

Simmetrie nei poliedri

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Analizzare con strumenti intuitivi sezioni piane e sviluppi piani di poliedri. Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, ...). Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. Simmetrie nei poliedri regolari.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Storia Scienze

Contesto

Figure del piano e dello spazio.

L'attività si colloca alla fine del primo biennio, quando gli studenti hanno già chiare le proprietà di simmetria delle figure nel piano. Il contesto è quello delle figure del piano e dello spazio. Infatti, dalle simmetrie dei poligoni nel piano si passa ad affrontare le proprietà di simmetria delle figure nello spazio.

Si indaga su come estendere, in forma intuitiva, ai poliedri le proprietà di simmetria dei poligoni fino ad arrivare ai concetti di piano di simmetria, di centro di simmetria, di asse di simmetria, di asse di rotazione. L'obiettivo è quello di far vedere come nello spazio non si possono trasferire automaticamente le proprietà studiate nel piano. Uno dei punti fondamentali dell'attività consiste nel giungere a una descrizione corretta e condivisa di poliedro regolare.

Attraverso questo lavoro gli studenti affinano le loro capacità di visione nello spazio tridimensionale in modo non "separato" da quanto è stato già visto nel piano.

Descrizione dell'attività

Prima fase

Costruzione di modelli fisici di solidi (cartoncino, cannucce, ...), che possono avere o non avere proprietà di simmetria.

Gli studenti sono invitati a costruire, con strumenti diversi, alcuni dei poliedri più semplici (prisma retta a base regolare, piramide regolare, cubo, ottaedro regolare, tetraedro regolare,...) che poi verranno analizzati dal punto di vista delle simmetrie.

Si può anche procedere, nei casi più semplici, alla visualizzazione di poliedri tramite riflessioni su specchi o combinazioni di specchi (caleidoscopio tridimensionale).

Si chiede ora agli studenti di individuare, fra tutte le configurazioni (connesse) che si possono ottenere affiancando 6 quadrati, lato contro lato, quelle che rappresentano possibili sviluppi di cubo.

Si chiede ad esempio di esaminare la figura 1 e di scegliere quelle che possono rappresentare lo sviluppo piano di un cubo.

