Premessa

L'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d'incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. In particolare, l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale e non deve costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni.

In tal senso la matematica compare in tutto il mondo quale elemento essenziale nella formazione degli allievi a tutti i livelli d'età e qualunque sia il percorso scelto, di istruzione o di formazione, nel ciclo secondario. Purtroppo questa necessità è spesso presentata in forma negativa dai mass-media: la matematica di conseguenza è da molti studiata più per obbligo che per piacere. Per giunta molte persone anche colte giustificano il loro disinteresse con il pretesto, scientificamente infondato, di non avere inclinazione per la materia. Invece la moderna società richiede conoscenze e abilità matematiche sempre più diffuse.
Significativa a questo proposito è la risoluzione approvata all'unanimità nel 1997, in cui la Conferenza generale dell'UNESCO così si esprime:

> *"…considerata l'importanza centrale delle matematica e delle sue applicazioni nel mondo odierno nei riguardi della scienza, della tecnologia, delle comunicazioni, dell'economia e di numerosi altri campi;*
> *consapevole che la matematica ha profonde radici in molte culture e che i più importanti pensatori per migliaia di anni hanno portato contributi significativi al suo sviluppo, e che il linguaggio e i valori della matematica sono universali e in quanto tali ideali per incoraggiare e realizzare la cooperazione internazionale;*
> *si sottolinea il ruolo chiave dell'educazione matematica, in particolare al livello della scuola primaria e secondaria sia per la comprensione dei concetti matematici, sia per lo sviluppo del pensiero razionale".*

In questa sfida all'inizio del nuovo millennio l'Italia non può restare indietro. Abbiamo, perciò, bisogno di docenti ben preparati in matematica che avvicinino gli allievi a questa disciplina con curiosità e fantasia.

La formazione del curricolo scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro un sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambi gli aspetti sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato lungo tutto il percorso di formazione. Dentro a competenze strumentali come eseguire calcoli, risolvere equazioni, leggere dati, misurare una grandezza, calcolare una probabilità, è, infatti, sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte, l'aspetto culturale, che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche, quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati, non ha senso senza i riferimenti ai calcoli, al gioco delle ipotesi, ai tentativi ed errori per validarle, alle diverse dimostrazioni che evidenziano i diversi significati di un enunciato matematico: essi costituiscono il terreno concreto e vivo da cui le conoscenze teoriche della matematica traggono alimento. Entrambi i tipi di competenze costituiscono, perciò, obiettivi di lungo termine, cui occorre dare compimento nel corso del ciclo secondario. La loro costruzione completa così un percorso iniziato già nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado, realizzando una didattica di tipo elicoidale, che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta.

Il nesso profondo tra aspetti strumentali e culturali potrà in particolare essere colto dagli alunni attraverso opportune riflessioni storiche, introdotte gradualmente. Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi incertezza negli studenti. È, infatti, importante che non si operino delle forzature, o peggio si inventi una storia inesistente, per adattare le problematiche storiche alle conoscenze degli alunni: la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata.

Il bambino, e tanto più il giovane, non è una tabula rasa che acquisisce i concetti matematici per pura astrazione. Le ricerche più recenti hanno provato che sono le esperienze ad attivare gli opportuni circuiti cerebrali di cui l'essere umano già dispone. Non si tratta di imporre una matematica dall'esterno, ma di fare evolvere dall'interno la matematica che vive nel nostro corpo. Quindi le intuizioni, le metafore concettuali ecc. non sono un primo vago approccio ai concetti matematici, qualcosa di 'sporco' e scorretto da fare sparire al più presto, ma ne costituiscono un ingrediente fondamentale, che rimane anche a livelli estremi di rigore. Conseguentemente, la matematica deve essere insegnata come un'impresa umana (nel senso ampio di questo termine), non come qualcosa che va contro il nostro essere. Ciò ha conseguenze importanti sia rispetto a molte teorie didattiche sia rispetto al ruolo che i misconcetti e gli errori possono giocare nell'apprendimento.

Con riferimento alla doppia modalità introdotta sopra, i nuclei essenziali su cui costruire le competenze matematiche del giovane proseguono quelli già individuati per il primo ciclo.
Pertanto quattro sono i nuclei tematici del curricolo che qui è proposto: essi completano i contenuti dell'educazione matematica avviati negli anni precedenti:
- *Numero e algoritmi;*
- *Spazio e figure;*
- *Relazioni e funzioni;*
- *Dati e Previsioni.*

Rispetto ai Nuclei proposti per il ciclo primario, sono stati aggiunti alcuni temi particolarmente significativi: algoritmi e funzioni, che pure in forma intuitiva trovavamo posto già negli anni precedenti. L'insegnante dovrà cercare di svilupparli unitamente agli altri argomenti in modo coordinato, cogliendo ogni occasione di collegamenti interni e con altre discipline.

Vi sono anche tre nuclei trasversali, centrati sui processi mentali degli allievi, che continuano anch'essi il percorso iniziato fin dalla scuola primaria, con l'aggiunta della parola "dimostrazione", attività chiave della matematica matura:

- *Argomentare, congetturare, dimostrare;*
- *Misurare;*
- *Risolvere e porsi problemi.*

Il primo, che in realtà è un nucleo misto, contiene anche alcuni contenuti di tipo logico e caratterizza le attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive a forme di pensiero più rigoroso e sistematico, in particolare alla dimostrazione, cuore del pensiero matematico stesso.
Il secondo consente un approccio esperienziale e teorico alle grandezze, in collegamento con le scienze, per ricavare relazioni tra le grandezze esperite e costruire modelli di fenomeni studiati.
Il terzo offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi, per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza e per giungere all'uso di modelli matematici in contesti vari.

La proposta è completata da una riflessione sul *Laboratorio di matematica* e da alcune *Indicazioni metodologiche*. Va osservato che il *Laboratorio* non costituisce né un nucleo di contenuto né uno di processo, ma si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate sull'uso di strumenti, tecnologici e non, e finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non vuole essere un luogo fisico diverso dalla classe, ma piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone, strutture, idee.

Il curricolo è presentato secondo la seguente scansione:

- Primo biennio (classe prima e seconda)
- Secondo biennio (classe terza e quarta).

È in preparazione un ulteriore volume per la classe quinta contenente percorsi ed esempi sia di approfondimento sia di consolidamento rispetto alle abilità e conoscenze dei primi quattro anni. Esso conterrà anche un capitolo con suggerimenti per l'uso della storia della matematica nell'insegnamento: esso completa le sintetiche note storiche del presente volume.

Ferdinando Arzarello

Abilità e conoscenze matematiche

Ciclo Secondario
(Primo e secondo biennio)

Numeri e algoritmi

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• Calcolare quoziente e resto nella divisione tra interi : $\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$. • Scrivere un numero decimale come somma di multipli di potenze di 10 ad esponente intero. • Stabilire se una divisione (frazione) dà luogo a un numero decimale periodico o non periodico. • Scrivere un numero in notazione scientifica • Stimare l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico. • Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. • Approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali (cfr. *Misurare* e *Dati e previsioni*). • Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo ad essa equivalente e, viceversa, dato un grafo di calcolo, scrivere l'espressione numerica a esso corrispondente. Usare consapevolmente le parentesi. (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Calcolare somma, prodotto, quadrato di polinomi.	• Il teorema fondamentale dell'aritmetica. • Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi: elementi neutri, opposto, ordinamento, valore assoluto. • Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali: elementi neutri, opposto, inverso, ordinamento. • I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali (1). • Rappresentazioni scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali. • Analogie e differenze tra i diversi insiemi numerici. Rappresentazione dei numeri sulla retta. • La potenza di numeri positivi con esponente razionale. • I polinomi e le loro operazioni (addizione e moltiplicazione). Il grafo di calcolo di un'espressione (numerica e algebrica). • Polinomi in una indeterminata. (cfr. *Relazioni e funzioni*).

