# Tasselli del domino e induzione

**Livello scolare:** 2° biennio

| Abilità interessate | Conoscenze | Nuclei coinvolti | Collegamenti esterni |
|---|---|---|---|
| Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi.<br>Applicare in semplici casi il principio d'induzione.<br>Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione o di dimostrazione. | Schemi di ragionamento. | Argomentare, congetturare, dimostrare<br><br>Numeri e algoritmi<br><br>Laboratorio di matematica | Storia |

**Contesto**
Ragionamenti combinatori.

L'attività è consigliata per la seconda classe del secondo biennio.
Quali prerequisiti?
Quali obiettivi?
Quali strumenti?
L'induzione matematica rappresenta un'elaborazione molto astratta di forme di ragionamento più intuitive, ma meno complete. Come tale essa rappresenta una sistemazione "matura" e rigorosa di conoscenze acquisite precedentemente in forma intuitiva e quasi empirica.
Il seguente esempio illustra bene la questione.
E' noto che la somma dei primi $n$ naturali vale $\frac{n(n+1)}{2}$.
Vi sono vari modi per comprendere il perché di questa formula
Il primo è *visivo* ed è illustrato dalla Figura 1, che non richiede parole:

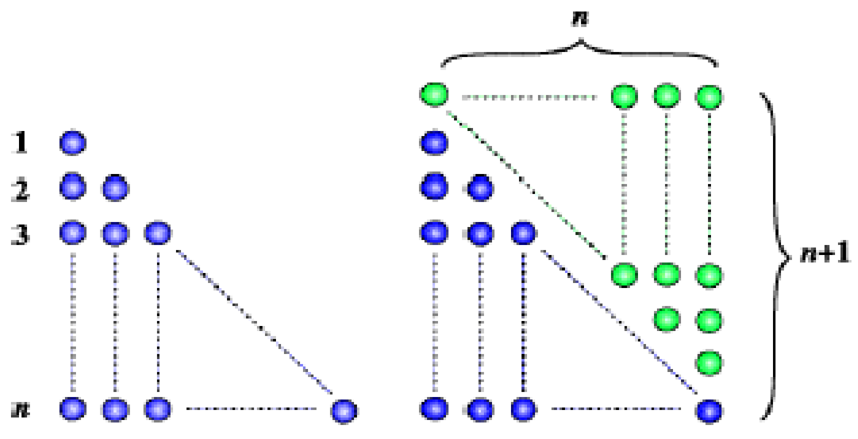


*Figura 1*

Il secondo risulta dalle seguenti due diverse scritture per la somma cercata:

$$1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \dots\dots\dots\dots\dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots\dots\dots\dots\dots + \quad 3 \quad + \quad 2 \ + 1$$

Sommando le coppie di termini in colonna, si ottiene $n$ volte la somma $(n+1)$, cioè il valore $n(n+1)$, pari al doppio della somma cercata.
A livello intuitivo le due "dimostrazioni" (che sono in realtà la stessa dimostrazione, la prima con i "pallini" usati quali unità per rappresentare numeri generici, la seconda con le lettere dell'algebra che adempiono alla stessa funzione) sono convincenti, ma non esenti da critiche. Quella più seria riguarda la presenza dei "puntini" in entrambe: mentre i pallini e a maggior ragione le lettere possono trovare una traduzione rigorosa nel linguaggio matematico, non è così per i puntini di sospensione. Per superare questo scoglio i matematici ricorrono all'induzione matematica.
Tale metodo dimostrativo si è affermato solo in tempi relativamente recenti. Il primo a usarla in forma precisa, a quanto pare, è stato Pascal per dimostrare la celebre formula sul binomio che porta anche il suo nome. Solo con Dedekind e Peano[1] il metodo di dimostrazione per induzione è stato compreso e sistemato in modo completo, evidenziandone il carattere fondante della struttura dei numeri naturali.
Si tratta di un metodo molto astratto e "delicato", cui si può giungere alla fine di un percorso didattico in cui gli studenti abbiano fatto esperienza di esplorazioni numeriche nella ricerca di regolarità e si siano abituati a formulare congetture sulle medesime, cercandone delle "dimostrazioni" intuitive. Tale metodo dimostrativo può acquistare concretezza affrontando le definizioni di successioni per ricorrenza in ambienti informatici, ad esempio il fattoriale o la successione di Fibonacci: il supporto tecnologico può costituire un formidabile strumento di mediazione.
Le dimostrazioni per induzione rappresentano la sistemazione rigorosa di tutto il percorso.

