Un numero misterioso: π

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scegliere e utilizzare strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze. Determinare approssimazioni di lunghezze. Dimostrare l'irrazionalità di alcuni numeri. Determinare l'incertezza relativa che si propaga in un quoziente di grandezze misurate.	I numeri irrazionali. Approssimazioni. Il numero π. Esempi di grandezze incommensurabili. Schemi di ragionamento.	<u>Misurare</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Numeri.

Questa proposta è riferita al contesto dei numeri e può essere introdotta nel terzo anno.

Descrizione dell'attività
L'attività prevede che gli studenti abbiano già acquisito una certa abilità nella lettura di algoritmi, nell'affrontare i problemi connessi al misurare ed alla rappresentazione dei dati sperimentali. Essa si caratterizza per la ricchezza degli spunti e offre non solo un contributo significativo alle conoscenze disciplinari, ma concorre a potenziare la capacità degli stessi ad analizzare situazioni e formulare congetture. Tale attività concorre alla costruzione del senso del numero, come ordine di grandezza, perché dà un significato a quella formula (la lunghezza della circonferenza) che spesso viene ricordata mnemonicamente, senza che gli studenti si rendano conto di quanto "sia grande π". Contribuisce, inoltre, alla formazione culturale globale degli studenti.

<u>Prima fase</u>
Gli studenti conoscono π come simbolo, in quanto l'hanno già probabilmente incontrato in precedenza nei loro studi, ma non hanno forse ancora approfondito i problemi ad esso connessi. L'insegnante in questa proposta introduce gli studenti al problema della determinazione di π come numero irrazionale.

L'insegnante propone agli studenti la lettura del seguente passo del libro *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan per porre il problema della misura della circonferenza.
"*... la domanda fu questa: è possibile per un esperto geometra trovare l'esatto rapporto tra la circonferenza e il diametro del cerchio?*
Così rispose l'Uomo Che Contava: "Non è possibile calcolare esattamente una circonferenza, pur conoscendone il diametro. Il rapporto tra le due misure è un numero ben determinato, ma non siamo in grado di conoscerne il vero valore. Gli antichi cultori dell'astrologia credevano che la circonferenza fosse tre volte il diametro, ma le cose non stanno così. Archimede il greco trovò che,

se la misura della circonferenza è di 22 cubiti, il suo diametro deve misurarne circa 7. Ma i matematici indiani non sono d'accordo, e il grande al-Kwarizmi ha affermato che la regola di Archimede è ben lungi dall'essere esatta".
E Beremiz, rivolgendosi al sapiente con il naso camuso, così concluse: "Questo numero è in realtà avvolto dal mistero, e Allah solo potrebbe svelarne le occulte qualità".

L'insegnante sottolinea come questo numero fondamentale abbia una storia di origine 'costruttiva' e pone la seguente domanda: quanto deve essere lungo il raggio per costruire la circonferenza di una data lunghezza?
E' il problema che probabilmente si pose l'abile artefice fenicio che sembra abbia edificato una vasca circolare all'interno del Tempio di re Salomone. Secondo il *Primo libro dei Re* della Bibbia, la circonferenza misura 3 volte il diametro: 'Fece pure il mare di metallo fuso, a forma circolare, di dieci cubiti di diametro, cinque d'altezza e trenta di circonferenza'.
Per la Bibbia, dunque π è uguale a 3: è la prima approssimazione del suo valore di cui abbiamo testimonianza.

Seconda fase
L'insegnante propone agli studenti, divisi in piccoli gruppi, una fase operativa, di seguito riportata, perché attraverso la "manipolazione" possano constatare quali difficoltà si incontrano nel ricavare un'approssimazione di π. E' opportuno che l'insegnante guidi gli alunni a riconoscere le difficoltà peculiari della misurazione. Con questa attività si possono reperire dati tramite misure e perseguire l'obiettivo di indagare sulla relazione tra due grandezze.
Queste prime due fasi si possono realizzare anche a livello del primo biennio.

Situazione

Considerate alcuni barattoli di forma cilindrica, aventi dimensioni differenti (diversa circonferenza di base, diversa altezza).

Proposta di lavoro

Misura
- Misurate la lunghezza del diametro di base di ciascun barattolo e annotate i valori su un foglio.
- Come potete misurare la lunghezza della circonferenza di base di ogni barattolo? Misuratela e annotate i valori sul foglio.
- Completate le prime due colonne della tabella 1, inserendo, per ciascun barattolo, i valori misurati per le lunghezze di diametro e circonferenza.

diametro [cm]	circonferenza [cm]	
…	…	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…

Tabella 1

- Cosa accade alla lunghezza della circonferenza quando la lunghezza del diametro aumenta? E quando diminuisce?
- Dividete la lunghezza della circonferenza per la lunghezza del diametro e riportate i valori dei rapporti nella terza colonna della tabella.
- Cosa osservate? Come variano i valori dei rapporti che avete ottenuto?