(1) I numeri reali vanno introdotti in forma intuitiva e non, ad esempio, come coppie di classi contigue.

Spunti storici

- Evoluzione storica del concetto di numero (i numeri nell'antichità, i numeri nel Medio Evo – gli "Abacisti", la difficoltà nell'accettare i numeri negativi, i numeri reali e il problema della continuità (cfr. *Spazio e figure*).
- Il numero zero.

Osservazioni

- Un esame critico di come si modifica il concetto di potenza quando si passa da un insieme numerico a un altro (ad esempio dagli interi, ai razionali, ai reali) prepara la strada all'introduzione della funzione esponenziale e della funzione logaritmica.
- Porre l'attenzione sui diversi significati che talvolta può assumere lo stesso segno; per es. il segno – (meno) può indicare l'opposto (operazione unaria) o l'operazione di sottrazione (operazione binaria). Le calcolatrici scientifiche e le moderne calcolatrici

grafiche possiedono due tasti distinti (e a volte utilizzano due simboli diversi) per indicare i diversi significati.
- Uno scoglio concettuale e operativo rilevante, sul quale è bene insistere, è il prodotto di un numero (positivo) x per un numero k compreso tra 0 e 1. Il risultato è minore di x, e questo si scontra con un modello di moltiplicazione (tra numeri naturali) acquisito e sedimentato, secondo il quale la moltiplicazione è un'addizione ripetuta. Occorre insistere per cogliere, per esempio nel prodotto 120·0,8 il calcolo dell'80% di 120. Nel calcolo con le percentuali (per esempio: il prezzo 120 euro diminuisce del 7%) il modello moltiplicativo (120·0,93) dovrebbe affiancarsi e prevalere sul modello additivo (120 – 0,07·120).

Si sconsiglia di:
- Calcolare espressioni numeriche eccessivamente complesse; conviene demandare a strumenti di calcolo simbolico la loro manipolazione e semplificazione.
- Trasformare espressioni contenenti radicali (ad es. la razionalizzazione del denominatore, ecc.): conviene ridurre al minimo il calcolo coi radicali.
- Introdurre i monomi e poi i polinomi. L'oggetto matematico fondamentale è il polinomio (per esempio a coefficienti razionali o reali).
- Sottolineare eccessivamente la Regola di Ruffini per la divisione dei polinomi: è importante invece il teorema di Ruffini, che verrà svolto eventualmente nel secondo biennio.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Individuare analogie e differenze tra i diversi insiemi, numerici (naturali, interi, razionali, reali) *e non* numerici (polinomi nei razionali, nei reali, nelle classi di resto, vettori, …) dal punto di vista operazionale. • Eseguire semplici fattorizzazioni di polinomi nei razionali. • Utilizzare strutture più complesse: i vettori.	• La divisione dei polinomi. • Equazioni polinomiali: numero delle soluzioni e algoritmi di approssimazione (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale, prodotto scalare (cfr. *Spazio e figure*).

Spunti storici
- Cenni sulla teoria dei codici (con riferimenti anche alla statistica per i metodi frequentisti).

Osservazioni
- Lo strumento *vettore* viene utilizzato anche in altre discipline, come ad esempio in Fisica, ed è quindi opportuno esaminare tale concetto sotto diversi punti di vista. I nuovi software di Geometria Dinamica prevedono l'uso dello *Strumento Vettore*.

<u>Spazio e figure</u>

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure. geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Analizzare con strumenti intuitivi sezioni piane e sviluppi piani di poliedri (cfr. *Laboratorio di matematica*). • Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, …) (cfr. *Laboratorio di matematica*). • Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Risolvere e porsi problemi, Laboratorio di matematica)*. • Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Laboratorio di matematica*). • Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Laboratorio di matematica, Dati e previsioni*). • Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare*). • Riconoscere e costruire poligoni equiscomponibili • Calcolare perimetri e aree di poligoni (cfr. *Argomentare, congetturare e dimostrare, Misurare*). • Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato (cfr. *Relazioni e funzioni*).	• Dallo spazio al piano: nozioni intuitive. Rette, semirette, segmenti, piani, semipiani, angoli. Poliedri, coni, cilindri, sfere e loro sezioni. • Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie. • Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli. • Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. • Lunghezze e aree dei poligoni. Esempi di grandezze incommensurabili. • Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano. Simmetrie nei poliedri regolari. • Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza tra due punti. Equazione della retta; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità.

Spunti storici

- Il problema della conoscenza in geometria: origini empiriche e fondazione razionale dei concetti geometrici.
- Le origini: Talete, Pitagora, Euclide.
- La scoperta di grandezze incommensurabili.
- Cartesio e l'algebrizzazione della geometria.
- L'origine degli strumenti geometrici: dalla riga e compasso al computer.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Individuare nel mondo reale situazioni riconducibili alla similitudine e descrivere le figure con la terminologia specifica. • Individuare proprietà invarianti per similitudini. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini (cfr. *Argomentare, congetturare, dimostrare, Laboratorio di matematica*). • Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza. (cfr. *Argomentare, congetturare, dimostrare*). • Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici (cfr. *Laboratorio di matematica*). • Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole (cfr. *Risolvere e porsi problemi*). • Calcolare valori approssimati di π (cfr. *Numeri e algoritmi, Laboratorio di matematica, Misurare*). • Analizzare in forma problematica la risolubilità dei triangoli rettangoli e risolverli. Utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell'ambito di altri settori disciplinari (cfr. *Laboratorio di matematica, Argomentare, congetturare, dimostrare*, *Risolvere e porsi problemi*). • Calcolare aree e volumi di solidi (cfr. *Misurare*). • Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza (cfr. *Laboratorio di matematica, Argomentare, congetturare, dimostrare*, *Risolvere e porsi problemi*).	• Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze. • Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia. • La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrivibili e circoscrivibili. • Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche. (1) • Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Il numero π. • Seno, coseno e tangente di un angolo. Coordinate polari. • Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo. • Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio. • Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi. • Proprietà dei principali solidi geometrici.

(1) Le equazioni della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole saranno considerate in sistemi di riferimento opportuni.

Spunti storici
- La sezione aurea.
- I problemi classici: duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del cerchio.
- Ripercorrere il metodo di Archimede per determinare la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio.
- Dalla geometria alle geometrie (una panoramica sugli sviluppi che dall'Ottocento portano al nostro secolo).

Dizionarietto

- Macchine matematiche. Le 'macchine matematiche' hanno particolare interesse nella didattica della geometria. In questo contesto, una macchina matematica ha lo scopo di obbligare un punto, un segmento, una figura (sostenuti da un opportuno supporto materiale che li renda visibili e tangibili) a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge.
  Esempi di macchine matematiche sono i tracciatori di curve, i pantografi, i prospettografi. Una vasta collezioni di MM per la didattica disponibile nel Laboratorio delle Macchine Matematiche del Dipartimento di Matematica di Modena (www.macchinematematiche.unimore.it).

