Il triangolo di area massima

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure. Confrontare variazioni di grandezza. Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze.	Aree dei poligoni. Equazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici.	<u>Misurare</u> Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Figure geometriche.

Il contesto di riferimento è quello delle figure geometriche; l'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi di questo contesto e contribuire a consolidare alcune conoscenze di geometria che gli studenti hanno già conseguito.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in tre fasi. Nella prima si propone agli studenti una situazione in cui viene assegnato un insieme di triangoli isosceli di dato lato e si richiede di osservare con attenzione, anche se a livello qualitativo, quali sono le costanti e le variabili della situazione problematica. Nella seconda fase si chiede agli studenti, che lavorano in un ambiente di geometria dinamica, di determinare il triangolo di area massima fra quelli assegnati. Nella terza fase, l'insegnante, in una discussione di bilancio, presenta, commenta e confronta le varie soluzioni proposte, soffermandosi su considerazioni legate anche alla potenzialità e ai limiti delle soluzioni degli studenti e di quelle suggerite dall'insegnante stesso.

È possibile iniziare l'attività con una lettura che metta in evidenza sia l'aspetto sociale della misurazione sia l'operatività come insieme di assunti condivisi.
"*Spesso sentiamo dire che la scienza è una forza rivoluzionaria che impone nuove e radicali idee alla storia dell'umanità. Ma essa emerge anche dall'interno della storia umana, dando nuova forma ad azioni consuete, alcune delle quali sono così abituali che difficilmente ci accorgiamo di compierle. La misurazione è una delle nostre azioni più consuete. Noi parliamo la stessa lingua ogni volta che, con precisione, scambiamo informazioni o commerciamo oggetti. Questa sua vera e propria onnipresenza rende invisibile la misurazione. Per essere operative, le unità di misura devono agire come un insieme di assunti condivisi, l'inesplorato substrato di conoscenze nei confronti del quale possiamo trovare accordi e fare distinzioni. Perciò non stupisce il fatto che noi diamo per scontata e consideriamo banale la misurazione. Inoltre, proprio nell'uso che una società*

fa delle unità di misura trova espressione il suo senso di onestà. Per questa ragione la bilancia è un diffuso simbolo di giustizia” (tratto da *La misura di tutte le cose* di Ken Alder).

Prima fase
L’insegnante propone agli studenti il seguente problema:

Situazione
E’ dato un segmento di lunghezza 5 unità.

Proposta di lavoro
Costruite un triangolo isoscele che abbia i due lati uguali della stessa lunghezza del segmento dato.
Effettuate una costruzione che rappresenti tale triangolo in un ambiente di geometria dinamica. Osservate quindi come si modifica il triangolo, trascinando i punti della costruzione che si possono muovere.
L’ambiente di geometria dinamica, infatti, consente di osservare le grandezze che si modificano e quelle che rimangono costanti quando si trascinano dei vertici liberi (per esempio la lunghezza dei due lati assegnati rimane costante, analogamente alla somma degli angoli interni del triangolo, mentre variano, in generale, le altre grandezze geometriche). Alcuni studenti fanno uso anche in questa prima fase dello strumento misura eventualmente fornito dal software. Questo comportamento, che può apparire a prima vista ingenuo, in quanto assolutamente non necessario, consente, però, agli studenti di entrare nella logica del problema e di prepararsi alla seconda fase.

Seconda fase
L’insegnante invita gli studenti a individuare le caratteristiche del triangolo di area massima fra quelli della famiglia considerata. Si può richiedere che tale quesito venga affrontato in piccoli gruppi collaborativi.
In questa fase l’insegnante dovrebbe limitarsi a osservare con attenzione il lavoro svolto nei gruppi; in particolare può essere importante osservare l’eventuale uso della misura, di approcci analitici, piuttosto che sintetici o viceversa; la preferenza per un approccio di tipo numerico (tabelle dei valori, tabelle delle differenze), oppure geometrico-grafico o, infine, formale (determinazione della formula che rappresenta la variazione dell’area rispetto a una determinata grandezza scelta come variabile indipendente).
Una prima risposta che in genere viene fornita da molti studenti è che il triangolo di area massima sia quello equilatero. All’origine di questa risposta ci sono probabilmente ragioni di simmetria, di apparente analogia con i problemi di area massima dei poligoni isoperimetrici, di vaga fiducia nella soluzione più semplice, motivi che si potrebbero anche definire estetici. Ciò che interessa, però, è che il problema porta gli studenti a effettuare una previsione, una congettura che può essere validata nell’ambiente di geometria dinamica, attraverso la funzione di trascinamento e l’osservazione di ciò che accade in seguito al trascinamento. L’ambiente non è inerte, perché, grazie alla funzione misura, in genere disponibile in un ambiente di geometria dinamica, dà una risposta inattesa: una volta ottenuto il triangolo equilatero, l’area continua a crescere e cresce per un bel po’, prima di tornare a decrescere. Ciò genera sorpresa e stupore negli studenti e spinge loro a chiedersi *perché*.
Polya sosteneva che è proprio la nascita di domande del tipo *perché?* che spinge alla ricerca di giustificazioni e quindi motiva alla dimostrazione (e questo anche quando si è convinti della correttezza di una congettura, non solo quando si ottengono, come in questo caso, risposte sorprendenti).