- Che relazione c'è tra la circonferenza e il diametro? Provate a descriverla a parole.
- Disegnate su un grafico le coppie di numeri delle prime due colonne della tabella.

Dati

Rispondete alle seguenti domande, sulla base dei dati e del grafico:

- Come si dispongono i punti?
- Se aveste un barattolo di diametro di lunghezza 4,5 cm quanto sarebbe lunga la circonferenza?
- Quale sarebbe la lunghezza del diametro di base di un barattolo avente circonferenza di 17,2 cm?
- Se la lunghezza del diametro passa da un valore al suo doppio, come cambia la lunghezza della circonferenza?
- E se il diametro diventa la metà, come diventa la circonferenza?
- E se la circonferenza diventa il triplo, come cambia il diametro?

Modello

Supponete di avere un barattolo con un diametro di lunghezza k.

- Quanto vale la lunghezza della circonferenza?
- E se aveste un barattolo di diametro di lunghezza $2k$, quanto sarebbe lunga la circonferenza?
- Ora scrivete una legge algebrica che rappresenti la variazione della circonferenza y in funzione del diametro x, servendovi di ciò che avete capito nell'esperimento.

L'insegnante nel momento di intergruppo si adopera per far comprendere agli studenti che, senza utilizzare formule o tanto meno "numeri fissi", il rapporto tra le misure di circonferenza e di diametro, nei limiti dell'incertezza, è costante e che tra le due grandezze c'è una relazione di proporzionalità diretta. L'indagine successiva sul grafico permette, inoltre, di legare tale relazione alla disposizione delle coppie di numeri della tabella nel piano: i punti (le coppie di misure), infatti, sono all'incirca allineati. Per raffinare ulteriormente l'indagine, è possibile richiedere agli studenti di determinare l'incertezza relativa ed assoluta del rapporto tra la circonferenza ed il diametro, a partire dall'incertezza assoluta di misura delle due grandezze.

Nel momento conclusivo di questa fase si procede verso l'astrazione: gli studenti, guidati dalle domande dell'insegnante, devono esplicitare in simboli le eventuali relazioni ottenute (introdurre un simbolo per la costante e tradurre in formula la proporzionalità).

<u>Terza fase</u>

L'insegnante sottopone all'attenzione degli studenti alcune considerazioni storiche, in particolare presenta il ruolo di Archimede nello studio di π, riferendo che π è detto anche numero di Archimede. Egli fu, infatti, il primo a formulare una procedura geometrica per il suo calcolo approssimato. Il suo metodo consisteva nel racchiudere una circonferenza in due esagoni regolari-uno inscritto ed uno circoscritto-dei quali era in grado di calcolare il perimetro. Mediante il progressivo raddoppio del numero dei lati dei poligoni, raggiunse approssimazioni sempre migliori di π. Giunto a 96 angoli ottenne: $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$.

Dopo aver affrontato l'approssimazione di π con il confronto fra il diametro e la circonferenza come misure dirette (seconda fase), si propone un altro metodo per ottenere valori approssimati della lunghezza della circonferenza con il calcolo dei perimetri di poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza. Dai perimetri dei poligoni inscritti si ottengono valori di π approssimati per difetto, dai perimetri dei poligoni circoscritti valori approssimati per eccesso.

Situazione

Data una circonferenza, per semplicità di raggio unitario, inscrivere e circoscrivere ad essa poligoni regolari.

Proposta di lavoro

Determinate una misura approssimata della circonferenza, considerando poligoni regolari inscritti e circoscritti. Per fare ciò prendete in considerazione un quadrato inscritto, calcolate il valore del perimetro del quadrato. Successivamente raddoppiate il numero dei lati, in modo da avere un ottagono regolare inscritto, si calcoli il valore del perimetro anche in questo caso. Ora suddividete ulteriormente la figura e ottenete un poligono regolare di 16 lati, calcolate il perimetro. Se volete, provate anche a costruire un poligono regolare di 32 lati. Successivamente prendete in considerazione i poligoni circoscritti e procedete in modo analogo.
Quali considerazioni potete trarre dal confronto delle misure dei perimetri prima considerati?

L'insegnante conduce gli studenti alla consapevolezza che il procedimento è iterativo e quindi alla costruzione di una procedura.
Di seguito si propone il programma ottenuto con una calcolatrice grafico-simbolica. E' comunque del tutto indifferente rispetto all'efficacia dell'attività l'utilizzo di un qualsiasi altro strumento informatico per implementare la procedura.