Relazioni e funzioni

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (variazione di una grandezza in funzione di un'altra, semplici successioni,…) (cfr. *Numeri e algoritmi, Spazio e figure, Dati e previsioni, Risolvere e porsi problemi, Misurare*). • Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, la notazione con freccia, il diagramma ad albero, il grafico. • Utilizzare le proprietà delle operazioni tra i numeri per risolvere un'equazione di primo grado (cfr. *Numeri e algoritmi*). • Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado (cfr. *Spazio e figure, Risolvere e porsi problemi*).(2) • Usare disequazioni per rappresentare sottoinsiemi del piano (in particolare, semirette, segmenti, semipiani) (cfr. *Spazio e figure, Risolvere e porsi problemi*).	• Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. • Funzioni lineari, quadratiche, costanti a tratti, lineari a tratti (1). • Zero e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita. • Sistemi lineari. Interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite. • Disequazioni di primo grado in due incognite. Sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica. • Relazioni d'ordine.

(1) Lo studio delle funzioni lineari e quadratiche può essere agevolato dall'osservazione del cambiamento dei loro grafici per effetto di trasformazioni geometriche elementari (traslazioni, opportune simmetrie centrali e assiali).
(2) Per acquisire le competenze relative alla formalizzazione e rappresentazione di leggi e relazioni, lineari e non, è consigliabile l'uso di software adeguati per le rappresentazioni grafiche.

Spunti storici
- Qualche esempio di antiche tecniche, utilizzate dagli Egiziani, dagli Indiani, dagli Arabi, per la risoluzione delle equazioni di primo grado: il metodo della "falsa posizione" semplice.

Si sconsiglia di:
- Presentare le relazioni, in particolare le relazioni d'ordine, come argomento a sé; esse vanno riconosciute e considerate durante l'esame delle proprietà dei vari insiemi numerici e delle funzioni elementari, come concetti che nascono generalizzando proprietà note.
- Introdurre precocemente simboli e formalismi non necessari; al contrario, per rendere comprensibile e apprezzabile l'uso dei simboli e delle formule conviene costruire e proporre, gradualmente, situazioni in cui siano evidenti i vantaggi di un linguaggio formale.

- Ridurre lo studio delle equazioni a pure tecniche manipolative per ottenere le soluzioni. Lo studente innanzitutto dovrà riconoscere e costruire equazioni lineari equivalenti e intenderne il significato.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Utilizzare in casi semplici la composizione di funzioni note per studiare nuove funzioni (1). • Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione; funzione inversa. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi (2). • Rappresentare e risolvere problemi di secondo grado, riconoscere problemi di secondo grado privi di soluzioni, rappresentare graficamente e risolvere problemi che si formalizzano con sistemi di secondo grado (cfr. *Spazio e figure, Risolvere e porsi problemi*). • Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici (cfr. *Numeri e algoritmi*, *Dati e previsioni, Risolvere e porsi problemi, Misurare*). • Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni e disequazioni (cfr. *Spazio e figure, Numeri e algoritmi, Misurare*). • Possedere il senso intuitivo di "limite di una successione" (cfr. *Numeri e algoritmi*, *Laboratorio di matematica*). • Rappresentare fenomeni non lineari valutando la variazione media. (cfr. *Risolvere e porsi problemi*).	• Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali (1). • Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari. • La funzione esponenziale; la funzione logaritmica; le funzioni seno, coseno, tangente. I loro grafici. • Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Il numero *e*. • Approssimazione dell'area sottesa da un grafico. • Incrementi a passo costante, pendenza media (3).

(1) Il repertorio di esempi di funzioni e equazioni dovrebbe essere abbastanza vasto da coprire le esigenze di applicazioni alla statistica e alla fisica, ma non deve includere funzioni e equazioni inutilmente complicate. Lo studio delle funzioni razionali e delle funzioni lineari va agevolato mediante la composizione di funzioni elementari e con l'uso delle trasformazioni geometriche (in particolare: traslazioni; opportune simmetrie centrali e assiali; cambiamenti delle unità di misura; cfr. *Spazio e figure, Dati e previsioni*).
(2) Lo studio delle funzioni deve essere qualitativo e deve utilizzare principalmente la lettura del grafico. E' spontaneo inoltre, nell'ipotizzare il comportamento di funzioni quali $y = 1/x$, $y = ln(x)$, $y = exp(x)$, introdurre il concetto di asintoto orizzontale o verticale, calcolando alcuni valori e ragionando sul loro andamento.
(3) La nozione di pendenza nasce nello studio di fenomeni rappresentati in sistemi cartesiani non monometrici. E' naturale il confronto con la nozione di coefficiente angolare; in collegamento con il nucleo tematico *Spazio e figure,* se si ritiene opportuno, si

può utilizzare questo confronto per ragionare su proprietà geometriche non invarianti rispetto ad un insieme di trasformazioni geometriche ed invarianti invece rispetto ad un sottoinsieme del precedente.

Spunti storici

- La ricerca della formula risolutiva per le equazioni di grado superiore al secondo: da Cardano a Galois.
- Archimede e il metodo di esaustione.
- Il metodo degli indivisibili di B. Cavalieri.
- Galileo e il moto uniformemente accelerato.
- Achille e la tartaruga: limite di una successione.

Si sconsiglia di:

- Richiedere lo studio di funzioni ottenute componendo più di due funzioni elementari.
- Presentare studio di funzioni e ricerca delle soluzioni di equazioni come problemi separati e tra loro sconnessi.
- Proporre un campionario di regole per risolvere alcuni particolari tipi di equazioni polinomiali e di sistemi, di equazioni e di disequazioni, non lineari. Meglio far sapere (vedi gli spunti storici) che le equazioni algebriche per cui esiste una formula risolutiva sono una sparuta minoranza.
- Dedicare troppo tempo allo studio delle formule trigonometriche e al loro impiego, specialmente per la risoluzione di equazioni trigonometriche.

Dizionarietto

- <u>Incrementi a passo costante</u>. Differenze $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ dei valori di una funzione f calcolati per x_{k+1} , x_k a distanza (passo) costante h: $x_{k+1} = x_k + h$.
- <u>Pendenza di un grafico</u>. Rapporto tra la variazione delle ordinate e quella delle ascisse.

<u>Dati e previsioni</u>

Primo biennio

Abilità	Conoscenze
• Comprendere la differenza fra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui. • Predisporre la struttura della matrice dei dati grezzi rispetto a una rilevazione pianificata e inserire i dati rilevati anche in un foglio elettronico (cfr. *Laboratorio di Matematica*). • Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. • Calcolare i principali indici di posizione e di dispersione per caratteri quantitativi. (1) • Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. • Valutare la probabilità in diversi contesti problematici diversi. • Distinguere tra eventi indipendenti e non.	• Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. • Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze (2).Serie storiche e loro rappresentazione. • Valori medi e misure di variabilità, definizioni e proprietà (2). • Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. L'evento certo e l'evento impossibile. Significato della probabilità e sue valutazioni (3). • Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale.

(1) Occorre distinguere con chiarezza, attraverso opportuni esempi, il caso in cui il calcolo degli indici si basa sui singoli valori effettivamente rilevati o su una distribuzione statistica con valori raggruppati in classi.
(2) Riprendere rappresentazioni e indici già introdotti nella scuola media in maniera ampliata e approfondita.
(3) Si suggerisce di dare spazio anche alla valutazione statistica della probabilità, non presentando cioè solo esempi riconducibili alla valutazione classica.

Spunti storici
- I censimenti e le osservazioni naturali nel mondo antico.
- La nascita della statistica nell'età moderna: principali filoni.
- Il gioco dei dadi nella storia dell'uomo.

