Quante rette per *n* punti?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici. Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura. Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) per affrontare problemi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Punti e rette nel piano.

Questa attività può essere svolta in un primo o in un secondo anno del primo biennio con l'obiettivo specifico di motivare gli studenti alla produzione e alla validazione di congetture. Più in generale, si tratta di un'attività che dovrebbe consentire un significativo e graduale avvio alla dimostrazione.
Il contesto è quello scolastico della geometria e dell'aritmetica elementare; nell'ambiente di lavoro si utilizza, insieme alla carta e alla matita, un software per la rappresentazione di figure geometriche che aiuta nella rappresentazione dei dati ed, eventualmente, un foglio elettronico per l'elaborazione dei dati.
L'attività è fondata su due ipotesi didattiche:

1. Il percorso di apprendimento degli studenti è caratterizzato da tre fasi fondamentali. La prima è quella in cui si risponde a domande del tipo "com'è?", che richiedono l'osservazione attenta di un ambiente al fine di descriverlo. Vi è poi la fase del "perché?" che richiede abilità non solo descrittive, ma anche esplicative: si deve spiegare perché un certo ambiente ha determinate caratteristiche. Si deve quindi utilizzare una teoria, che consenta di rispondere in modo pertinente alle domande. Vi è poi la fase del "cosa succederebbe se...?"; le risposte a domande di tale tipo richiedono l'uso dell'analogia, della simulazione e del pensiero ipotetico-deduttivo.
2. L'utilizzazione di micromondi([1]) come particolari ambienti informatici è assai utile nella didattica della matematica per favorire attività di risoluzione di problemi, passando attraverso tutte e tre le fasi sopra elencate. Infatti lo studente è portato a mettere in gioco, nell'attività di

[1] Un micromondo è un ambiente messo a disposizione di un utilizzatore per fare esplorazioni, per compiere esperienze: l'esplorazione dell'ambiente è condotta sovente per tentativi ed errori; favorisce l'immaginazione, la creatività; invita a formulare ipotesi, a produrre congetture; sollecita attività di carattere prevalentemente euristico.

risoluzione di problemi, abilità a diversi livelli, forse anche perché sente che deve interagire con un mezzo (l'elaboratore elettronico) che non conosce già le risposte (come invece accade quasi sempre per l'insegnante) e questo lo induce a lavorare per tentativi ed errori, con metodi essenzialmente euristici. In un certo senso l'elaboratore affievolisce quel rapporto di sudditanza che esiste tra insegnante e studente e che probabilmente lo porta ad assumere posizioni passive, di ascolto e inibisce l'attività congetturale.

Descrizione dell'attività

L'attività si struttura in due fasi, la prima delle quali prevede la proposta del problema e la sua risoluzione in piccoli gruppi collaborativi e la seconda una discussione collettiva di bilancio nella quale l'insegnante commenta le diverse soluzioni proposte dai vari gruppi, organizza e sistema tecniche e conoscenze utili a risolvere il problema.

<u>Prima fase</u>

L'insegnante presenta a piccoli gruppi collaborativi la seguente proposta di lavoro:

1. Dati tre punti non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?
2. Dati quattro punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?
3. Dati cinque punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?
4. Dati n punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono fra loro in tutti i modi possibili?

Per rispondere alle varie domande si può utilizzare, oltre alle conoscenze, l'elaboratore elettronico[2].

In genere le prime tre domande non comportano particolari problemi e servono, più che altro, a fare entrare nella logica del problema gli studenti. Il ruolo dell'insegnante, in questa prima fase è quello di osservare le differenti strategie risolutive e incoraggiare idee originali, senza preoccuparsi eccessivamente che queste convergano verso la soluzione del problema, ossia verso la determinazione della relazione funzionale che lega il numero di rette al numero di punti.