Figura 1

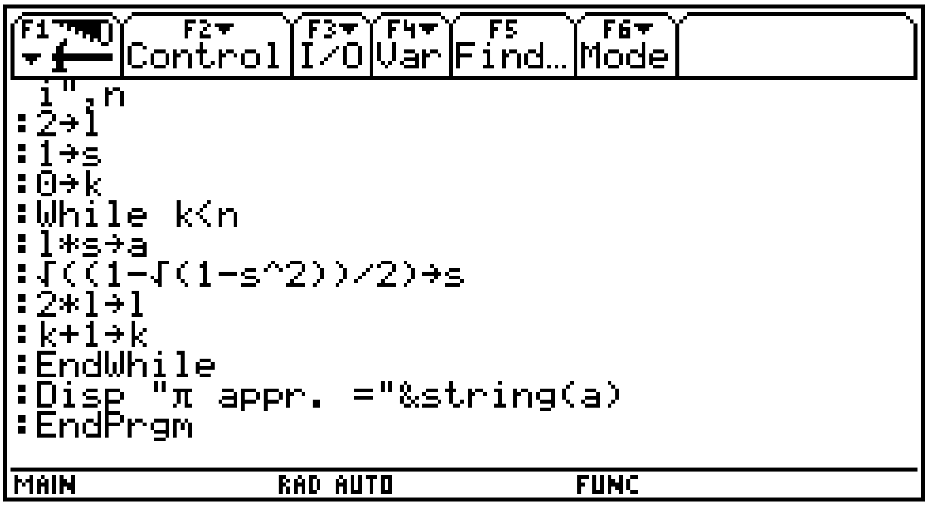

Figura 2

Figura 3

<u>Quarta fase</u>
L'insegnante ora propone la determinazione di π con un metodo che ricorre alla misura approssimata dell'area del cerchio mediante rettangoli. Si lavora sul piano cartesiano e gli studenti devono utilizzare l'equazione della circonferenza con centro nell'origine degli assi. L'insegnante può tener presente l'attività "Superfici scomode".

Situazione

E' data una circonferenza di raggio 1, rappresentata sul piano cartesiano con il centro nell'origine.

Proposta di lavoro

Determinate una misura approssimata dell'area racchiusa dalla circonferenza, utilizzando il metodo dei rettangoli.
Per fare ciò prendete in considerazione soltanto il primo quadrante, per via della simmetria della figura.
Determinate i valori approssimati per eccesso, eseguendo il calcolo nei seguenti tre casi:

- Divisione della base in 2 parti uguali.
- Divisione della base in 4 parti uguali.
- Divisione della base in 8 parti uguali.

Confrontate, ordinate i valori ottenuti e fate le vostre osservazioni.

L'insegnante fa notare agli studenti che all'aumentare delle divisioni della base si ottengono valori che approssimano sempre di più la misura dell'area del quarto di cerchio.

<u>Quinta fase</u>
Al termine dell'attività gli studenti, divisi in piccoli gruppi, producono una relazione sintetica dell'attività svolta, che può essere oggetto di valutazione.

Possibili sviluppi

- Numeri irrazionali. Il passaggio dal momento in cui il rapporto è uguale a un numero razionale, ottenuto da misure, a quello in cui si intuisce l'impossibilità di rappresentarlo come rapporto di numeri interi, è sicuramente un argomento che va approfondito successivamente (per es. logaritmi in base 10 di un numero e potenze a esponente razionale).

- Numeri trascendenti. La natura trascendente del numero π può essere affrontata all'interno di altri nuclei tematici (numeri e algoritmi).
- Grandezze incommensurabili.
- Lo sviluppo dell'informatica.
- Approccio intuitivo al concetto di limite.

Elementi di prove di verifica

1. Il metodo di Archimede

- In un cerchio di diametro *r* è inscritto un esagono regolare; il suo lato è dunque lungo *r*, e il perimetro è *6r*.

Determinare il perimetro dell'esagono regolare circoscritto, calcolando il rapporto tra gli apotemi dei due esagoni (si osservi che i due esagoni sono simili).
Determinare poi un valore di π, confrontando la lunghezza della circonferenza sia con il perimetro dell'esagono inscritto sia con il perimetro dell'esagono circoscritto.

- Archimede trova che la lunghezza della circonferenza è minore di 3 volte il diametro più 1/7 del diametro stesso, ed è maggiore di 3 volte il diametro più 10/71 del diametro.

Quali valori approssimati di π, per eccesso e per difetto, si ottengono?