Superfici scomode

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza.	L'insieme dei numeri reali. Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Approssimazione dell'area sottesa da un grafico.	<u>Misurare</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Figure geometriche.

Il contesto è quello delle figure geometriche del piano, con particolare attenzione alla questione relativa all'area, da un punto di vista esatto ed approssimato.

Descrizione dell'attività
Il progetto del percorso didattico si può suddividere in due parti: la prima riguarda le attività in ambiente carta e matita, che si può fare al terzo anno, la seconda le attività col supporto della tecnologia (calcolatrici o calcolatori), che può essere realizzata al quarto anno. Si può utilizzare una metodologia di lavoro di gruppo[1] e una di discussione collettiva, per la messa in comune e l'istituzionalizzazione del sapere coinvolto.
In una sperimentazione in classe di queste attività, il lavoro di gruppo, stimolando la comunicazione delle idee e delle strategie di risoluzione, è stato funzionale all'esplicitazione dei processi cognitivi degli allievi, oltre che svolgere un ruolo fondamentale nella costruzione della conoscenza in un contesto di interazione sociale. La parte di lavoro collettivo, importantissima dal punto di vista didattico per la fase di istituzionalizzazione dei saperi coinvolti, si è rivelata altresì interessante, in quanto ha permesso di mettere in luce elementi rimasti in ombra durante le attività di gruppo, attraverso il confronto tra gli allievi con la conduzione dell'insegnante.
I nodi concettuali messi in gioco con questa serie di attività sono:
- la misura, come processo di approssimazione (caratterizzata da incertezza) e come calcolo esatto (caratterizzata da un risultato non soggetto a incertezza);
- il discreto e il continuo.

I contenuti sviluppati sono: l'area di una figura piana irregolare, ottenuta con metodi di approssimazione; l'area sottesa da una curva sul piano cartesiano, ottenuta con calcoli esatti; l'area sottesa da una curva sul piano cartesiano, che non si possa ottenere con calcoli esatti, quindi ottenuta con calcoli approssimati, come nel primo caso; l'area sottesa da una curva sul piano

[1] Gruppi di due-quattro elementi, ciascuno con un'unica scheda di lavoro e, ove previste, una o due calcolatrici.

cartesiano (in un intervallo), in modo che tale area sia non un numero, ma una funzione dipendente dal secondo estremo dell'intervallo.
Può essere opportuno leggere agli studenti un brano storico che illustri come il metodo della quadratura, utilizzato da Archimede per la determinazione dell'area sottesa da una parabola, possa essere esteso ad altre funzioni. Questa fu una delle scoperte determinanti a metà del diciassettesimo secolo, per la nascita del calcolo integrale. Il brano è tratto da *De aequationum localium trasmutatione et emendazione*, di Pierre de Fermat, 1657:
"Archimede si è servito della progressione geometrica nella sola quadratura della parabola; in tutti gli altri casi, confrontando quantità eterogenee, si è limitato alla sola progressione aritmetica. Forse perché aveva verificato che la sola progressione geometrica era meno adatta…? O forse perché il peculiare artificio richiesto da quella progressione [esaustione sulla somma dei triangoli di area massima] *per quadrare la prima parabola* [$y=x^2$] *può difficilmente applicarsi alle altre? Ad ogni modo, io ho riconosciuto e provato che questo tipo di progressione è estremamente fecondo nelle quadrature, e volentieri comunico ai geometri moderni la mia scoperta, che permette di quadrare con lo stesso identico metodo sia le parabole* [$y=x^k$] *sia le iperboli* [$y=x^{-k}$] *... con l'unica eccezione dell'iperbole apolloniana* [$y=x^{-1}$]…"

<u>Prima fase</u>
Nella prima fase agli studenti viene chiesto di determinare l'area di una figura piana a forma di ameba, lasciando il problema aperto e non suggerendo metodi di calcolo.

Proposta di lavoro 1
Determinate l'area della figura in cartoncino, scegliendo uno o più metodi; spiegate quale/i metodo/i avete utilizzato e perché li avete scelti.

