio è però fondamentale per affrontare il problema del biliardo.

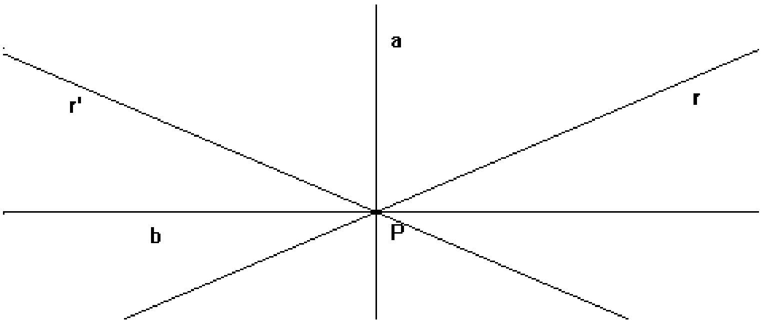


*Figura 4*

Terza fase

Le considerazioni fatte per la soluzione analitica nel problema del ruscello valgono, a maggior ragione, per il problema del biliardo. Gli studenti hanno raggiunto la convinzione che il metodo analitico può condurre alla soluzione di un sistema lineare la cui soluzione appare subito piuttosto complessa.

L'insegnante invita gli studenti a concentrare l'attenzione sulla legge di riflessione nell'urto (elastico) di una biglia che, muovendosi sul piano del biliardo, batta contro una delle sponde del biliardo stesso. In tale fase egli può coinvolgere il collega di fisica.

Può essere conveniente, a questo punto, utilizzare un software di geometria simulando il percorso come nella figura 5, dove si è supposto che la prima sponda contro cui la biglia batte è il lato *AD*. Gli studenti possono variare la direzione di lancio in modo che la retta ottenuta dopo le quattro riflessioni passi per *P*. La congettura che gli studenti formulano è la seguente:

La direzione secondo cui va lanciata una biglia posta in un punto *P* del biliardo, affinché, dopo aver battuto contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il medesimo punto *P*, è quella della diagonale *AC* (o della diagonale *BD*) del rettangolo che rappresenta il biliardo.

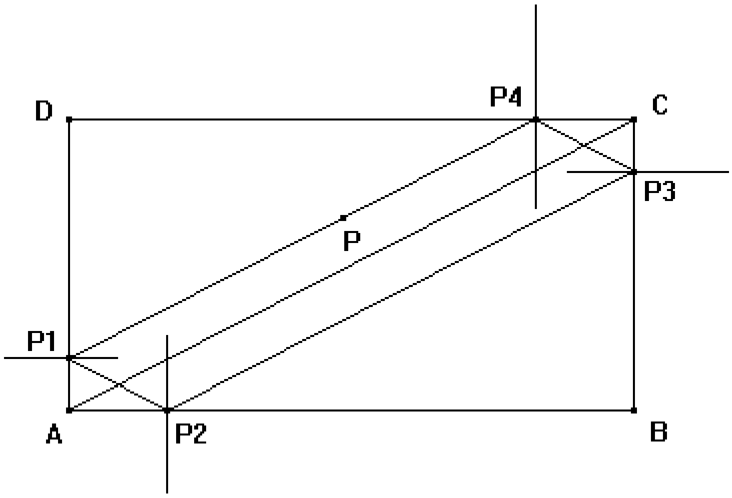


*Figura 5*

Occorre ora validare o confutare tale congettura.
Ricordando l'esercizio della seconda fase, gli studenti osservano che la retta riflessa della retta $PP_1$ (cioè $P_1P_2$) si ottiene non solo dalla simmetria rispetto alla perpendicolare alla sponda ma anche dalla simmetria rispetto alla sponda interessata (ovvero *DA*). La costruzione si ripete quattro volte con riflessioni assiali rispetto alle quattro sponde del biliardo ottenendo le rette $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$ ed una quarta retta che si vuole passi per *P*.
La composizione delle prime due simmetrie assiali (in quanto gli assi sono ortogonali) dà luogo alla simmetria centrale di centro *A* (intersezione dei due assi di simmetria) e la composizione delle altre due dà la simmetria centrale di centro *C*. Quindi la composizione delle quattro simmetrie assiali equivale alla composizione delle due simmetrie centrali di centri *A* e *C* che, a loro volta, danno luogo ad una traslazione di un vettore avente come direzione la retta congiungente i due centri di simmetria, cioè la diagonale *AC* del rettangolo che rappresenta il biliardo.
Le rette, corrispondenti in una traslazione, che passano per uno stesso punto (P) sono quelle aventi la direzione del vettore-traslazione, per cui la direzione di lancio della biglia, affinché dopo le quattro riflessioni ripassi per la posizione iniziale P, è quella della diagonale *AC* del rettangolo che rappresenta il biliardo (lo stesso risultato si ha se si lancia la biglia nella direzione dell'altra diagonale).