Crescite veloci e crescite lente

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Costruire modelli, a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni. Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre. Confrontare variazioni di grandezze.	Esempi di funzioni e dei loro grafici. La funzione esponenziale; la funzione logaritmica.	<u>Misurare</u> Relazioni e funzioni Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Biologia Chimica Scienze della terra Fisica

Contesto
Modelli.

Il contesto è quello dei modelli. Un approccio laboratoriale alla funzione esponenziale e alla funzione logaritmica, che prenda spunto da situazioni legate al mondo reale, è qui articolata intorno a diversi fenomeni che si rappresentano con curve di crescita esponenziale o si misurano con scale logaritmiche.

Descrizione dell'attività
L'intento è di arrivare gradualmente ad alcune proprietà delle funzioni in questione, costruendone i significati; si propongono tabelle e grafici e si guidano le osservazioni dei ragazzi verso l'uso che si fa delle due funzioni in ambiti diversi.
Contemporaneamente, in collegamento con altri nuclei, si ha occasione di parlare di numeri irrazionali e dell'uso dei logaritmi nei calcoli (numeri e algoritmi) ma anche di scegliere alcune dimostrazioni delle proprietà dei logaritmi (argomentare, congetturare, dimostrare).
<u>Prima fase</u>

- L'insegnante propone una tabella che rappresenta alcuni dati di un fenomeno di crescita esponenziale, tratto dalla biologia, invitando gli studenti a completare qualche riga in più e, in particolare la *n*-esima riga.

"Una popolazione di 20 milioni di individui cresce del 2,5% al giorno".

giorno	Popolazione in milioni
0	20
1	20+20*25/1000 = 20*(1+0,025) = 20*1,025
2	20*1,025+20*1,025*0,025=20*(1,025)*(1+0,025) = 20*$(1,025)^2$
3	….= 20*$(1,025)^3$
n	20*$(1,025)^n$

Tabella 1

- Sarà cura dell'insegnante dare alcune indicazioni sui termini specifici che si utilizzano più comunemente in problemi che hanno un modello analogo.
- La consegna per gli studenti prevede ora che, con le indicazioni scelte in questo esempio, siano in grado di costruire i grafici relativi alle due situazioni, utilizzando un foglio elettronico.

Situazione

Una crescita esponenziale è spesso descritta in termini di percentuale, come nel precedente esempio dove il fattore di crescita è a = 1+ 25/1000 = 1,025 e il tasso di crescita è r = 0,025; considerato che 20 è costante e possiamo chiamarlo K, in generale una funzione di questo tipo che esprime una crescita si può scrivere $Y = Ka^x = K(1+r)^x$. In questo caso quindi $Y = 20*1,025^x = 20*(1+0,025)^x$, con x variabile che rappresenta i giorni.
Analogamente per un fattore di decadimento a = 1- 2/1000 quindi con tasso di decadimento r = 0,002 la funzione che rappresenta il fenomeno di decadimento (dello 0,2% al minuto) è $Y = Ka^x = K(1-r)^x$ con x variabile che rappresenta i minuti.

Proposta di lavoro

Costruisci i grafici che rappresentano le precedenti situazioni.
Costruisci un esempio di una crescita lineare, rappresentalo graficamente e confronta i due modelli di crescita.

- Si prosegue con la lettura di un breve brano che illustra il metodo di datazione del Carbonio-14 e si propone un esercizio applicativo.

