Ciliegie rosse e ciliegie gialle

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi dipendenti e indipendenti. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione. Usare in varie situazioni linguaggi simbolici.	Eventi e operazioni con gli eventi. Probabilità totale, condizionata e composta. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Variabili e quantificatori. Legami tra connettivi e quantificatori.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Dati e previsioni Argomentare congetturare, dimostrare	Lingua italiana Vita sociale

Contesto
Statistica: decisioni.

L'attività si colloca in ambito sia matematico sia extramatematico: per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito probabilistico e statistico, volto ad indicare capacità di decisione. Questo esempio è riferito ad una situazione reale nella quale molto spesso si possono trovare gli studenti. È un primo esempio di avvio alla riflessione, criticità e decisione.

Descrizione dell'attività.
Il padre di Luigi dice:"*…voi giovani non capite ancora l'importanza dello studio, pensate solo al divertimento! Beh ti voglio fare questa proposta: domenica andrai allo stadio a vedere la partita della Roma, a condizioni però che prima superi con voto sufficiente il compito di matematica*".
Luigi aveva programmato anche di andare al cinema, ma sa bene che per superare il compito di matematica in modo sufficiente, dovrà studiare tutto il pomeriggio, e quasi certamente dovrà rinunciare al cinema. Capisce cioè che se vuole aumentare la probabilità di avere una buon voto nel compito di matematica diminuirà, altrettanto inevitabilmente, la sua probabilità di andare al cinema. Che decisione dovrà (o potrà) prendere ?
In generale, la lettura di un problema con riferimento alla vita reale, può disorientare inizialmente lo studente che spesso è portato a distinguere un testo matematico da uno letterario per la sola presenza di numeri. Quello, sopra riportato, è un esempio di problema senza numeri, in cui interviene il concetto di probabilità da un punto di vista che potremo chiamare qualitativo: se Luigi decide di studiare nel pomeriggio, vedrà aumentare la probabilità di vedere la partita e, contestualmente, diminuire la probabilità di andare al cinema.
Un problema di questo genere è considerato "*un problema aperto*", nel senso che non presenta dati numerici; essi si possono inserire di volta in volta, proponendo anche alcune variazioni dipendenti dal contesto. Inoltre, la descrizione della situazione richiede, da parte dello studente, anche una serie

di conoscenze linguistiche ed epistemologiche che gli consentano di sfrondare il testo dalle parti descrittive se quest'ultime non alterano la dinamica degli eventi.
Un esempio di problema, analogo a quello precedente di Luigi, del cinema e della partita, in cui compaiono però i numeri può essere il seguente:

"Siano dati due cestini di ciliegie A e B. Il cestino A contiene 19 ciliegie rosse e 1 ciliegia gialla e il cestino B contiene 4 ciliegie gialle e 1 rossa.Viene presentato uno dei due cestini nascosto da un drappo, si deve decidere di quale cestino si tratta.*"*
Si propone di operare seguendo la seguente regola di decisione:
si pesca dal cestino una ciliegia:
- se è rossa si afferma che si tratta del cestino A,
- se è gialla si afferma che si tratta del cestino B.

Seguendo questa regola, qual è la probabilità di prendere una decisione *corretta* circa il cestino che è stato presentato?
Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*vedi Tabella 1.*) I simboli α e β indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata quando viene presentato (all'insaputa di tutti, naturalmente) il cestino A e la probabilità di prendere una decisione errata quando viene presentato (all' insaputa di tutti) il cestino B.

Regola di decisione	***Situazione effettiva*** *(sconosciuta)*	
	Viene presentato il cestino A	*Viene presentato il cestino B*
Si pesca una ciliegia rossa e si afferma di avere avuto il cestino A	Decisione corretta $1 - \alpha$	Decisione errata β
Si pesca una ciliegia gialla e si afferma di avere avuto il cestino B	Decisione errata α	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 1

Si possono immaginare tre possibili soluzioni riferite a tre possibili specificazioni della domanda:

❖ <u>Sotto il drappo c'è il cestino A</u>. Qual è la probabilità di una decisione corretta?
Si pesca una ciliegia: se è rossa, la regola impone di dichiarare A e porta a una decisione corretta.

$$P\text{ (prendere una decisione corretta avendo avuto il cestino A)} =$$
$$= P\text{ (pescare una ciliegia rossa da A)} = \frac{19}{20} = 1 - \alpha$$

❖ Sotto il drappo c'è il cestino B. Qual è la probabilità di una decisione corretta?
Si pesca una ciliegia: se è gialla, la regola impone di dichiarare B e porta a una decisione corretta.

P (prendere una decisione corretta avendo avuto il cestino B) =

$$= P \text{ (pescare una ciliegia gialla da B)} = \frac{4}{5} = 1 - \beta$$

❖ Sotto il drappo c'è un cestino, ma non si sa quale. Qual è la probabilità di una decisione corretta?
Si pesca una ciliegia e, seguendo la regola, se è rossa si dichiara A se è gialla si dichiara B.

Come si è appena visto ai punti 1 e 2, si può prendere una decisione corretta in due modi:

- viene offerto (all'insaputa di tutti) il cestino A: si pesca una ciliegia rossa e si dichiara A;
- viene offerto (all'insaputa di tutti) il cestino B: si pesca una ciliegia gialla e si dichiara B.