<u>Seconda fase</u>

L'insegnante avvia una discussione *matematica di bilancio* con l'intera classe, presentando le diverse strategie risolutive attuate dai vari gruppi, evidenziandone limiti e potenzialità. A titolo di esempio che, ovviamente, non esaurisce tutte le possibili strategie risolutive proposte dagli studenti, si presenta la seguente discussione matematica di bilancio condotta dall'insegnante alla presenza di tutta la classe[3].

Discussione matematica di bilancio

Le strategie risolutive presentate dai vari gruppi si possono ridurre essenzialmente alle quattro seguenti:

1. Alcuni studenti, dopo aver organizzato i dati in tabelle (vedi Tabella 1)

numero di punti	*numero di rette*
2	1
3	3
4	6
5	10
....	……….

Tabella 1

[2] Si intende qui un foglio elettronico e un software per la rappresentazione di figure geometriche. Si precisa che tali ambienti non sono comunque necessari.

[3] Si tratta di una discussione che è il risultato di varie osservazioni e discussioni effettivamente condotte in classi reali sul problema proposto.

passano ai tentativi di generalizzazione. Alcuni, anche perché aiutati da software che consentono di rappresentare figure geometriche, si accorgono che il numero di rette può essere determinato contando, in luogo delle rette, lati e diagonali di poligoni convessi aventi tanti vertici quanti sono i punti considerati.