<u>Il metodo di datazione del Carbonio-14</u>

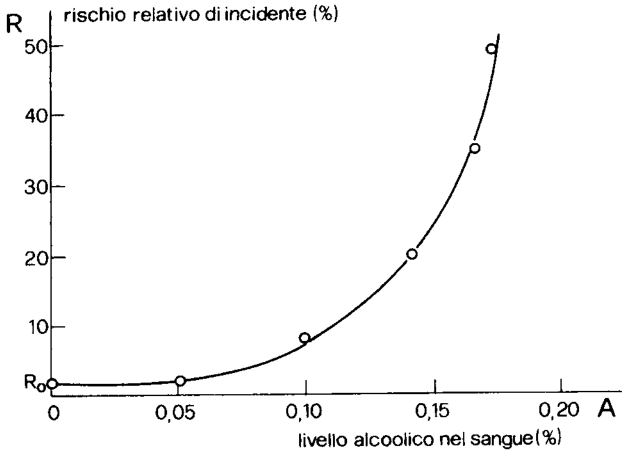
Uno dei più famosi e semplici metodi di datazione dei reperti archeologici è il cosiddetto "metodo del Carbonio-14" ideato alla fine degli anni quaranta dal chimico statunitense Walter F. Libby (che ricevette per questo il Premio Nobel nel 1960).
L'atmosfera terrestre è bombardata continuamente da raggi detti "cosmici", i quali danno luogo alla produzione di Carbonio-14 (C^{14}), che è radioattivo. Il C^{14} viene assorbito dalle piante e assimilato così dagli animali. L'assorbimento del C^{14} nei tessuti viventi è compensato esattamente dal decadimento radioattivo, per cui si crea uno stato di equilibrio. Quando un organismo cessa di vivere, la concentrazione di C^{14} diminuisce col tempo perché esso non ne assimila più e quindi ha luogo soltanto il fenomeno di decadimento. Ora l'ipotesi fondamentale su cui poggia il metodo del C^{14}, è che l'intensità di bombardamento della superficie non è mai variata. Ciò implica che il decadimento del C^{14} in un campione, per esempio, di carbon fossile, si verificava all'origine con la stessa intensità con cui si verifica oggi. Queste osservazioni consentono di determinare l'età di un campione di carbon fossile e quindi di reperti archeologici ritrovati assieme ad esso. È possibile ricavare una equazione in cui l'unica incognita è l'età del carbon fossile; essa si ottiene dalla più generale equazione di crescita esponenziale applicata ai fenomeni di decadimento radioattivo (fenomeno studiato fin dagli inizi del secolo da E. Rutherford).

Proposta di lavoro

"Il tempo di dimezzamento" di una sostanza radioattiva corrisponde al tempo necessario affinché il numero di atomi della sostanza si dimezzi. Per il Carbonio-14 il tempo di dimezzamento è di 5730 anni. Determina, con ragionevole approssimazione, l'età di un reperto per il quale la concentrazione di C^{14} risulta pari al 12% di quella di analoghi organismi viventi (si può calcolare un valore adeguato di $(1/2)^n$ dove n è il numero dei tempi di dimezzamento o risolvere l'equazione esponenziale $(1/2)^x = 0,12$ ricordando che l'unità di misura è 5730 anni).

- L'insegnante propone adesso due grafici

Istogramma del rischio di incidente automobilistico per ingestione di alcool, confrontato con la curva di crescita esponenziale



Curve della concentrazione di penicillina nel sangue in casi di somministrazione di diverse dosi iniziali

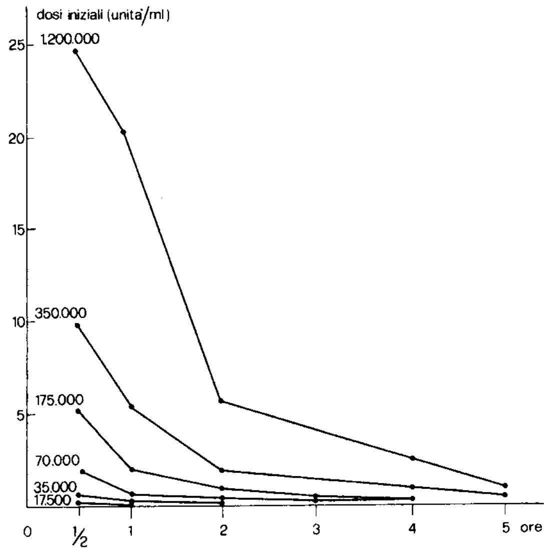


Figura 1

Proposta di lavoro

Confronta i due grafici con gli altri da te ottenuti e fai le tue osservazioni in non più di cinque righe.