Osservazioni
- Evidenziare sempre la distinzione tra il significato della probabilità e le regole di valutazione.

Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
• Identificare situazioni che richiedono di rilevare lo stesso carattere su una unità statistica formata da 2 elementi, o 2 caratteri diversi sulla stessa unità statistica. • Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo due caratteri e	• Distribuzione doppia di frequenze e tabella a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali. • Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni doppie rispetto a caratteri di qualsiasi natura.

riconoscere in essa i diversi elementi individuabili. • Selezionare, produrre ed usare appropriate rappresentazioni grafiche delle distribuzioni doppie. • Utilizzare la formula di Bayes. • Valutare criticamente le informazioni fornite dai media, con riferimento particolare ai giochi di sorte e ai sondaggi.	• Concetto e significato di modello: correlazione e regressione. • Formula di Bayes e suo significato. • Semplici distribuzioni di probabilità. • Il concetto di gioco equo. • Il ragionamento induttivo e le basi concettuali dell'inferenza (1).

(1) Trattare il ragionamento induttivo e le basi concettuali dell'inferenza a livello informativo, partendo da esempi significativi come, per esempio, exit-poll per un ballottaggio, risultati di sondaggi.

Spunti storici
- I primi campionamenti pre-elettorali negli Stati Uniti.
- Dall'astrologia al controllo dell'incertezza.
- I giochi di sorte nella storia dell'umanita'.
- Il problema delle poste in Pacioli prima e Pascal-Fermat poi.

Osservazioni
- Proporre elaborazioni statistiche su dati di osservazione o di misurazione, inseriti in un contesto problematico.

Dizionarietto
- <u>A caso.</u> Si parla di fenomeno casuale (o <u>*aleatorio*</u>) quando, come nel caso dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene un numero finito, ad ogni "esito" si assegna la stessa probabilità di verificarsi. Ciò implica un previo "rimescolamento" delle palline o, in generale, l'uso di tecniche, semplici o sofisticate, di predisposizione casuale degli eventi (ad esempio l'uso di tavole di numeri casuali o del comando "random" nelle calcolatrici elettroniche).
- <u>Matrice di dati.</u> Tabella contenente i dati della rilevazione, con unità (nelle righe) e caratteri (nelle colonne).
- <u>Incertezza.</u> Variabilità di natura casuale. Si manifesta nei fenomeni per i quali è impossibile arrivare a conclusioni certe sulla regolarità (ad es. nei lanci di moneta o in genetica) o in relazione a errori di misura (fluttuazioni della risposta dovute a `rumore', non perfetta calibrazione dello strumento, ecc…). In quest'ultimo caso si parla anche di *incertezza di misura*.
- <u>Giochi di sorte.</u> Giochi il cui esito è legato *al caso*, come ad es., Lotterie, Tombole, Pesche di beneficenza, Slot machine, Roulette….
- <u>Distribuzione di probabilità.</u> Il comportamento di un fenomeno aleatorio (lancio di un dado, misura sperimentale, …) è descritto dalla sua legge di probabilità che, a sua volta, può essere caratterizzata in molti modi: il modo più comune è attraverso la *distribuzione di probabilità*. L'esempio più semplice di distribuzione è l'elencazione dei vari casi con le corrispondenti valutazioni di probabilità.

<u>**Argomentare, congetturare, dimostrare**</u>

Primo biennio

Abilità	**Conoscenze** (1)
• Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. • Esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà. • Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici (linguaggio degli insiemi, linguaggio dell'algebra elementare, linguaggio logico). • Analizzare semplici testi del linguaggio naturale, individuando eventuali errori di ragionamento. • Riconoscere e usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica ("se…allora", "per ogni", "esiste almeno un", ecc.). • Costruire la negazione di una frase. • Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. • Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. • Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. • Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. • In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare teoremi e congetture, proprie o altrui, .	• Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi. • Variabili e quantificatori. Legami fra connettivi e quantificatori. I predicati.

(1) Le conoscenze specifiche di questo nucleo sono poche, mentre vari e pervasivi sono i collegamenti alle conoscenze degli altri nuclei: spetta al docente scegliere gli argomenti più adatti ai propri allievi.
A titolo esemplificativo si suggeriscono le seguenti attività:
- funzioni elementari, equazioni, relazioni d'ordine in *Relazioni e funzioni;*
- regolarità in tabelle e grafici in *Dati e previsioni;*
- il metodo delle coordinate in *Spazio e figure.*
- attività volte alla costruzione di significati, uso consapevole di strumenti informatic*i nel Laboratorio di matematica*;
- semplici dimostrazioni in *Numeri e algoritmi;*
- verifiche e semplici dimostrazioni di teoremi *in Spazio e figure;*
- semplici dimostrazioni in *Dati e previsioni*

Spunti storici
- I paradossi.

Secondo biennio

Abilità	**Conoscenze** (1)
• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. • Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. • Applicare in semplici casi il principio d'induzione. • Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. • Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni.	• Schemi di ragionamento (ad esempio, il ragionamento per assurdo). • Il metodo ipotetico-deduttivo. Enti primitivi e assiomi. Definizioni; teoremi e dimostrazioni.

(1) Le conoscenze specifiche di questo nucleo, come già nel primo biennio, sono poche, mentre vari e pervasivi sono i collegamenti alle conoscenze degli altri nuclei: spetta al docente scegliere gli argomenti più adatti ai propri allievi.
A titolo esemplificativo si suggeriscono le seguenti attività:

- analogie e differenze tra i diversi insiemi numerici: la potenza del numerabile, la potenza del continuo in *Numeri e algoritmi;*
- il metodo della geometria euclidea in *Spazio e figure;*
- relazioni fra variabili in *Relazioni e funzioni;*
- dimostrazioni e previsioni in *Dati e previsioni;*
- ragionamenti induttivi e deduttivi, confronto fra diverse strategie risolutive in *Risolvere e Porsi problemi;*
- uso consapevole degli strumenti informatici, simulazioni nel *Laboratorio di matematica.*

Spunti storici

- Le definizioni.
- Nascita e sviluppo dei linguaggi simbolici e artificiali.
- La crisi dei fondamenti della matematica.

Osservazioni

- E' opportuno che ci si abitui a congetture e argomentazioni in vari settori, per esempio è utile proporre lo studio di alcune proprietà dei numeri naturali o delle regole del calcolo algebrico, o anche del calcolo aritmetico (operazioni con le frazioni), come problemi di cui trovare la soluzione. Ciò significa assegnare al ragionamento algebrico (in particolare all'uso di variabili) il ruolo di strumento di pensiero. Se ne può ricavare così un'idea dell'algebra come metodo (più che come contenuto) di ragionamento "in generale". Altri esempi possono essere: proporre attività di esplorazione delle figure che conducano, attraverso la produzione di congetture e le relative prove, alla scoperta di proprietà geometriche; fare dimostrazioni non solo in geometria.
- Risulta molto importante confrontare verifiche e dimostrazioni e avere consapevolezza della differenza tra esse. Per le verifiche si può ricorrere sia all'esame di casi particolari, sia a modelli concreti, sia a strumenti informatici. Occorre mostrare che il sapere "ufficiale" è, non diversamente da quello prodotto dall'individuo o dal gruppo (ad esempio dal gruppo-classe), il frutto di un percorso fatto di congetture, verifiche,

argomentazioni, e infine sistemazione teorica: il tutto sempre modificabile, migliorabile e finalizzato in sostanza ad una condivisione la più ampia possibile.