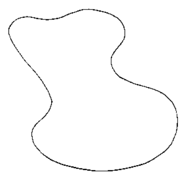

Figura 1

Una discussione collettiva segue questa attività, con lo scopo di confrontare i diversi metodi utilizzati dagli studenti, che potranno essere di triangolazioni, quadrettature, misure dirette o calcoli. L'insegnante fa convergere la discussione all'utilizzo di un metodo condiviso da tutta la classe, che consiste nell'ottenere una misura dell'area approssimata per difetto e una approssimata per eccesso, in modo tale da poter quantificare l'approssimazione stessa (come differenza tra le due misure).

Proposta di lavoro 2
Determinate l'area della figura in cartoncino, utilizzando le tre griglie quadrettate che vi vengono fornite: con quadretti di lato rispettivamente 1 cm, 0,5 cm e 0,1 cm.

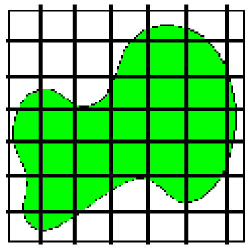

Figura 2

Tramite questa attività, gli allievi sovrappongono la figura ameboide a una griglia quadrettata per volta, ottenendo varie misure dell'area della figura stessa, tramite il conteggio dei quadretti che contengono la figura (misura per eccesso) e di quelli che sono interamente contenuti nella figura (misura per difetto).
Tale attività ha l'obiettivo di far riflettere sul fatto che si raggiunge un'approssimazione migliore con la quadrettatura più fine, riuscendo a quantificare la misura dell'area come semisomma delle misure per eccesso e per difetto (media aritmetica delle due) e dell'intervallo di incertezza come differenza tra la misura per eccesso e per difetto.
La discussione che segue l'attività ha lo scopo di raccogliere i dati ottenuti dai gruppi di studenti, che in generale non è detto che coincidano (per scelte effettuate di calcolo di quadretti o per errori vari).
In una sperimentazione effettuata in classe, per rispondere all'esigenza manifestata da alcuni allievi di conoscere il valore esatto dell'area della sagoma, si è partiti dal confronto degli intervalli di misura ottenuti mediante l'impiego delle tre quadrettature. Sono stati scritti alla lavagna gli intervalli di misura e le incertezze assolute e relative ottenute nei tre casi, utilizzando correttamente la tecnica della misura, cioè andando a considerare i quadretti contenuti interamente nella figura (area per difetto) e quelli contenenti interamente la figura (area per eccesso).
I dati in possesso erano i seguenti:

- quadretti grandi (unità di misura q_1, di lato 1 cm):
$$93 < A < 164, \quad i_{\text{ass}} = 71\ q_1, \quad i_{\text{rel}} = 27{,}6\ \%$$
- quadretti medi (unità di misura q_2, di lato 0,5 cm):
$$436 < A < 576, \quad i_{\text{ass}} = 140\ q_2 = 35\text{q}_1, \quad i_{\text{rel}} = 13{,}8\ \%$$
- quadretti piccoli (unità di misura q_3, di lato 0,1 cm):
$$12252 < A < 1364, \quad i_{\text{ass}} = 812\ q_3 = 8{,}12\ q_1, \quad i_{\text{rel}} = 3{,}2\ \%.$$

Ulteriori sviluppi di questa attività possono essere rivolti alla misura di aree di figure piane note, come ellissi, circonferenze, con metodo di approssimazione delle quadrettature, in modo che gli studenti possano eventualmente anche scegliere di rappresentare tali figure sul piano cartesiano.

<u>Seconda fase</u>
Le attività della prima fase proseguono ora con un'apertura al piano cartesiano, che ha come obiettivo quello di portare la riflessione della misura approssimata di aree dalle figure ameboidi alle regioni limitate da curve sul piano cartesiano.

Situazione

Nelle figure seguenti trovate rappresentate delle funzioni sul piano cartesiano.