<u>Seconda fase</u>

Si propongono alcune brevi letture, oggetto di una precedente ricerca su Internet con gli studenti, sulle scale logaritmiche.

Il terremoto
L'intensità: misura la grandezza di un terremoto attraverso gli effetti sull'uomo, sulle costruzioni, sull'ambiente.
Pertanto in luoghi diversi, per uno stesso terremoto, essa assume valori differenti e ciò deriva dal fatto che gli effetti tendono a divenire più deboli con l'aumentare della distanza dall'epicentro. L'intensità di un terremoto viene espressa tramite la scala Mercalli.
La magnitudo: misura la forza di un terremoto attraverso le registrazioni (sismogrammi) degli strumenti ed è stata definita nel 1935 dal famoso sismologo C.F. Richter come misura oggettiva della quantità di energia elastica emessa durante il terremoto. Esprime la grandezza di un terremoto attraverso la misura dell'ampiezza massima della traccia registrata dal sismografo. La scala della magnitudo è una scala logaritmica, per cui un aumento di una unità nelle magnitudo corrisponde a un aumento di un fattore 10 nell'ampiezza del movimento della terra, e a una liberazione di energia circa 30 volte maggiore. La magnitudo è un parametro indipendente dagli effetti che il terremoto provoca sull'uomo e sulle costruzioni; essa permette di confrontare tra loro eventi sismici avvenuti nelle diverse parti del mondo ed in tempi differenti. I terremoti più piccoli percettibili dall'uomo hanno una magnitudo intorno a 2,5, mentre quelli che possono provocare danni alle abitazioni e vittime hanno generalmente una magnitudo superiore a 5,5.
Nella seguente tabella si può vedere l'equivalenza fra le scale comunemente usate per indicare l'intensità di un terremoto: la scala Richter e la scala Mercalli (MCS).

Gradi scala Mercalli [MCS]	Gradi scala Richter	Quantità equivalente di tritolo [kg]
0	1,0	20
1	2,0	625
2	2,5	3.500
3	3,0	20.000
4	3,5	110.000
5	4,0	625.000
6	4,5	3.500.000
7	5,0	20.000.000
8	5,5	110.000.000
9	6,0	625.000.000
10	6,5	3.500.000.000
11	7,0	20.000.000.000
12	7,5	110.000.000.000

Tabella 2

È comunque conveniente tradurre l'ultima colonna in notazione scientifica.

Proposta di lavoro

Rappresenta i dati dell'ultima colonna su scala logaritmica, in modo da poterli confrontare con quelli della scala Richter prima e della Scala Mercalli poi.

L'idea di Richter
L'ampiezza massima delle onde registrate da un sismogramma (indicata con A) può essere usata come misura della "grandezza" di un terremoto se viene messa a confronto con l'ampiezza massima (A_0) delle onde fatte registrare da un terremoto scelto come riferimento (terremoto standard). Egli

scelse un terremoto che produce su un sismografo standard, posto a 100 km dall'epicentro, un sismogramma con oscillazione massima uguale a 0,001 mm.
Poiché l'ampiezza massima registrata sul sismogramma di un forte sisma può essere anche milioni di volte maggiore di un terremoto debole, al fine di evitare numeri di magnitudo troppo grandi, ritenne opportuno ricorrere al logaritmo in base 10 del rapporto fra l'ampiezza massima del terremoto (misurata in micrometri) e l'ampiezza che verrebbe prodotta dal terremoto standard alla stessa distanza epicentrale: $M = log\ A/A_0$; non esiste un limite teorico della magnitudo ma, in pratica, nel XX secolo la massima magnitudo registrata è stata poco meno di 9.