Terza fase
L’insegnante avvia una discussione di bilancio coinvolgendo l’intera classe, presentando e commentando le varie strategie risolutive seguite dai diversi gruppi di studenti e proponendo egli stesso, eventualmente, altre risoluzioni.

Si descrivono di seguito alcune possibili risoluzioni del problema, che differiscono notevolmente per i mezzi messi in gioco.

Approccio sintetico
Questo tipo di soluzione fa capire che il problema potrebbe essere anche proposto a studenti del primo biennio. Può essere suggerito da particolari modalità di esplorazione nell'ambiente di geometria dinamica che gli studenti hanno a disposizione: infatti, trascinando il vertice B, come suggerisce la figura 1, gli studenti si rendono conto che, poiché AC è costante, l'area massima si ha per il massimo di BH, ossia con H coincidente con A, quindi il triangolo di area massima è il triangolo rettangolo isoscele.

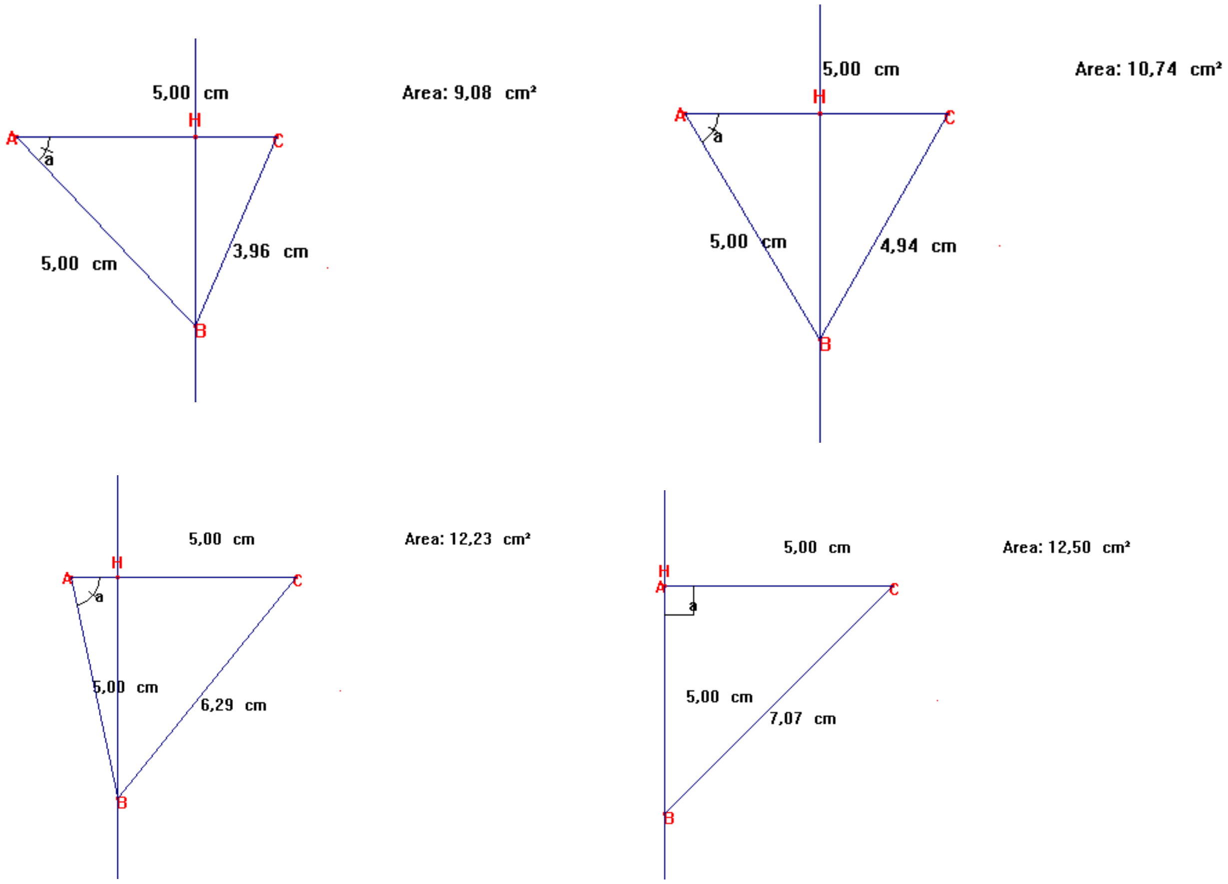


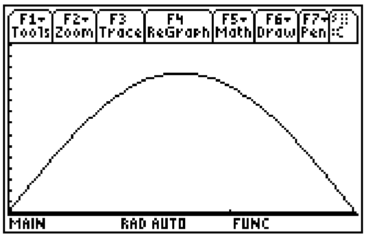
Figura 1

Approccio numerico
Gli studenti si limitano a fornire una stima numerica delle misure dei lati e degli angoli del triangolo di area massima utilizzando la funzione misura fornita dal software, senza riuscire, però, a capire bene il perché quella trovata è la soluzione del problema.

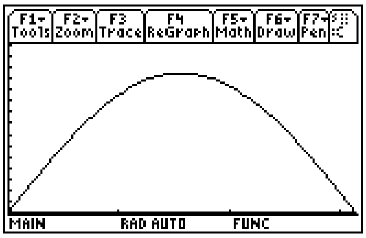
Approccio analitico-funzionale
Gli studenti determinano una funzione che rappresenta la variazione dell'area del triangolo rispetto a una grandezza scelta come variabile indipendente. In questo caso l'insegnante dovrebbe far notare che la scelta della grandezza da considerare come variabile indipendente può risultare strategica e che, in ogni caso, è necessario specificarne l'insieme di variabilità.