- Può essere utile analizzare dimostrazioni sia "ufficiali" che prodotte dagli studenti (anche se scorrette), per evidenziare il ruolo delle ipotesi (e la loro arbitrarietà, provvisorietà, fondatezza), delle definizioni (più o meno formali, più o meno generali), oppure confrontare dimostrazioni diverse di uno stesso teorema. E' sempre meglio lavorare su teoremi importanti, storicamente e per il loro ruolo e impiego.
- Risulta utile proporre situazioni in cui si possa discutere della natura degli insiemi infiniti, di "grandezze infinitamente piccole" e di "grandezze infinitamente grandi".

Si sconsiglia di:

- Trattare la logica come un capitolo separato. Trovare invece collegamenti con nozioni di logica in diversi momenti e in vari ambiti; sarà anche utile qualche approfondimento specifico per riordinare e organizzare quanto visto.
- Contrapporre il senso comune alla logica matematica e la lingua naturale alla formalizzazione. Occorre invece evidenziare gli elementi di continuità (la logica trae origine dal senso comune) e spiegare le ragioni delle differenze: la formalizzazione logica è adatta per affrontare il ragionamento matematico, ma non per tutte le questioni, e quello che si guadagna in precisione, generalità e affidabilità, si perde in ricchezza di significato.
- Esagerare con le pretese di rigore in matematica; occorre, invece, richiedere , in ogni occasione, sensatezza e coerenza. Non eccedere nella formalizzazione. Non sottovalutare il ruolo dei ragionamenti intuitivi e non considerarli mai con una valenza negativa.
- Inserire in una trattazione teorica quelli che sono semplici esercizi.

Dizionarietto

- <u>Catene deduttive.</u> Una volta accettate alcune premesse, si ottengono a partire da queste altre proprietà a priori non evidenti. In matematica, le premesse sono fatti noti o comunque accettabili (in seguito si parlerà di assiomi), le conseguenze sono i teoremi. Si parla di *catene* per indicare che ogni passaggio del ragionamento è strettamente legato, in un certo ordine, ai precedenti e ai successivi.
- <u>Verificare e dimostrare</u>. La differenza fra verificare e dimostrare è particolarmente chiara in presenza di enunciati che iniziano con un quantificatore universale ("per ogni"). Se si esamina un enunciato di questo tipo, una verifica consiste nel controllo che l'enunciato è corretto in un caso particolare, mentre la dimostrazione deve avere un carattere generale (in tal senso, corrisponde ad infinite verifiche). Nel caso di proprietà di figure geometriche, una verifica è condotta su un particolare disegno, eventualmente con uno strumento informatico; nella verifica ci sono minori esigenze di rigore e di precisione rispetto ad una dimostrazione. In un'equazione o in un problema, una verifica consiste nel controllo che un singolo valore (numero o espressione algebrica) soddisfa o non soddisfa le richieste; questo, naturalmente, non dà informazioni sull'esistenza di altre soluzioni.

Misurare

Primo biennio

Le competenze individuate per il primo biennio sono da considerarsi punto di partenza per il secondo biennio. Esse non vengono pertanto ripetute nel secondo biennio, anche se varie attività saranno inevitabilmente destinate a consolidare e affinare l'acquisizione delle competenze previste nel primo biennio.

Abilità
• Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura (cfr. *Spazio e figure* e *Dati e Previsioni*). • Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze • Stimare l'ordine di grandezza di una misura (cfr. *Numeri e algoritmi*). • Verificare sotto l'aspetto dimensionale uguaglianze che esprimono relazioni fra grandezze (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. • Determinare l'incertezza assoluta che si propaga in una somma o differenza di grandezze misurate (1). • Determinare l'incertezza relativa (e successivamente quella assoluta) che si propaga in un prodotto o un quoziente di grandezze misurate (2). • Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure, con particolare attenzione alle cifre significative (cfr. *Risolvere e porsi problemi*). • Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni (lineare, quadratica) (cfr. *Relazioni e funzioni*).

(1) Si tratta di sommare le incertezze assolute delle grandezze per ottenere l'incertezza assoluta della loro somma o differenza.
(2) Si tratta di sommare le incertezze relative delle grandezze per ottenere l'incertezza relativa del loro prodotto o divisione, da cui si può risalire all'incertezza assoluta.

Spunti storici
- Talete e la misura dell'altezza della piramide.
- Galileo e la misura di spazi e tempi nei moti.

Osservazioni
È opportuno proporre agli studenti attività che li mettano a confronto con problemi di misure effettive di grandezze, come, per esempio:
- misurare i tempi di una competizione sportiva o desumerli da tabelle, costruendo istogrammi rappresentativi di frequenze in intervalli di arrivo,
- misurare grandezze in funzione del tempo, costruendo grafici rappresentativi,
- effettuare stime di misure di grandezze come, per esempio, la capacità di una botte, l'estensione di una proprietà agricola, l'ordine di grandezza del numero di granelli contenuti in un bicchiere di sabbia, il numero di partecipanti a una manifestazione...,
- utilizzare le misure rilevate per descrivere e prevedere l'evoluzione di grandezze,
- effettuare confronti; per esempio, il confronto fra i dati che rappresentano le variazioni del prezzo di due prodotti in un dato intervallo temporale; oppure la costruzione di un modello di accrescimento di una popolazione in assenza di limitazione di risorse.

Si sconsiglia di:

- Proporre una teoria formale della misura, come potrebbe essere, per esempio, la classica teoria geometrica delle grandezze.

Secondo biennio

Abilità
• Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze (cfr. *Dati e previsioni*) • Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre (cfr. *Relazioni e funzioni*, *Dati e previsioni*). • Confrontare variazioni di grandezze utilizzando i concetti di pendenza e di variazione di pendenza (cfr. *Relazioni e funzioni*). • Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza (cfr. *Spazio e figure*" e *Numeri e algoritmi*). • Dimostrare l'irrazionalità di alcuni numeri (cfr.*Numeri e algoritmi*). • Fare costruzioni geometriche di segmenti la cui misura, rispetto a una fissata unità, sia rappresentata da un numero irrazionale: es. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (cfr. *Spazio e figure*). • Riconoscere la curva a campana nella distribuzione empirica di misure ripetute della stessa grandezza (cfr. *Dati e previsioni*). • Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze (cfr. *Risolvere e porsi problemi* e *Dati e previsioni*) e utilizzarli per effettuare previsioni.

Spunti storici

- Le misure di grandezze inaccessibili.
- La scoperta di numeri irrazionali.
- Il problema delle quadrature in Archimede.
- Misure di grandezze astronomiche (da Keplero in poi).
- L'*Arenario* di Archimede.

Osservazioni

- Si suggerisce, ove possibile, l'uso di strumenti che consentono di rilevare misure di grandezze con sensori, con conseguente analisi dei dati con programmi esistenti in commercio su calcolatrici o su calcolatori.
- Sono di fondamentale importanza non solo il reperimento di dati di misura e la loro analisi, ma anche la costruzione di modelli per descrivere situazioni ed effettuare previsioni. Su un altro versante, quello della concettualizzazione delle basi dell'analisi, sono importanti gli algoritmi per il calcolo approssimato di lunghezze e aree, proprio come approccio successivo a concetti fondamentali.