La scala decibel del suono

L'apparato uditivo umano è sensibile alle variazioni di pressione atmosferica che, tramite un complesso sistema meccanico, chimico e nervoso traduce in variazione di segnali elettro-chimici che viaggiano verso il cervello.
Il punto è che questo legame non è lineare. E cioè, al raddoppio dell'intensità del suono non avvertiamo il raddoppio della sensazione di volume, ma molto di meno. Il legame è di tipo logaritmico. In linea di massima, se l'intensità dell'onda sonora aumenta di dieci volte, noi avvertiamo soltanto un raddoppio del volume.
La definizione di dB passa appunto per i logaritmi. La scala decibel nasce in questa maniera: se P' è la pressione standard di 0,0002 microbar (approssimativamente corrispondente alla soglia audio, cioè al minimo segnale rilevabile dal nostro orecchio) la pressione sonora P è così definita:

$$20\ log\ (P/P')$$

Per le proprietà dei logaritmi, sappiamo che:

$$log\ (ab) = log\ a + log\ b$$
$$log\ (a/b) = log\ a - log\ b$$

per cui, se nell'appartamento accanto il nostro c'è una festa e il rumore raggiunge la pressione P_2 mentre nella nostra stanza il volume della tv raggiunge una pressione P_1 avremo che la differenza in pressione fra le stanze adiacenti, espressa in decibel, sarà pari a:

$$20\ log\ (P_1/P') - 20\ log\ (P_2/P') = 20\ log\ (P_1/P_2)$$

In genere l'orecchio è capace di rilevare differenze solo oltre i 3dB. Se la pressione acustica raddoppia, si produce un incremento di circa 6dB rispetto a quello iniziale. Oltre i 130dB avvertiamo dolore, mentre una esposizione continua (per esempio negli impianti industriali) a intensità superiori agli 80dB finisce per danneggiare l'udito in maniera irreversibile.

Esercizio

Qual è la pressione acustica massima che può sopportare il nostro orecchio senza avvertire dolore? Esprimi la risposta in microbar.

La scala del pH

È possibile esprimere la concentrazione dello ione idrogeno (in pratica l'acidità o la basicità di una sostanza) mediante l'introduzione di una funzione che eviti l'uso di numeri molto piccoli. Questa è la scala del pH, metodo largamente usato per misurare l'acidità. Il pH di una soluzione è definito come l'opposto del logaritmo in base 10 della concentrazione dello ione idrogeno:

$$pH = -\ log\ [H^+]$$

Si osserva che il calcolo di un logaritmo è incorporato nelle definizione stessa della misura del pH. Occorre poi saper interpretare correttamente i dati numerici: se il pH di una soluzione passa dal valore 6 al valore 5, questo significa che la concentrazione di ione idrogeno risulta decuplicata (essendo passata da 10^{-6} a 10^{-5}).

Esercizio
Tenendo conto che la concentrazione dello ione idrogeno presente in una sostanza si misura in moli per litro, determinare il pH delle seguenti sostanze: pomodori (con $[H^+] = 6{,}3\times10^{-5}$ moli/litro) e latte (con $[H^+] = 4\times10^{-7}$ moli/litro).
Se, invece, si sa che il pH del succo di limone è uguale a 2,3, qual è la concentrazione dello ione idrogeno misurata in moli per litro nel succo di limone?