Qui di seguito vengono riportate alcune delle funzioni che è possibile considerare (y rappresenta l'area del triangolo e per la notazione degli angoli e dei lati si fa riferimento ai triangoli della figura 1):

- in funzione dell'angolo ACB = x, si ha $y = 25\dfrac{\sin(2x)}{2}$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$;
- in funzione dell'angolo BAC = x, si ha $y = 12{,}5 \sin x$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;
- in funzione della proiezione KC = x di uno dei lati uguali sulla base si ha $y = x\sqrt{25-x^2}$ con $0 \le x \le 5$;
- in funzione della proiezione HC della base BC su uno dei lati uguali si ha $y = \dfrac{5\sqrt{25-x^2}}{2}$ con $0 \le x \le 5$;
- in funzione dell'altezza relativa a uno dei lati uguali, BH = x si ha $y = \dfrac{5}{2}x$ con $0 \le x \le 5$.

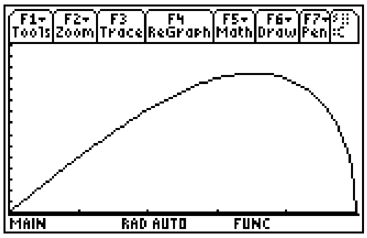
Con un software di manipolazione grafico-simbolica è anche possibile rappresentare il grafico delle varie funzioni, cercare di comprenderne le caratteristiche, in particolare capire la ragione dell'assenza o della presenza di eventuali simmetrie (vedere la figura 2).



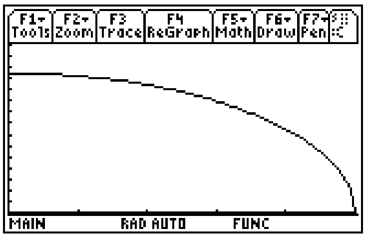
$y = 25\dfrac{\sin(2x)}{2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$



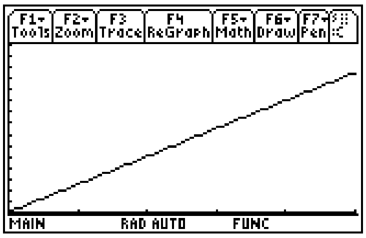
$y = 12{,}5\sin x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$



$y = x\sqrt{25-x^2}, \quad 0 \le x \le 5$



$y = \dfrac{5\sqrt{25-x^2}}{2}, \quad 0 \le x \le 5$



$y = \dfrac{5}{2}x, \quad 0 \le x \le 5$

Figura 2

L'insegnante può anche far vedere come i grafici possono essere determinati direttamente nell'ambiente di geometria dinamica, inserendo gli assi cartesiani e definendo opportunamente le relazioni tra l'area e la variabile scelta come indipendente. Nella figura 3 vengono rappresentate in un ambiente di geometria dinamica le funzioni area in funzione di BH, BC e BAC.