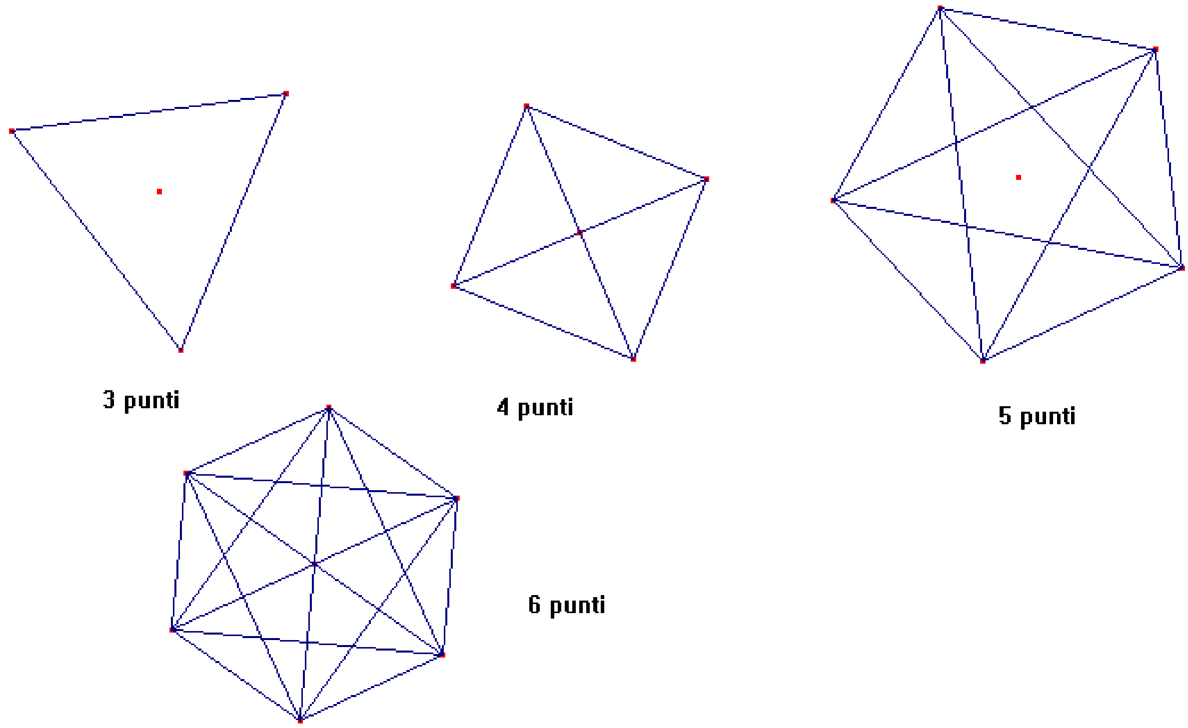

Figura 1

Si può notare che per un numero *n* di punti a tre a tre non allineati passa un numero di rette uguale alla somma fra il numero di punti e il numero di diagonali di un poligono che ha per vertici quei punti. Ciò che si cerca è una formula che permetta, conoscendo soltanto il numero dei punti a tre a tre non allineati a disposizione, di ricavare il numero delle rette. Un'osservazione coordinata tra tabella numerica e figure, ossia condotta sia nel registro numerico che in quello grafico geometrico, consente di congetturare che il numero di rette passanti per un numero *n* di punti risulta dalla somma di tutti i numeri naturali inferiori al numero di punti.
Infatti, nel caso ci siano tre punti, il primo punto è collegato con gli altri due, il secondo punto con un punto, l'ultimo con nessuno, per cui 2+1=3. Quando abbiamo 4 punti, 3+2+1=6. Quando abbiamo 5 punti, 4+3+2+1=10. Quando abbiamo 6 punti 5+4+3+2+1=15. Quando abbiamo 7 punti 6+5+4+3+2+1 = 21… e così via. Ovviamente questa è una congettura, non ancora dimostrata, ma l'osservazione e il ragionamento effettuati consentono di porre in tale congettura una certa fiducia.
Chi ha seguito questa strategia risolutiva può notare che il problema è simile a quello di determinare la somma dei primi *n* numeri naturali.
2. Altri studenti scoprono cosa accade con 6 punti, a tre a tre non allineati; poi con 7 (c'è anche chi arriva fino a 10). Le prove sono fatte per tentativi: non c'è ancora alcuna congettura. L'idea è che una ricca raccolta di dati relativi a casi particolari, possa aiutare a evidenziare regolarità che non sono rilevabili con pochi dati a disposizione.
Un gruppo di studenti che ha scelto questa via, dopo qualche prova affinando la strategia si accorge che, continuando a tracciare rette, già con 6 punti è difficile contare il numero delle stesse.

Allora utilizzando i colori, noterà che è sufficiente contare i lati e le diagonali dei poligoni aventi per vertici i punti dati ed elabora la seguente tabella:

3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	10	15	21	28	36	45

Tabella 2

Osserva che il numero di rette che passano per *n* punti, addizionato con *n*, dà il risultato del numero di rette che passano per *n*+1 punti. Dietro questa affermazione c'è la formula:

$$S(n) = n\text{-}1 + S(n\text{-}1) \text{ e } S(3) = 3$$

con *S*(*n*) che indica il numero delle rette passanti per *n* punti.

3. Altri studenti provano a vedere che cosa accade aggiungendo un punto a quelli dati. Gli stessi constatano di aver intuito una regolarità che viene confermata con la costruzione di una ulteriore tabella. In questo caso la fase del calcolo è successiva all'individuazione della risposta corretta (e viene attuata forse anche per confermare o per convincere chi legge della bontà dell'intuizione avuta). Gli studenti di questo gruppo notano che aggiungendo un nuovo punto e dovendolo congiungere con gli altri preesistenti, si creano tante nuove rette quanti sono i punti presi in considerazione. Il numero di queste nuove rette va addizionato a quello delle rette preesistenti. Questo gruppo di studenti lavora utilizzando l'analogia con il problema della somma dei primi numeri naturali, risolto in una precedente attività e propone la tabella:

Numeri Punti	Somma numeri	Somma rette
0	0	0
1	1	0
2	3	1
3	6	3
4	10	6
5	15	10
6	21	15
7	28	21
8	36	28
9	45	36