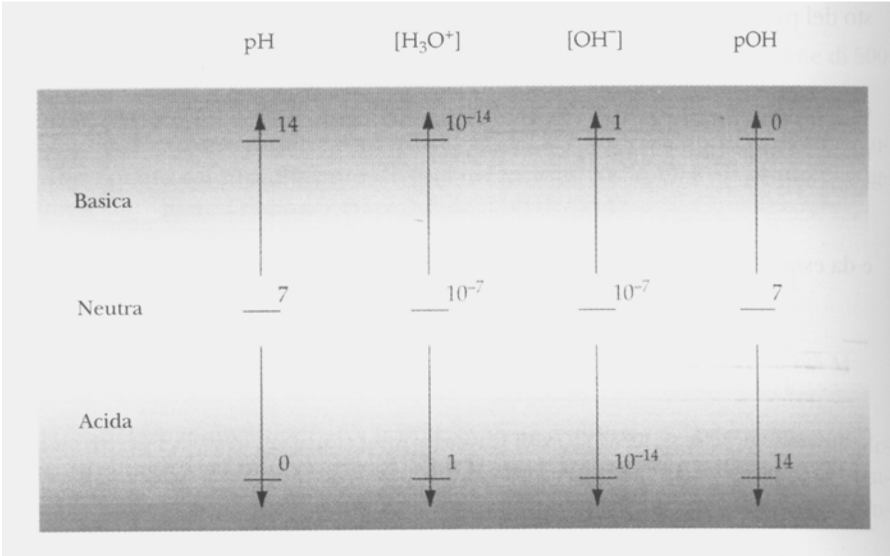


Figura 2

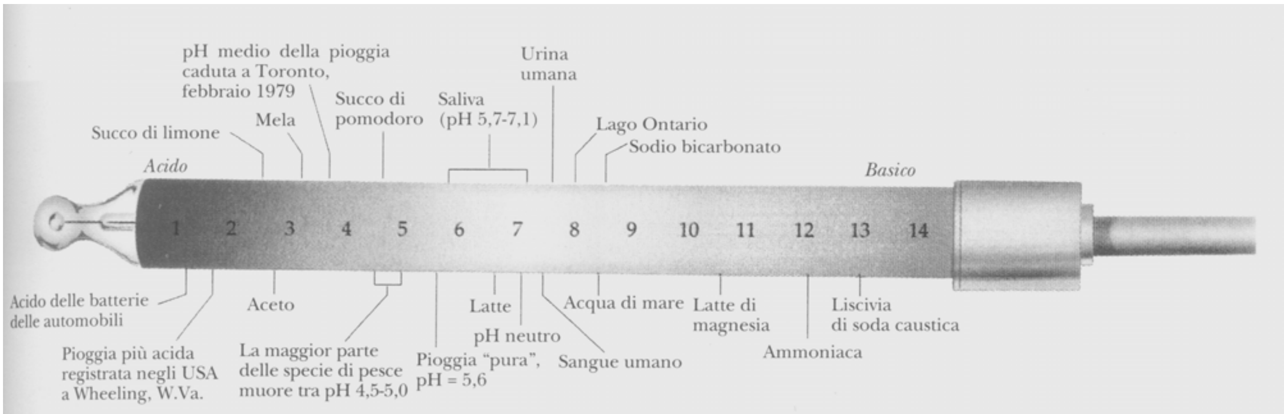


Figura 3

- Qualche osservazione sulle scale logaritmiche è utile farla in questo contesto, per esempio l'insegnante mette in evidenza che: la scala logaritmica permette la rappresentazione delle sole misure positive della grandezza che intendiamo visualizzare. Man mano che le misure delle grandezze si avvicinano a zero, i corrispondenti valori dei logaritmi tendono a $-\infty$. In altre parole, la scala logaritmica dilata la rappresentazione grafica dei valori (positivi) piccoli, ma, nel contempo, comprime la rappresentazione grafica dei valori grandi. Infatti quando le misure delle grandezze che intendiamo visualizzare assumono valori sempre più grandi, anche i corrispondenti valori dei logaritmi tendono a $+\infty$, ma i loro punti immagine sulla scala logaritmica risultano via via più ravvicinati.

Possibili sviluppi
- Numeri irrazionali.

- Potenzialità e limiti di un modello.
- Storia della matematica: le spirali.

Elementi di prove di verifica

1. Scale grandi e piccole
- Determina il valore reale k tale che, per ogni x, si ha: $10^x = e^{kx}$.

- Nella formula $A = kB^x$ trova x sapendo che $A = 12,6$, $k = 0,0012$ e $B = 21,9$.

- In un'elezione un partito politico ha avuto una percentuale del 5% dei voti. Da un certo momento in poi il numero dei votanti per quel partito politico si dimezza ad ogni successiva elezione. Esisterà un momento in cui esso non avrà più voti?

- Siano p, q ed r tre termini di una progressione geometrica. Verifica, con esempi, se $\log p$, $\log q$ e $\log r$ sono tre termini di una progressione aritmetica. Costruisci una catena di deduzioni per dimostrare che la proprietà in questione è vera sempre.