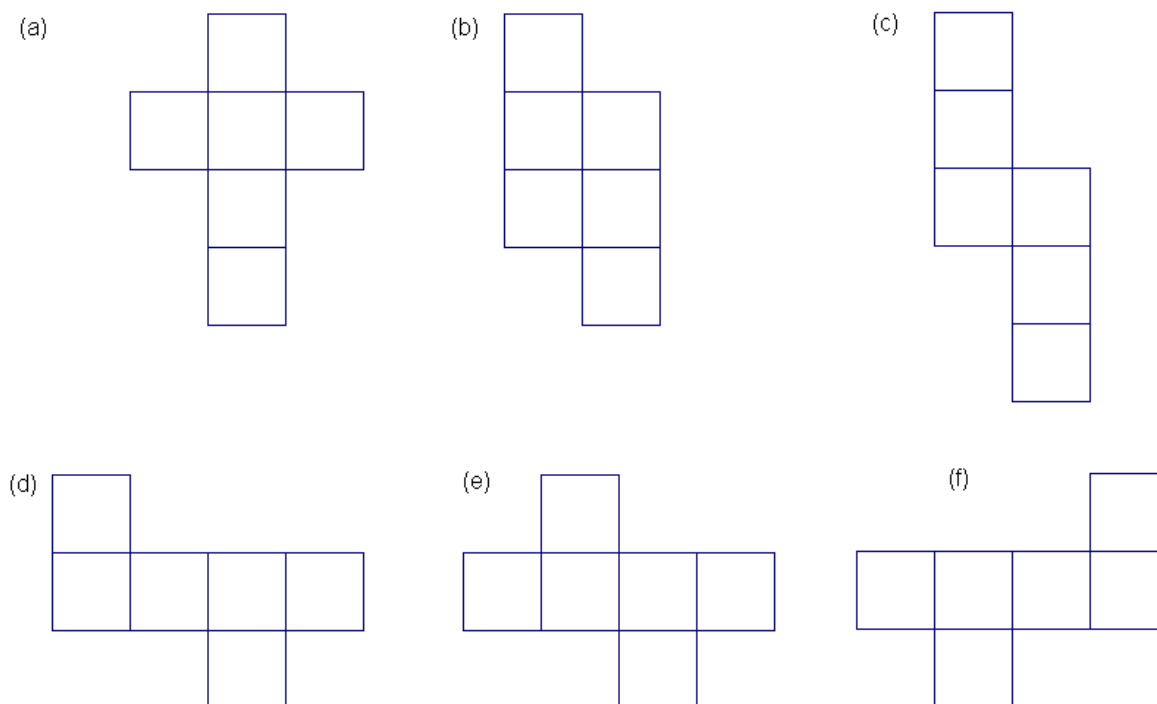


Figura 1

Si passa, quindi:

- alla discussione su cosa si debba intendere per “sviluppi diversi”;
- alla discussione sui pregi di questo o di quell’altro sviluppo;
- a colorare con lo stesso colore, a partire dal disegno di uno sviluppo piano del cubo, le coppie di spigoli che nella ricostruzione vanno a coincidere.

Seconda fase

Riconoscimento di simmetrie in oggetti tridimensionali.

Si svolge una discussione sulle osservazioni fatte in classe e ci si avvicina gradualmente, facendole emergere da osservazioni concrete, alle definizioni di piano di simmetria, centro di simmetria, asse di rotazione, asse di simmetria (ci si può avvalere di modelli fisici, software di geometria o di figure tridimensionali prelevate dalla rete,...) a partire da casi semplici: cubo, tetraedro regolare, ottaedro regolare,...

Terza fase

Determinazione di assi, piani e centri di simmetria.

In questa fase sarà richiesto di determinare tutti gli assi di simmetria del cubo; la stessa domanda si può fare per i piani di simmetria e per il centro di simmetria, scoprendo legami tra i vari movimenti che trasformano in sé il poliedro; nello stesso modo si indaga su altri semplici poliedri: ottaedro regolare, tetraedro regolare,... (Figura 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8).

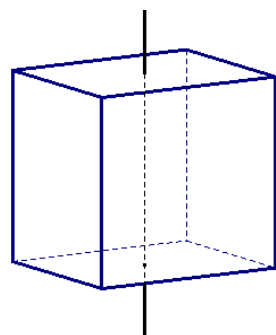


Figura 2

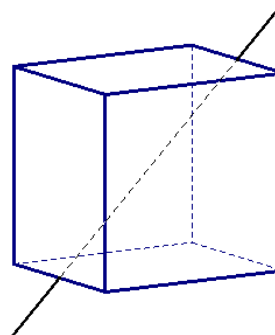


Figura 3

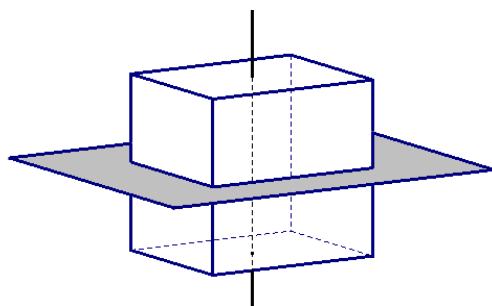


Figura 5

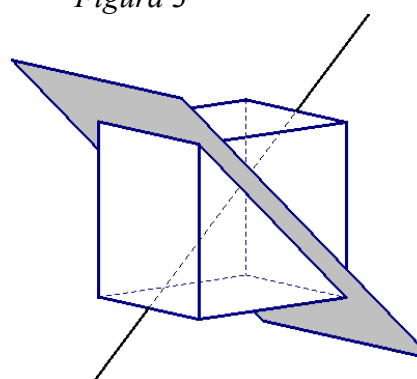


Figura 6

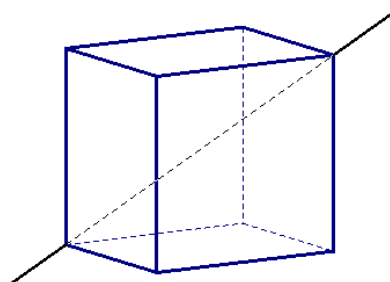


Figura 7

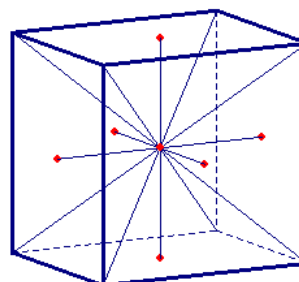


Figura 8

Quarta fase

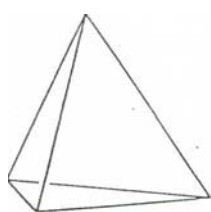
Descrizione dei poliedri regolari.