Risolvere e porsi problemi

Primo biennio

Abilità
• Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non (fenomeni delle scienze sperimentali, economici, demografici, dei giochi sia di strategia che di sorte ecc.) per affrontare problemi (aperti o meno; posti da altri o auto-posti). • Esplicitare le proprie aspettative in termini di possibilità di trovare una soluzione, individuando alcuni elementi di controllo da tenere sistematicamente presenti nel corso del processo risolutivo per comprendere se si progredisce verso la soluzione (ad es. gli ordini di grandezza delle soluzioni attese, le conoscenze e i metodi matematici ritenuti utili per la risoluzione, le somiglianze e differenze con problemi analoghi, i tempi). • Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni (simbolici, geometrici, numerici, ecc.) e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. • Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie (formalizzazioni, calcoli, costruzioni geometriche, ecc.). • Confrontare i risultati ottenuti con le aspettative precedentemente esplicitate. Individuare le cause delle inadeguatezze considerando ed eventualmente modificando gli elementi di controllo precedentemente individuati. Chiedersi se lo stesso modello matematico sia adatto a diverse situazioni concrete. • Ricorrere ai mezzi tecnologici disponibili per esplorare le situazioni problematiche individuate o proposte (nel caso ciò sia opportuno); valutarne l'efficacia nei processi risolutivi che producono. • Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie (1). • Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, ecc.) per descrivere e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime in campo matematico e in altri ambiti riferibili a discipline scolastiche oppure ad altre esperienze culturali. • Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici diversi; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti, ricercando controesempi e (in mancanza di essi) cercare di costruire dimostrazioni via via più esaurienti e rigorose, riferite agli elementi di teoria disponibili (cfr. *Argomentare, congetturare, dimostrare*).

(1) Tipici concetti da esplicitare eventualmente: esistenza e unicità della soluzione; soluzione esatta e approssimata; sua dipendenza da parametri; soluzione matematica accettabile o meno per il problema; variabili significative e variabili ininfluenti per il problema.

Secondo biennio

Abilità
Le stesse abilità del primo biennio, e inoltre: • Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. • Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi; riconoscere fenomeni riconducibili a uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione o di previsione. • Valutare l'opportunità di ricorrere ai mezzi tecnologici disponibili, e scegliere quali usare, per esplorare le situazioni problematiche individuate o proposte e per realizzare particolari strategie compatibili con l'uso di tali mezzi. • Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema.

Osservazioni

- A ogni livello scolastico il risolvere problemi offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza. Affinché il porre e risolvere problemi sia effettivamente utile a mobilitare risorse intellettuali anche al di fuori delle abilità strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla formazione generale degli allievi, è necessario che quelli proposti siano autentici problemi per gli allievi e non semplici esercizi a carattere ripetitivo.
- Le competenze degli allievi, soprattutto per quanto riguarda i problemi, difficilmente possono essere conseguite in tempi medio-brevi. Per tale motivo, le abilità indicate per il primo biennio si collegano alle abilità previste per il ciclo precedente e sono anche previste per il secondo biennio (con alcune integrazioni che ne costituiscono un naturale sviluppo).
- Un insegnamento per problemi è un'attività impegnativa, ma realizzabile; il tempo si deve eventualmente recuperare da una riduzione degli argomenti puramente eruditi e dalla semplificazione degli esercizi proposti (meglio pochi esercizi capiti e discussi a fondo che tanti esercizi di pura routine. Fare molti esercizi "dello stesso tipo" è importante per acquisire scioltezza e sicurezza, ma può ottundere lo spirito critico se non vi è sufficiente variabilità).
- Non tutto l'insegnamento può essere svolto per problemi, sia per mancanza di tempo, sia per evitare il rischio di un'eccessiva frammentarietà.
- L'attività "per problemi" può essere più efficace se svolta in contesto interdisciplinare.
- È opportuno che discutendo opportunamente il significato delle soluzioni trovate, gli allievi imparino a distinguere la "matematica dell'incerto", in senso probabilistico, dalla "matematica dell'impreciso" propria del calcolo numerico, dalla "matematica dell'esatto" (ad es. il numero e è un numero trascendente, limite di una certa successione, che vale circa 2,718281828).

Si sconsiglia di:

- Ridurre le tecniche a casistiche, e gli esercizi a routine.
- Proporre problemi scarsamente significativi o di difficoltà sproporzionata rispetto alla classe.
- Lasciar accettare una soluzione “perché è venuta così”.
- Ridurre la matematica alla pura fase deduttiva.

Laboratorio di Matematica

Il laboratorio di matematica non costituisce un nucleo di contenuto né uno di processo, ma si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici.

Che cos'è il laboratorio di matematica

Il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti.

La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento; l'appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte.

Gli strumenti del laboratorio di matematica

Gli strumenti possono essere di tipo tradizionale oppure tecnologicamente avanzati; ne citiamo, a scopo esemplificativo, alcuni.

- *I materiali "poveri"*

Il lavoro con fogli trasparenti, la piegatura della carta, l'uso di spilli, fogli quadrettati non dovrebbe essere considerata un'attività esclusivamente riservata ad allievi del ciclo primario; potrebbe invece costituire, per allievi del primo biennio, un significativo avvio allo studio delle isometrie, esplorate attraverso i movimenti che le determinano. Inoltre, l'uso di strumenti poveri, magari fatti costruire da gruppi di studenti, è un'attività particolarmente significativa e consona a rinforzare quell'atmosfera da bottega rinascimentale, nel senso prima detto.

- *Le macchine matematiche*

La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le *macchine* che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato degli oggetti matematici differenti ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche di quelle consentite dall'uso di software di geometria dinamica.

- *I software di geometria*

Nell'insegnamento della geometria vengono ormai sempre più utilizzati i software di geometria (detti comunemente software di *geometria dinamica*), veri e propri micromondi, nei quali gli studenti possono fare esperienze, compiere esplorazioni, osservare, produrre e formulare congetture e validarle con le funzioni messe a disposizione dallo stesso software. In questo modo lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere "fatti geometrici" e può essere avviato a un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all'interno di una teoria più o meno ben precisata, *perché* una certa proprietà osservata vale.

- *I software di manipolazione simbolica*

Nell'insegnamento dell'algebra, della geometria analitica e dell'analisi può rivelarsi particolarmente opportuno l'uso di software di manipolazione simbolica, detti comunemente CAS (Computer Algebra System), che mettono a disposizione diversi ambienti integrati, in genere quello numerico, quello simbolico, quello grafico e un linguaggio di programmazione.

Il loro uso consente di limitare il calcolo simbolico svolto con carta e penna ai casi più semplici e significativi, affidando al CAS i calcoli più laboriosi. Il vantaggio è duplice, perché da una parte consente di concentrarsi sugli aspetti concettuali, dall'altra permette di affrontare problemi più complessi, più ricchi e, sicuramente, meno artificiosi di quelli che è possibile affrontare senza l'ausilio di un potente strumento di calcolo.

I CAS inoltre presentano ambienti in cui poter effettuare esplorazioni, osservazioni, validazioni di congetture; si tratta di ambienti che, per loro stessa natura, aiutano a pianificare e costruire attività volte al conseguimento di quei significati degli oggetti di studio che costituiscono l'obiettivo fondamentale del laboratorio di matematica.

Infine, ma non meno importante, la programmazione in un linguaggio CAS è particolarmente utile per consolidare il concetto di *funzione*, di *argomenti* di una funzione (*numero* degli argomenti, *ordine* degli argomenti nella definizione della funzione …), di *input* e *output*. È altresì utile per arricchire la padronanza delle più importanti *strutture dati* (liste, vettori, matrici, …).