Tabella 3

Si nota che la colonna riguardante il numero delle rette risulta "spostata" di un posto verso il basso. Quindi, adattando opportunamente la formula riguardante la somma dei primi numeri naturali, ossia S(*n*)= *n*(*n*+1)/2, risolve il problema. La formula è $R(p)=p(p\text{-}1)/2$, cioè il numero *R* di rette passanti per *p* punti è uguale alla metà del numero *p* moltiplicato per la differenza tra il numero *p* di punti e uno. Questo gruppo manifesta una buona capacità di attivare e collegare registri diversi per giungere alla risoluzione e sente il bisogno di spiegare una formula con mezzi retorici. Infatti scrive prima la formula e poi la descrive utilizzando il linguaggio naturale, probabilmente per avere maggior controllo su di essa. Sembra che l'utilizzazione del linguaggio naturale abbinato a quello algebrico sia un valido strumento per favorire il controllo e per ridurre il rischio di una perdita di significato.

4. Gli studenti di questo gruppo attivano insiemi di conoscenze cercando analogie per risolvere il problema posto. Uno dei due componenti del gruppo scrive: "mi sono ricordato una sera in cui ci chiedemmo quanti cin-cin potevamo fare escludendo le volte già fatte. Trasportando quella esperienza al quesito vidi che il procedimento è lo stesso. Ovvero, per il primo punto passano tante rette quanti sono gli altri punti; per il secondo tante rette quanti sono gli altri punti meno uno, poiché è già stato legato al primo punto. E con il terzo punto lo stesso, tante rette quanti sono i punti

meno 2 e così via fino a che l'ultimo punto sarà già legato a tutti gli altri. Poi tramite l'osservazione di vari esempi notai che vi era una costante tra tutti, ovvero che se si moltiplicava per se stesso il numero di punti, lo dividevo per due, poi gli sottraevo il numero di rette che passavano per essi. Messi in formula risulta: $n^2/2$ - $n/2$. Si può giungere alla risposta anche con un ragionamento effettuato in un diverso ambiente. Per esempio si può pensare ai brindisi tra 5 persone. Quante volte in totale si può fare fare cin-cin? Essendo in 5 si può farne 5 ognuno, quindi 25. In effetti sono solo 4 ognuno, poiché uno non può fare cin-cin da solo, quindi 20; però bisogna eliminare le coppie già fatte e che quindi si deve sottrarre a 20 il numero di cin-cin già fatti. Sono 10 e 20 - 10 = 10. In 5 si possono fare 10 cin-cin. Per riportarlo in una tabella:

5 cin-cin: 0 * * * *
* 0 * * *
* * 0 * *
* * * 0 *
* * * * 0

Si può notare che il numero dei doppioni è sempre uguale alla metà del totale di coppie (esclusi quindi i 5 cin-cin che non si possono fare, perché uno non può fare cin-cin da solo).
Mettendo in formula $(n^2 - n)/2$.
Per tornare al nostro caso, le rette sono paragonabili ai cin-cin (individuabili sia l'uno sia le altre da due elementi, bicchieri o punti che siano) e il bicchiere singolo che non può fare cin-cin al punto singolo che non può individuare da solo una e una sola retta.
Quindi la formula che vale per i cin - cin vale anche per i punti e le rette".
L'uso dei verbi al singolare, suggerisce un basso livello di collaborazione tra i componenti del gruppo. Come si può notare, in tal caso l'utilizzazione dell'analogia è il punto di partenza del procedimento risolutivo, diversamente dal gruppo considerato al punto precedente.

Possibili sviluppi
- Successioni definite per ricorrenza.
- Programmi per il calcolo di successioni definite per ricorrenza.
- Complessità di calcolo per iterazione e ricorsione.
- Le differenze finite per la determinazione di leggi polinomiali.

Elementi di prove di verifica

1. *Il numero delle diagonali di un poligono*
Determinare la relazione che lega il numero delle diagonali di un poligono al suo numero di lati.

2. *La somma degli angoli interni di un poligono*
Determinare la relazione che esiste tra la somma degli angoli interni di un poligono e il numero dei lati del poligono.

3. *Il numero di regioni piane formato da n rette*
Quante sono le regioni di piano individuate da n rette a due a due incidenti e tali che non più due di esse concorrano in uno stesso punto?