Argomentare, congetturare, dimostrare

Il nucleo caratterizza le attività che introducono, sviluppano e consolidano la dimostrazione, ossia uno degli aspetti fondamentali che contraddistinguono il pensiero matematico maturo.
Si considerano perciò quei processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico, che è sempre inestricabilmente intrecciato con i segni del suo linguaggio.
Il significato dei segni matematici è analizzabile a due livelli:
1. quello diretto dei segni, per cui ad es. $x^2 = 2$ può denotare un insieme numerico ben preciso all'interno di un codice specifico (le soluzioni in **Q**, **R** dell'equazione; due rette verticali; ...);
2. quello del discorso in cui tali segni entrano.

Il primo significato riguarda principalmente le definizioni dei concetti, il secondo le relazioni tra queste. La matematica è costituita da enunciati in cui sono coinvolti continuamente i due aspetti. Comprendere la matematica significa possedere queste due funzioni del discorso.
Le attività didattiche sono quindi finalizzate allo sviluppo di queste due funzioni, che affondano le loro radici nelle attività discorsive possedute dal soggetto in modo "naturale" e che coinvolgono attività cognitive usuali. Per questo in tutte le attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto: l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno accompagnare sempre la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica.
Ad esempio per imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell'algebra gli studenti dovranno esplorare e operare in campi di esperienza in cui attuare attività di quantificazione e generalizzazione utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (ad es.: tempi/velocità, prezzi). Analogamente per le conoscenze legate allo spazio e alle figure è essenziale la loro esplorazione dinamica in contesti vari.
A livello maturo tali funzioni evolvono verso la dimostrazione matematica, che ha specificità proprie, la più importante delle quali è che essa è basata sulla nozione di **conseguenza logica**, per cui

$$A \rightarrow B$$

è asserito quando non esistono modelli in cui vale A mentre B non vale (ovvero B vale in tutti i modelli in cui vale A): si noti che nella scrittura "$A \rightarrow B$", la freccia non sta a significare l'implicazione materiale ma ha un ruolo puramente iconico.
La definizione di conseguenza logica dà ragione del perché valgono gli enunciati matematici e si tratta di una ragione ben diversa da quella delle verità empiriche delle scienze sperimentali. Un enunciato B è un teorema solo relativamente a qualche teoria (ipotesi); è senza senso dire che è tale in assoluto (anche se può sembrare così; si pensi a un enunciato come "2+2 = 4" o a quello del teorema di Pitagora). L'attività matematica consiste nell'entrare dentro alla relazione $A \rightarrow B$ e per fare ciò occorre argomentare, colmare le lacune, fare tentativi, esperimenti mentali e non; dopo un po' di attività di solito si chiarisce la teoria che fa da sfondo all'enunciato, il significato dei termini coinvolti in esso; allora con l'uso delle conoscenze specifiche che si hanno sull'argomento, inclusa eventualmente un po' di manipolazione simbolica, si riesce finalmente a vedere un cammino da A a A_1, da A_1 a A_2, ..., e infine da A_n a B.
Queste considerazioni sono alla base della seguente definizione di dimostrazione:
Una dimostrazione è un insieme ordinato di enunciati del tipo $A_i \rightarrow A_{i+1}$, che sono collegati per transitività.
C'è un'unica regola: scrivi $A_i \rightarrow A_{i+1}$ ogni volta che A_{i+1} è conseguenza logica di A_i.
L'insieme può anche avere un ordine non lineare, ad esempio ad albero.
Un punto cruciale consiste nel fatto che la relazione di conseguenza logica è indecidibile. Cioè non esiste in generale alcuna macchina, come quelle sognate da Leibniz (neanche il computer più potente mai progettato), che possa stabilire concretamente per ogni A e B se B è conseguenza logica di A o meno.

Pertanto i matematici indagano se e perché un tale enunciato valga o meno e questo compito richiede abilità per essere risolto. Il perché l'enunciato valga è la dimostrazione (dimostrazioni essenzialmente diverse corrispondono a perché diversi).
La dimostrazione è un discorso, che può far riferimento a qualsiasi frammento di conoscenza si ritenga utile e produttivo per accertare che B è conseguenza di A (spesso A sembra non esserci, in quanto la teoria di riferimento, ad esempio l'aritmetica, può rimanere implicita, ad es. quando B è un enunciato come "2+2 = 4" o il teorema di Pitagora). Dimostrare è un processo dialogico del soggetto con un interlocutore, eventualmente virtuale; ciò ha conseguenze importanti per la didattica della dimostrazione, in quanto il suo carattere argomentativo deve sempre essere presente perché l'attività abbia senso.
Sono obiettivi da perseguire nella scuola superiore:

- consolidare le due funzioni del discorso sopra descritte, che si configurano come abilità specifiche;
- supportare gli studenti nella delicata evoluzione che li porta dall'argomentare al dimostrare, cioè dal discorso più o meno informale e intuitivo alla esplicitazione della relazione di conseguenza logica che lega le varie proposizioni di una dimostrazione: anche queste sono descritte nelle indicazioni programmatiche come abilità specifiche;
- dare agli studenti gli elementi conoscitivi tecnici essenziali per entrare dentro agli aspetti fondamentali del ragionamento matematico (dimostrazioni per assurdo, per induzione, ..): questi costituiscono le conoscenze del Nucleo, da sviluppare in contesti vari e significativi, legati ai temi propri degli altri Nuclei.

E' comunque da evitare un'impostazione puramente formalistica delle attività dimostrative: il significato dei "connettivi logici" (se…allora, non, e, o, tutti, esiste, ecc.) va acquisito all'interno di attività significative e non come addestramento alla manipolazione di segni dal significato più o meno misterioso.

Elenco delle attività

Livello scolare	Titolo	Contesto	Collegamento esterni	Pagina
1° biennio	Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione	Figure geometriche piane		
1° biennio	Diverse scritture per una formula	Aritmetica: numeri interi		
1° biennio	Quel che vedo è sempre vero	Aritmetica: numeri naturali	Storia	
1° biennio	Non è vero che è sempre vero	Aritmetica: numeri primi	Storia	
1° biennio	Sarà vero, ma non ci credo	Aritmetica: numeri primi		
1° biennio	Condizione necessaria ma non sufficiente	Aritmetica: numeri primi		
1° biennio	Attività con software geometrico	Figure geometriche	Lingua italiana	
1° biennio	Quante rette per *n* punti?	Punti e rette nel piano		
1° biennio	Si può fare un riassunto in matematica?	Linguaggi	Lingua italiana Lingua straniera	
1° biennio	Dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico: prove di verifica	Linguaggi	Lingua italiana Lingua straniera	
2° biennio	Grissini e triangoli	Probabilità e geometria		
2° biennio	Area di un rettangolo come cambia variando la lunghezza dei lati.	Figure geometriche e loro relazioni.	Lingua italiana	
2° biennio	Tasselli del domino e induzione	Ragionamenti combinatori	Storia	