- *I fogli elettronici*

I fogli elettronici, pur non essendo software specifici per la didattica, permettono svariate applicazioni, in particolare quelle relative alla rappresentazione e all'analisi dei dati e hanno la non trascurabile caratteristica di essere al momento ancora i software più utilizzati nel mondo del lavoro.

- *Le calcolatrici grafico-simboliche*

Tutte le potenzialità prima indicate e offerte dai software di geometria dinamica, dai CAS e dai fogli elettronici si trovano oggi disponibili su calcolatrici tascabili che hanno il vantaggio di poter essere utilizzate con molta flessibilità e agilità, sia per quel che riguarda gli spazi (utilizzo in classe), sia per quel che riguarda i tempi (di trasferimento in laboratorio, di accensione dello strumento…). Molte calcolatrici offrono anche la possibilità di collegamenti con sensori fisici, ossia rilevatori di misure di grandezze fisiche, aprendo interessanti e nuove prospettive nella costruzione di concetti matematici legati alla rappresentazione dei dati e all'analisi della loro variabilità.

La storia della matematica e il laboratorio di matematica

La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti (pensiamo soprattutto agli aspetti interdisciplinari con la filosofia, con l'arte e con molte altre discipline), va vista, in questo contesto, come un possibile ed efficace strumento di laboratorio (inteso nel senso largo esposto prima) adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici.

Rinviando alle note presenti nei diversi temi per una più ampia esemplificazione e lasciando comunque al docente la scelta dei contenuti della storia della matematica che ritiene più significativi, è indubbio che, ad esempio, una trattazione storica dei problemi inerenti alla sezione aurea può costituire una efficace introduzione ai problemi di secondo grado; la trattazione storica dei rapporti tra algebra e geometria può gettare luce sugli stretti rapporti tra geometria sintetica e analitica; l'evolversi di alcuni aspetti della geometria euclidea può fornire un'introduzione alla problematica della dimostrazione e al significato

di sistema assiomatico; molti episodi storici riguardanti la storia di singoli problemi aritmetici possono motivare lo studio di procedure e algoritmi altrimenti troppo astratti; le motivazioni del calcolo delle probabilità e della statistica si colgono in modo illuminante attraverso la loro storia, ecc.
In questo quadro, quindi, la storia della matematica può dare al singolo docente l'opportunità di scegliere, se le condizioni lo consentono, un percorso didattico aperto alle connessioni interdisciplinari e generalmente capace di suscitare l'interesse degli allievi; è quindi ovvio che il contesto del laboratorio esclude la determinazione di contenuti disciplinari specifici relativi alla storia della matematica.

Le interazioni tra le persone nel laboratorio di matematica
La costruzione di significati è strettamente legata alla comunicazione e condivisione delle conoscenze in classe, sia attraverso i lavori in piccoli gruppi di tipo collaborativo o cooperativo, sia attraverso lo strumento metodologico della *discussione matematica*, opportunamente gestito dall'insegnante. Ci soffermiamo, a scopo esemplificativo per quel che riguarda la gestione delle interazioni sociali in classe, sulla discussione matematica.
Un primo livello di discussione è quello che, per esempio, si sviluppa dopo la lettura del testo di un problema. Un secondo livello di discussione matematica si sviluppa al termine della soluzione (individuale o in piccoli gruppi) o, talvolta, in un momento cruciale della soluzione stessa. Tale discussione è centrata sul confronto delle soluzioni realizzate dagli alunni e si sviluppa attraverso la presentazione delle proprie soluzioni, oltre che sull'interpretazione e sulla valutazione di quelle realizzate dai compagni. Un terzo livello di discussione matematica riguarda la correttezza e la ricchezza delle soluzioni proposte, la coerenza e l'attendibilità, il livello di generalizzazione adottato. Quest'ultima fase dovrebbe condurre alla costruzione di significati che vanno oltre quelli direttamente coinvolti nella soluzione del compito, per consentire agli studenti di entrare in contatto con nuovi aspetti della cultura matematica, favorendo in particolare, un approccio, graduale ma sistematico, al pensiero teorico.

Indicazioni metodologiche

In continuità con i precedenti livelli scolari, anche nel ciclo secondario è opportuno sviluppare i concetti matematici in attività didattiche significative, in cui l'alunno possa essere attivamente coinvolto e stimolato ad affrontare e risolvere problemi. Un'attività didattica può essere considerata significativa se consente l'introduzione motivata di strumenti culturali della matematica per studiare fatti e fenomeni attraverso un approccio quantitativo, se contribuisce alla costruzione dei loro significati e se dà senso al lavoro riflessivo su di essi. Lo sviluppo in classe di attività didattiche con tali caratteristiche dovrà avere come fine la costruzione delle capacità di esercitare un controllo sulla realtà secondo i modelli della razionalità scientifica. Le attività didattiche potranno essere realizzate tramite vari approcci metodologici, che coinvolgano in varia misura studenti e insegnanti, ma che dovranno dare al processo di insegnamento-apprendimento prevalentemente una caratterizzazione di tipo collettivo, impostata sull'interazione tra gli studenti e tra insegnante e studenti.

La *lezione frontale* si presenta come la tecnica più sicura per gli insegnanti, i genitori, gli allievi, i capi d'istituto, in quanto garantisce che si "finisca il programma". Consiste nella spiegazione, da parte dell'insegnante, di - non sempre tutte le - varie parti del programma, alla cattedra o alla lavagna; è seguita da una serie di attività applicative (gli esercizi ripetitivi, in classe e a casa). Tale tipo di *lezione*, pur avendo una sua valenza didattica, nell'abituare gli studenti a prestare attenzione a una spiegazione, a imparare a prendere appunti in maniera autonoma, quando una persona parla, a sviluppare competenze di sintesi e di organizzazione dell'informazione, a comprendere un discorso fatto da un esperto su un argomento matematico, non è (e non deve essere) l'unica metodologia di insegnamento/apprendimento in classe. Essa andrebbe affiancata, integrata, alternata ad altre metodologie, che sviluppano altre competenze negli studenti.

Per esempio, l'*insegnamento per problemi* è assolutamente fondamentale come approccio alla costruzione del sapere, non solo nella matematica. Consiste nel porre problemi agli studenti, facendoli loro risolvere singolarmente, a gruppi, a casa o in classe, in tempi lunghi o brevi. Per problema non intendiamo solo la richiesta di ottenere un risultato a seguito di una serie di calcoli, ma la proposta di riconoscere una situazione problematica di ampia natura, formulata da altri: può trattarsi di un classico problema che ha caratterizzato la storia della matematica, o di un problema sorto da un contesto scolastico, oppure da un contesto extrascolastico, ambientale per esempio, o sportivo, o di vita quotidiana.

Risolvere problemi posti da altri è certamente una competenza ambiziosa e a lungo termine ed è anche per questo che dovrebbe essere perseguita fin dalla scuola dell'infanzia. In questo ambito metodologico altrettanto fondamentale è il *porsi problemi*, ovvero acquisire a poco a poco l'abitudine a porsi criticamente nei confronti della matematica, della scuola, del mondo, per diventare cittadino che utilizza la matematica da persona consapevole, che ne domina le tecniche e non si fa dominare, invece, da esse. Ed acquista di conseguenza una capacità critica che gli sarà utile ben oltre la lezione di matematica o l'ambiente scolastico. Per questo, l'insegnamento dei contenuti di tutti i nuclei deve poggiarsi sulla problematicità, quindi non perseguire solo il raggiungimento di abilità tecniche ma anche di ragionamento.