Proposta di lavoro

Determinate le aree indicate nelle seguenti figure; spiegate i metodi scelti e perché li avete usati.
Valutate l'incertezza delle misure trovate.
Area compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 2$, la retta $x = 5$ e l'asse delle ascisse, indicata in figura:

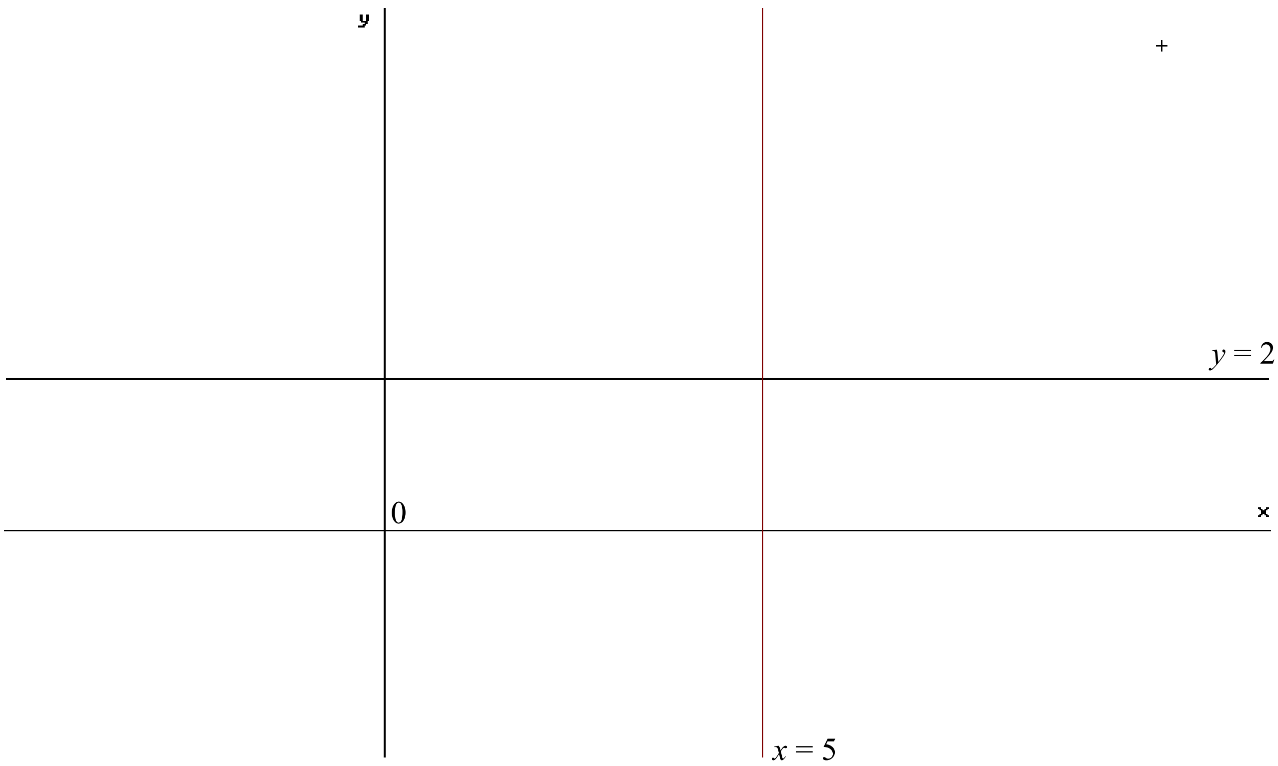

Figura 3

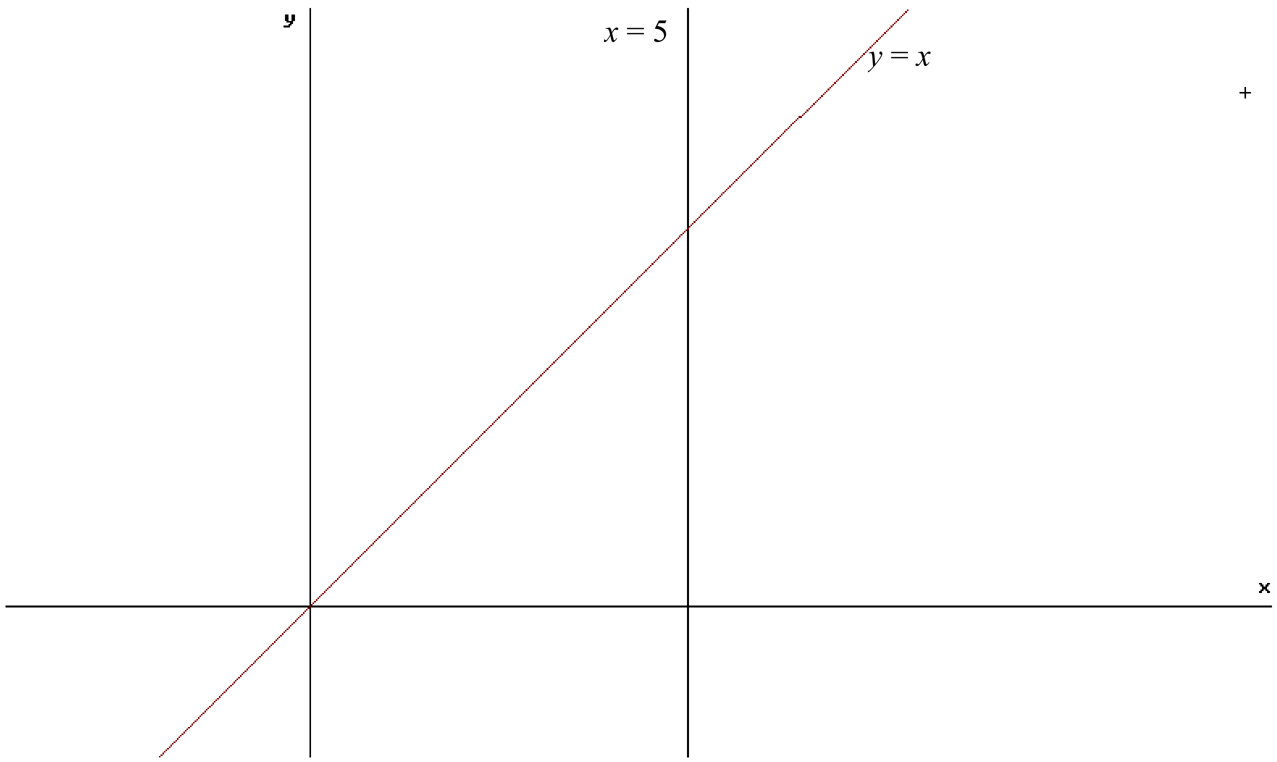

Figura 4

Area compresa tra la parabola $y = x^2$, la retta $x = 3$ e l'asse delle ascisse, indicata in figura:

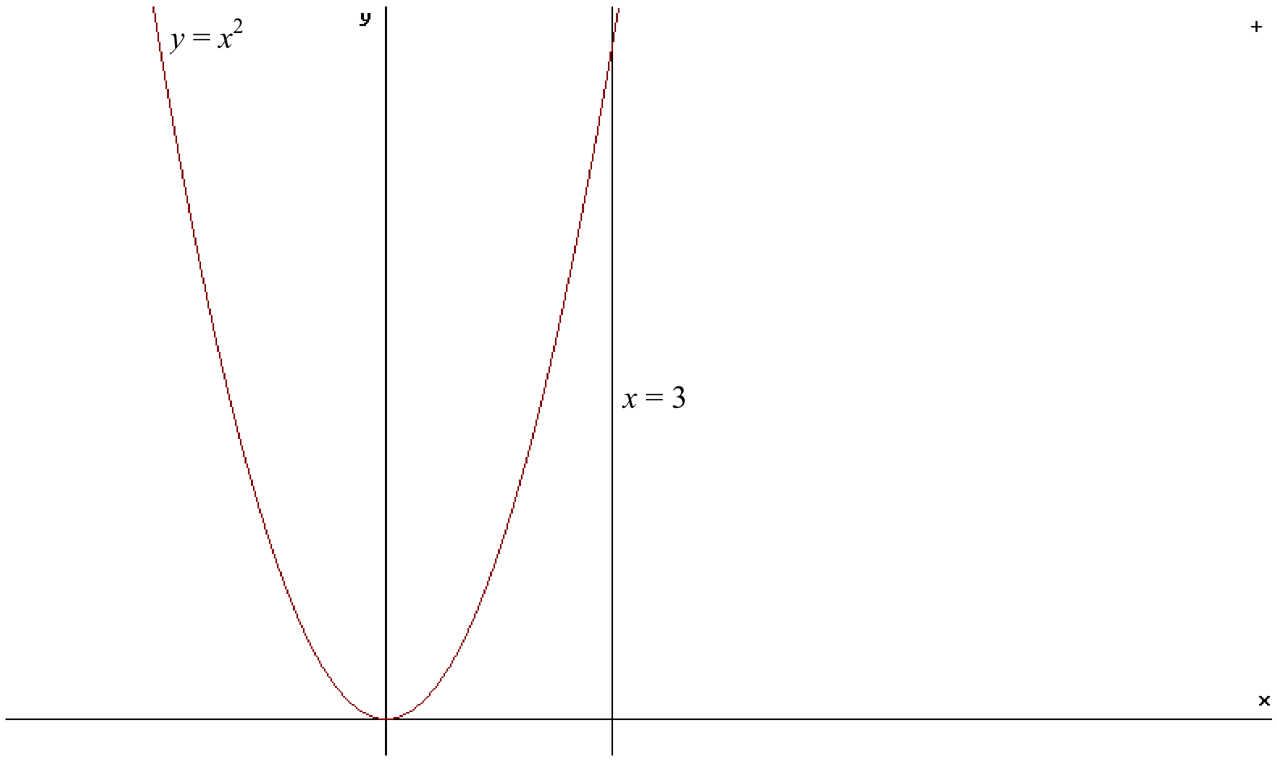

Figura 5

Questa attività presenta due situazioni in cui l'area può essere ottenuta come calcolo esatto, nel caso di un rettangolo e di un triangolo, mentre il terzo caso si presenta come diverso dai due precedenti, in quanto l'area non può essere ottenuta come risultato esatto. In questo caso, gli studenti attiveranno nuovamente metodi di approssimazione, che possono ricalcare quelli usati in precedenza per la forma ameboide, o essere nuovi. Da una sperimentazione effettuata in classe, si è visto che gli studenti, dopo aver suddiviso ulteriormente l'intervallo di misura, introducono metodi di calcolo approssimato con rettangoli contenuti e/o contenenti il grafico della parabola, oppure utilizzano trapezi con lato obliquo per due punti della funzione, o ancora trapezi con lato obliquo tangente al grafico della funzione.
Dalla discussione che segue, l'insegnante guida gli studenti a scegliere un metodo implementabile sulla calcolatrice o sul calcolatore, in modo che sia possibile quindi scrivere un algoritmo di calcolo. Si sceglie il metodo dei rettangoli (in analogia alle quadrettature utilizzate nella prima fase), per avere una valutazione dell'incertezza e si applica tale metodo in vari casi di determinazione di aree sottese da funzioni continue e monotone su intervalli limitati.

Dopo aver discusso del metodo dei rettangoli facendo riferimento ad una figura esplicativa alla lavagna, si può passare a tradurre l’algoritmo nella sintassi dei comandi della calcolatrice, per poi inserirlo nella stessa (nell’apposito ambiente di programmazione) assegnandogli un nome.
La figura 6 mostra un programma che calcola un’approssimazione per difetto dell’area sottesa dalla parabola $y = x^2$, e che è stato chiamato appunto ardif; la figura 7 mostra il programma analogo per l’area per eccesso (arecc), tali programmi sono nel linguaggio delle calcolatrici grafico-simboliche, ma possono essere implementati in un linguaggio di programmazione o tramite un foglio elettronico.