Le due alternative (o si pesca da A o si pesca da B) sono tra loro incompatibili (se si pesca da A non si è pescato da B).
Sia indicata con P_A la probabilità che venga presentato il cestino A e con P_B la probabilità che venga presentato il cestino B. La probabilità di una decisione corretta risulta:

P(prendere una decisione corretta) = P(avere il cestino A e di pescare una ciliegia rossa) +
+ P(avere il cestino B e di pescare una ciliegia gialla) =
= P(avere il cestino A)· P(pescare una ciliegia rossa da A) +
+ P(avere il cestino B)· P(pescare una ciliegia gialla da B) =
$= P_A (1 - \alpha) + P_B (1 - \beta) = 1 - (P_A \alpha + P_B \beta)$

Si può anche ragionare in modo diverso, partendo dalle probabilità di prendere una decisione errata:

P(prendere una decisione corretta) = 1 – P(prendere una decisione errata) =
= 1 – [P(avere il cestino A e di pescare una ciliegia gialla) +
+ P(avere il cestino B e di pescare una ciliegia rossa)]=
= 1 – [P(avere il cestino A)· P(pescare una ciliegia gialla da A) +
+ P(avere il cestino B)· P(pescare una ciliegia rossa da B)] =
$= 1 - (P_A \alpha + P_B \beta)$

Si rileggano adesso le conclusioni precedenti nel caso del nostro amico Luigi, inserendo anche "personali" valutazioni di probabilità (che potranno, naturalmente, essere oggetto di discussione).

Regola di decisione	***Situazione effettiva*** *(alternative possibili)*	
	A - Studio (si rinuncia al cinema)	*B - Non studio (si va al cinema)*
Si prende 8 al compito di matematica e si va allo stadio.	Conclusione coerente (e felice) $1 - \alpha = \frac{8}{10}$	Conclusione particolarmente fortunata $\beta = \frac{3}{10}$
Non si riesce a prendere 8 al compito di matematica e non si va allo stadio.	Conclusione particolarmente sfortunata $\alpha = \frac{2}{10}$	Conclusione coerente (ma infelice) $1 - \beta = \frac{7}{10}$

Tabella 2

Qual è la probabilità di andare allo stadio?

- Si decide di studiare e si rinuncia al cinema. La probabilità di prendere 8 al compito di matematica e di andare allo stadio è

$$1 - \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

- Si decide di non studiare e di andare invece al cinema. La probabilità di prendere 8 al compito di matematica e di andare allo stadio è

$$\beta = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

- Si lancia la monetina, se viene testa si opta per l'alternativa A (lo studio), se viene croce si decide per l'alternativa B (il cinema), con $P_A = P_B = ½$.

Come si è appena visto ai primi due punti precedenti, si può andare allo stadio in due modi:

- si studia, si rinuncia al cinema, si prende 8 al compito di matematica e, finalmente, si va allo stadio;
- non si studia, si va al cinema, si riesce ciò nonostante a prendere 8 al compito di matematica e si va allo stadio.

Le due alternative (A e B) sono tra loro incompatibili (o si resta a casa a studiare o si va al cinema rinunciando allo studio).
La probabilità di andare allo stadio risulta:
P(andare allo stadio) =
= P(studiare, rinunciando al cinema, e prendere 8 al compito di matematica) +
+ P(andare al cinema, rinunciando allo studio, e prendere 8 al compito di matematica) =
= P(studiare)· P(prendere 8 al compito di matematica avendo studiato) +
+ P(non studiare)· P(prendere 8 al compito di matematica non avendo studiato) =

$$= P_A\,(1 - \alpha) + P_B\,\beta) = \frac{1}{2}\,\frac{8}{10} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{10} = \frac{11}{20} = 0{,}55$$

Osservazione
Con un ragionamento analogo, si invita lo studente a risolvere problemi simili in rapporto alle esperienze personali riferite al suo quotidiano, suggerendogli anche di "inventare" personalmente le misure di probabilità di cui dovrà servirsi.

Nota: Come già abbiamo visto in alcune attività del nucleo Dati e Previsioni, è opportuno fare una piccola considerazione sulla necessità della *Probabilità a priori*. Si tratta cioè di dover completare i dati del problema con valutazioni di probabilità (nel caso in oggetto "andare al cinema" o "studiare tutto il pomeriggio") da assegnare, non attraverso formule prestabilite ma in modo soggettivo-coerente-razionale. Ciò potrà essere fatto esaminando razionalmente il problema *alla luce* di tutte le informazioni a disposizione, discuterne in classe con la guida attenta dell'insegnante che dovrà vigilare perché "soggettivo" non diventi "arbitrario", rendendosi conto della necessità dell'inserimento, fra i dati del problema, anche di tale dato per affrontare compiutamente il problema stesso. Anche nel caso in cui non si abbia alcuna informazione ci si convincerà, presto e facilmente, che tale situazione di *ignoranza* potrà essere significativamente tenuta presente attraverso il concetto di equiprobabilità: se non sappiamo niente non possiamo certo affermare che un evento è più probabile di un altro… Ed allora diamo a tutti la stessa probabilità pronti a considerare gli eventuali futuri aggiornamenti, in seguito ad esperimenti o altro tipo di informazione.