Gli studenti possono imparare a porsi e risolvere problemi sia in gruppo sia singolarmente. Pur perseguendo la stessa finalità, il lavoro di gruppo, rispetto a quello individuale, si prefigge anche altre finalità di tipo comportamentale, come il saper stare con gli altri, discutere in gruppo, rispettare l'opinione dell'altro e anche saper difendere la propria opinione, argomentando e dibattendo.

È fondamentale quindi, come metodologia di classe, il *lavoro in piccoli gruppi* (a seconda dei casi, possono essere di due, tre o quattro persone). La scelta dei raggruppamenti da

parte dell'insegnante può essere di vario genere, e oscilla tra le due polarità: gruppi eterogenei o gruppi omogenei. Il criterio dell'equi-eterogeneità, cioè di avere in una classe tutti gruppi ugualmente ripartiti per livello e competenze, consente di avere gruppi che si equivalgono, all'interno dei quali sono presenti forze eterogenee: per esempio uno studente di livello alto, uno di livello basso, ecc. Lo svantaggio può essere nel lavoro all'interno del gruppo, in cui può capitare che lo studente di livello più basso, o quello più timido, non partecipino alla discussione e rimangano in disparte. I gruppi omogenei hanno il vantaggio di avere, all'interno del gruppo, studenti con pari livello, e quindi consentire discussioni alla portata di tutti; ma, se il lavoro di gruppo è seguito da un momento di *intergruppo*, in cui si confrontano gli esiti dei vari gruppi, l'eterogeneità fra i risultati raggiunti potrebbe avere risvolti psicologici non positivi.
C'è di più: il lavoro di gruppo finalizzato al raggiungimento di un obiettivo comune sviluppa la capacità di mettere in gioco e coordinare le competenze di ognuno, di riconoscere una *leadership*, di dividersi i compiti e finalizzare il proprio operato all'obiettivo da raggiungere. Nel lavoro a gruppi si stabilisce uno spirito di interdipendenza positiva, in cui il successo di uno è strettamente collegato al successo di tutti. Agli studenti viene richiesta una responsabilità anche individuale nell'acquisizione delle competenze e delle conoscenze utili ad affrontare il compito proposto. Può essere utile distinguere, a grandi linee, almeno due differenti modalità: quella del *cooperative learning*, e quella del *collaborative learning*. Per cooperative learning si intende un gruppo di individui che lavora a un problema complesso, nel quale i compiti di ciascuno sono ben individuati e definiti, ma nel quale ogni individuo è aiutato dai suoi compagni di gruppo nell'affrontare i temi e problemi che sono oggetto e spunto di apprendimento. Per collaborative learning si intende un gruppo di individui che lavorano insieme su un compito o un problema che è stato posto al gruppo e che si prevede debba essere affrontato e risolto insieme, attraverso lo strumento della discussione e della condivisione delle strategie risolutive.
I fattori che influenzano sia il collaborative, sia il cooperative learning possono essere: la volontà di chi apprende di partecipare al lavoro di gruppo; la presa di coscienza, da parte di chi apprende e dai tutor (siano essi compagni o docenti), dei benefici di forme di apprendimento collaborative o cooperative; un sistema di valutazione che favorisca cooperazione e collaborazione e coinvolga lo studente nella propria valutazione; la presa di coscienza del fatto che chi apprende può controllare e gestire il proprio apprendimento.
Accanto al lavoro di gruppo, come in altri momenti del lavoro scolastico, è importante dedicare opportuni spazi alla *discussione matematica*. In essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo, in quanto ha presenti gli obiettivi generali e specifici dell'attività proposta. È anche possibile far intervenire nella discussione *voci* di persone che non fanno parte della classe, come per esempio voci dalla storia, attraverso la lettura di un testo storico, oppure voci dalla realtà esterna, attraverso un testo scritto, una audio-registrazione, una video-registrazione o una tele-conferenza. La discussione si struttura quindi come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.) all'interno del progetto didattico ed educativo.
Il lavoro di gruppo o individuale finalizzato alla risoluzione di un problema, o la spiegazione stessa dell'insegnante possono servirsi del *laboratorio* per avere strumenti o ambienti o metodi utili all'espletamento di un compito o all'introduzione di concetti nuovi, o alla costruzione sociale del sapere. A tale scopo, le indicazioni relative al laboratorio di matematica sono particolarmente significative non solo per l'interazione con gli strumenti, ma soprattutto per l'impianto metodologico. Tale impianto si dovrebbe basare su quello che viene chiamato *apprendistato cognitivo*. L'apprendistato cognitivo coinvolge abilità e

processi sia cognitivi sia metacognitivi: l'esperto modella e struttura l'attività del principiante, che osserva l'esperto e confronta e valuta il suo operato rispetto alle proprie attività intellettuali. È un metodo variegato e flessibile che si contrappone all'*apprendistato pratico* che, invece, si identifica con uno specifico metodo di apprendimento basato esclusivamente sull'osservazione dell'attività dell'esperto, sulla strutturazione graduale e crescente delle abilità e, soprattutto, su una particolare attenzione all'acquisizione di abilità di carattere pratico. L'apprendistato diventa cognitivo in quanto riesce a bilanciare la dialettica tra l'azione strutturatrice e facilitatrice dell'intervento dell'esperto e la sfida che un problema da risolvere rappresenta per il principiante, che non si limita a riprodurre i comportamenti dell'esperto ma diviene consapevole dei motivi che portano l'esperto a scegliere certe strategie e non certe altre. La metafora che può ben descrivere l'apprendistato cognitivo è quella della bottega d'arte del Rinascimento, in cui l'allievo impara facendo, vedendo altri che fanno e riflettendo sul perché fanno così, il tutto sotto la guida di uno più esperto di lui. Un'altra analogia si può trovare con l'apprendimento dei linguaggi di programmazione nel laboratorio di informatica. L'apprendistato cognitivo richiede la costruzione di un ambiente di apprendimento aperto alla discussione, alla condivisione del sapere, che favorisca la produzione personale, ma anche l'osservazione ragionata dell'esperto al lavoro; un ambiente che potremmo chiamare "bottega della matematica".
In generale, le attività didattiche dovranno essere caratterizzate dalla pratica della verbalizzazione, dalla produzione e dalla verifica di ipotesi argomentate e dal ruolo di mediazione dell'insegnante in tutte le fasi dell'attività. L'insegnante eserciterà il suo ruolo di mediazione sia in modo diretto, attraverso l'introduzione degli strumenti matematici necessari in relazione alle diverse situazioni didattiche, sia in modo indiretto, utilizzando le produzioni individuali degli alunni (da confrontare e discutere in classe) e attraverso la valorizzazione dei contributi degli alunni durante le discussione in classe e il lavoro di gruppo.
La matematica infine si caratterizza come una disciplina che ha bisogno di tempi lunghi di apprendimento, sia per la necessità di affrontare ed assimilare le strette connessioni tra i diversi concetti, sia per la loro caratterizzazione epistemologica. È consigliabile quindi sviluppare attività nell'ambito di progetti didattici di medio-lungo periodo. I tempi medio-lunghi costituiscono la condizione che può garantire a tutti gli studenti di compiere il consolidamento tecnico, l'approfondimento operativo e la riflessione necessari per giungere ad una piena padronanza delle competenze matematiche coinvolte nell'attività. L'insegnante cercherà di trovare un equilibrio tra le attività più costruttive e formative e quelle di consolidamento tecnico e operativo, tenendo conto delle necessità della classe in cui opera.