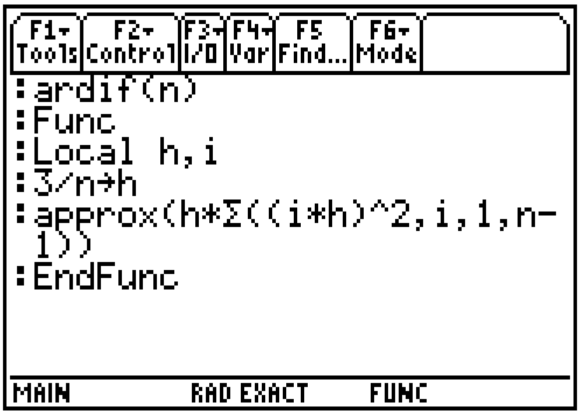

Figura 6

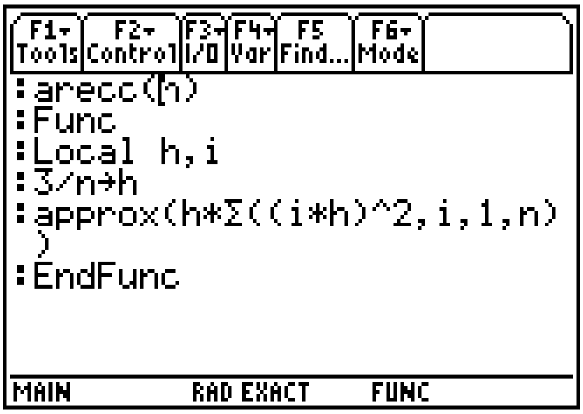

Figura 7

Nelle seguenti figure si può osservare la convergenza delle due successioni di risultati verso il valore 9:

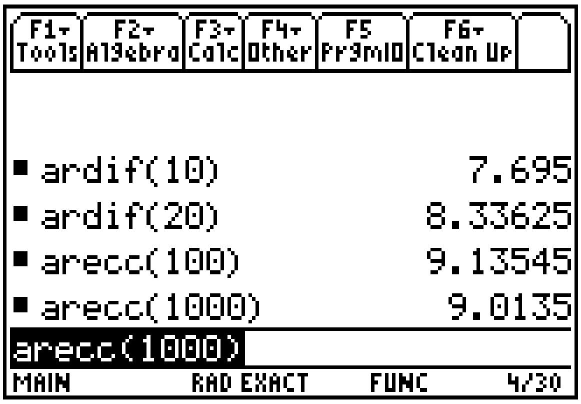

Figura 8

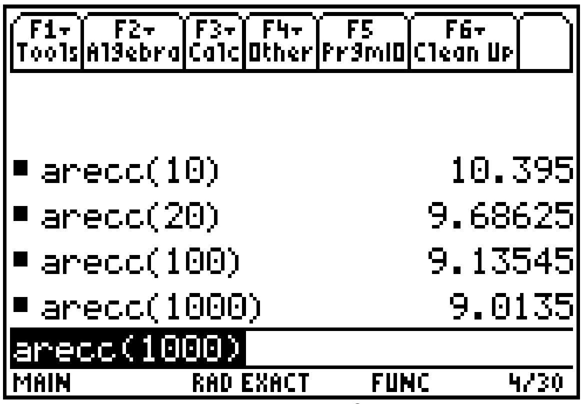

Figura 9

Possibili sviluppi

Questa attività si può sviluppare ulteriormente in varie direzioni: per esempio, può evolvere nella direzione di determinare aree in cui l'estremo destro dell'intervallo di misura non è un numero, ma una variabile k: ciò comporta che l'area sia funzione di k, come nelle proposte seguenti:

- Determinare l'area compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 2$, la retta $x = k$ e l'asse delle ascisse. Qual è la funzione che rappresenta l'area considerata?

- Determinare l'area compresa tra la retta $y = x$, la retta $x = k$ e l'asse delle ascisse. Qual è la funzione che rappresenta l'area considerata?

Oppure si può arrivare all'utilizzo del comando di integrazione in un software di calcolo simbolico o in una calcolatrice grafico-simbolica, per poter avere uno strumento di calcolo di aree sottese da funzioni, prima ancora di fondare il concetto di integrale dal punto di vista formale dell'analisi matematica.

L'intero percorso ha come obiettivo quello di fondare il significato di integrale definito, prima di ricorrere alla teoria dell'analisi matematica, ma puntando a metodi e processi di calcolo esatto e approssimato, in ambito di geometria piana e di ambiente cartesiano.