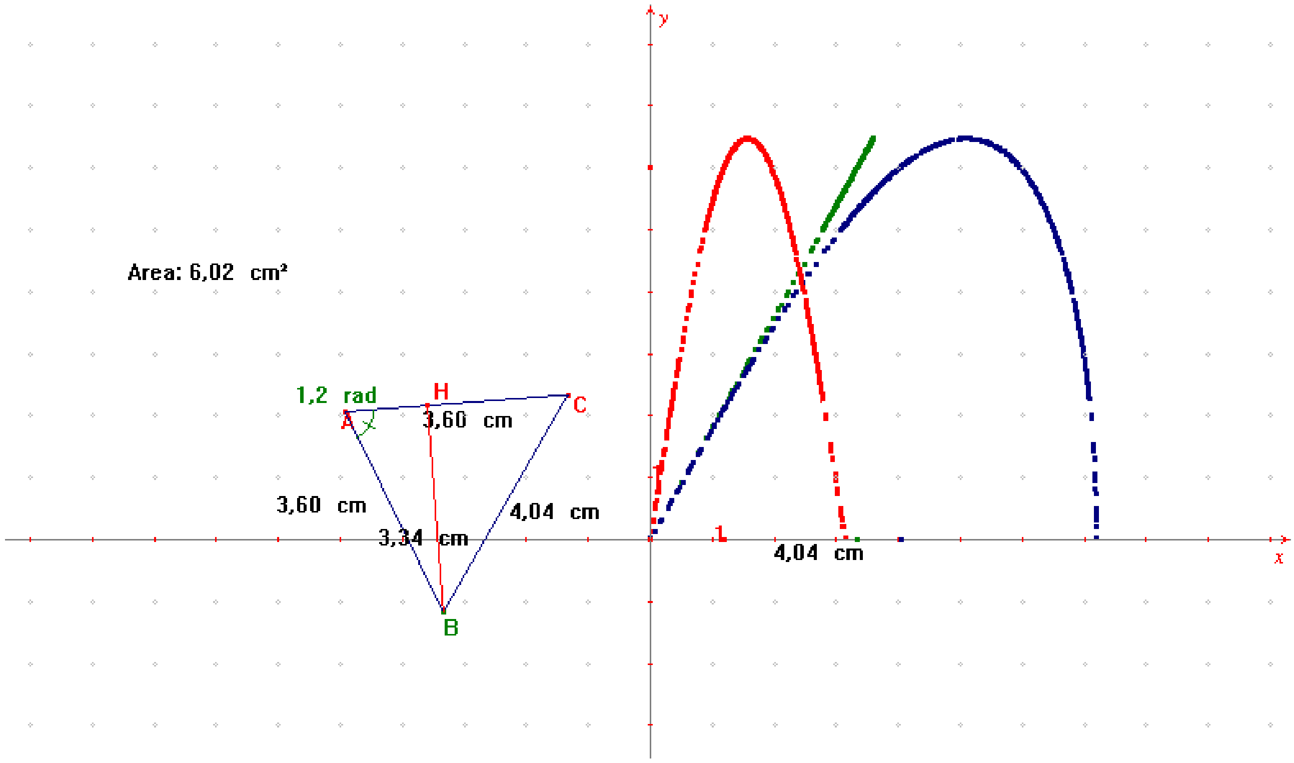


Figura 3

Possibili sviluppi

- Generalizzare il problema a un triangolo qualunque di cui è assegnato un lato.
- Problemi di massimo e minimo.
- Dimostrazioni sintetiche di alcune proprietà determinate per via analitica.

Elementi di prove di verifica

1. Triangoli inscritti in una semicirconferenza
Tra tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza determinare quello di area massima.

2. Rettangoli equiestesi
Tra tutti i rettangoli di ugual area, determinare quello di perimetro minimo.