In questa fase, dalle osservazioni precedenti si arriva alla descrizione dei poliedri regolari, in modo che la definizione venga “costruita” attraverso un percorso di tipo intuitivo e osservativo. Non è il caso, in questo momento, di dare una definizione formale di poliedro regolare, con il rischio di un apprendimento puramente meccanico.

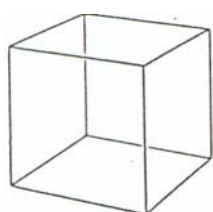
Si possono anche esaminare le relazioni tra il cubo e l’ottaedro regolare che ha i vertici nel centro delle facce del cubo e scoprire che le simmetrie trovate per il cubo sono le stesse dell’ottaedro regolare. In questo modo, si ha il vantaggio di poter estendere le proprietà di simmetria di un poliedro a quello del poliedro duale. Analoghe considerazioni si possono fare, come possibile approfondimento, per il dodecaedro regolare e l’icosaedro regolare. Si può fare anche notare che il tetraedro ha come duale se stesso.

Possibili sviluppi

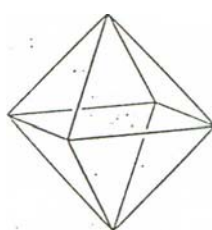
1. Conteggio del numero dei vertici, degli spigoli e delle facce di vari poliedri (in presenza o in assenza di un modello fisico). Come approfondimento ulteriore si può proporre un’attività per arrivare, in forma intuitiva, alla formula di Eulero (o di Cartesio-Eulero).



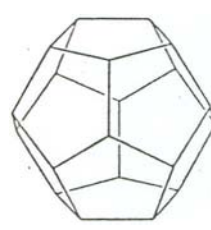
Tetraedro regolare



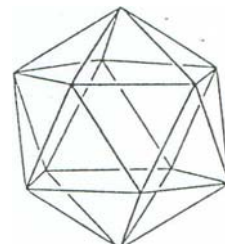
Cubo



Ottaedro regolare



Dodecaedro regolare



Icosaedro regolare

Figura 9

Si può chiedere inizialmente di completare la seguente tabella mediante l'osservazione di modelli fisici di poliedri regolari.

Poliedro	Tetraedro regolare	Cubo (esaedro regolare)	Ottaedro regolare	Dodecaedro regolare	Icosaedro regolare
Numero delle facce: F					
Numero degli spigoli: S					
Numero dei vertici: V					

Dopo aver completato la tabella, cercare una relazione tra F , V , S per questi solidi.

- Si può anche arrivare, in modo intuitivo, a rispondere alla seguente domanda: perché esistono solo cinque tipi di poliedri regolari? Inizialmente si prende in considerazione il vertice di un poliedro regolare e si fa osservare che in ogni vertice convergono almeno tre facce; si può chiedere agli studenti qual è la somma degli angoli che convergono nello stesso vertice. Una volta osservato che tale somma è sempre minore di un angolo giro si possono esaminare le varie situazioni possibili.

Un approfondimento storico da proporre: i solidi platonici.

- Individuazione dei tipi di figure geometriche che si possono ottenere sezionando un cubo mediante un piano.
- Quali, tra i poliedri regolari, consentono un riempimento dello spazio? (Si deve ipotizzare di riempire completamente, senza lasciare "buchi", tutto lo spazio, usando un solo tipo di poliedro regolare). Discutere la domanda e scrivere tutto quello che si è pensato.
- Quali poligoni regolari si possono ottenere sezionando un cubo con un piano?
- Quali poliedri ammettono un centro di simmetria?
- Considerare un cubo di spigolo l . Individuare il minimo cammino sulla superficie cubica per andare dal vertice A al vertice opposto E (vedi figura 12).
- Quante sono le direzioni e quante le giaciture individuate rispettivamente dagli spigoli e dalle facce di un ottaedro regolare. (Per rispondere conviene pensare i sei vertici dell'ottaedro come i centri delle facce di un cubo, come in figura 10).

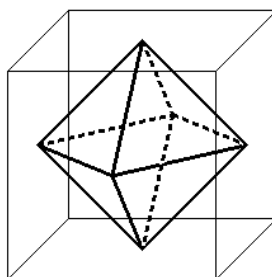


Figura 10

Elementi di prove di verifica

- Qui a fianco è disegnato un cubo in assonometria. Il cubo ha uno spigolo di 8 cm. Lo si taglia in due prismi retti, sezionandolo secondo il piano DBFH. Disegnare, con le dimensioni reali, la faccia DBFH comune a questi due prismi.

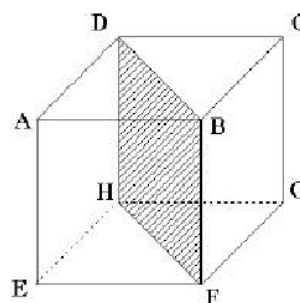


Figura 11

- Costruire un tetraedro regolare ABCD in cartoncino oppure usando cannucce da bibita. Immaginando di congiungere in tutti i modi i centri delle facce, descrivere il poliedro che si ottiene.
- Si seziona il cubo disegnato in Figura 12 con il piano passante per i vertici B, C, D.
 - Di che tipo è il triangolo BCD? Perché?
 - Che tipo di poliedro è quello individuato dai vertici B, C, D, E? Perché?
 - Se I e J sono i punti medi dei segmenti BC e BD allora la retta IJ è parallela alla retta CD? Perché?
 - Di che tipo è il triangolo AIB? Perché?

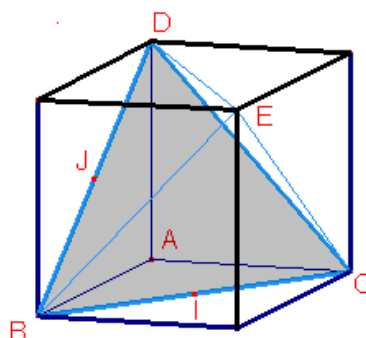


Figura 12

- Si considera un cubo ABCDEFGH. Il punto I è il punto di intersezione dei segmenti [FC] e [GB]. Il punto J è il punto di intersezione dei segmenti [HF] e [EG].

Rispondere alle seguenti domande.

- Il triangolo EGB è rettangolo in G?
- Il triangolo IAJ è isoscele?
- Il triangolo AEJ è rettangolo in E?
- Il triangolo AEJ è isoscele?

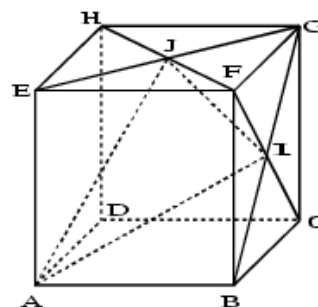


Figura 13

- Disegnare uno sviluppo piano di uno dei solidi che si ottengono sezionando un cubo con un piano diagonale (Un piano diagonale è un piano che passa per le diagonali parallele di due facce opposte o, se si preferisce, per due spigoli paralleli non appartenenti alla stessa faccia).

6. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un cubo?
7. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un ottaedro regolare?
8. Disegnare uno sviluppo piano della piramide ABCD ottenuta a partire da un cubo, come illustrato in figura 14.

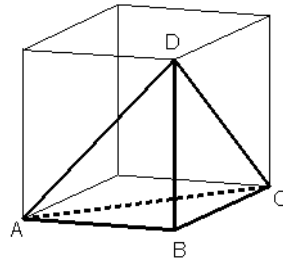


Figura 14

9. Nella figura 14, si disegni il centro di simmetria O del cubo e la piramide simmetrica di ABCD rispetto a O.