**Descrizione dell'attività**

<u>Prima fase</u>

Viene proposto alla classe di risolvere individualmente (le soluzioni trovate vengono poi discusse collettivamente) il seguente problema:

*Provare che una scacchiera da dama con* $2^n \times 2^n$ *quadrati (o celle) dalla quale un quadrato angolare è stato rimosso, può essere ricoperta esattamente da "trimini"* come in Figura 2.

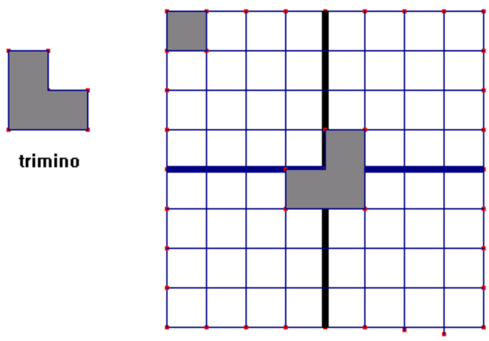


*Figura 2*

[1] Il principio di induzione è così formulato: se una proprietà P($n$) vale per $n$=0 e, supposto che, ogniqualvolta vale per $k$, allora vale anche per $k$+1, ne segue che la proprietà vale per ogni naturale $n$.

Gli studenti vengono invitati ad esplorare i casi $n = 2, 3, 4$. Ci si rende conto che conviene mettere il trimino al centro della scacchiera come indicato in Figura 2.

La strategia suggerita dalle esplorazioni è la seguente per il caso generico $2^n \times 2^n$: suddividere la scacchiera in quattro grandi quadrati uguali, ciascuno con $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ celle; si pone un singolo pezzo (un "trimino") al centro della scacchiera come in Figura 2. Risulta così ricoperta esattamente una cella in ciascuno dei tre quadrati in cui non è stata tolta la cella. Si ricade così nella situazione in cui si hanno quattro scacchiere $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ e da ciascuna è stata tolta una cella. Quindi la soluzione relativa alla scacchiera $2^n \times 2^n$ è ricondotta al caso precedente, cioè la scacchiera $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Seconda fase

Si propone di trovare la somma dei primi *n+1* numeri dispari:

$$1+3+5+\dots\dots+(2n+1)$$

Può essere utile disegnare la seguente Figura 3 (una dimostrazione "visuale") che fornisce una previsione del risultato:

$$1+3+5+\dots\dots+(2n+1) = (n+1)^2$$

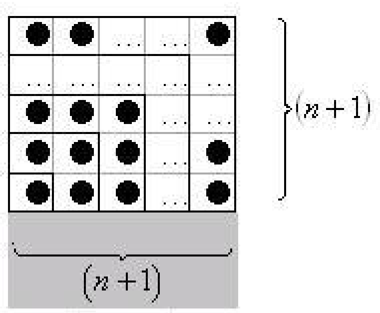


*Figura 3*

A questo punto l'insegnante propone la dimostrazione per induzione che la somma dei primi $n+1$ numeri dispari sia $(n+1)^2$.

Terza fase

Numeri di Fibonacci con il domino.

Problema: *In quanti modi si può ricoprire una scacchiera* $2 \times n$ *con tasselli di domino* $2 \times 1$?

*Figura 4*

Gli studenti esplorano concretamente la situazione proposta; si suggerisce loro di organizzare il ricoprimento secondo le due seguenti strategie:

1ª strategia - il ricoprimento inizia come in figura 5

2ª strategia - il ricoprimento inizia come in figura 6

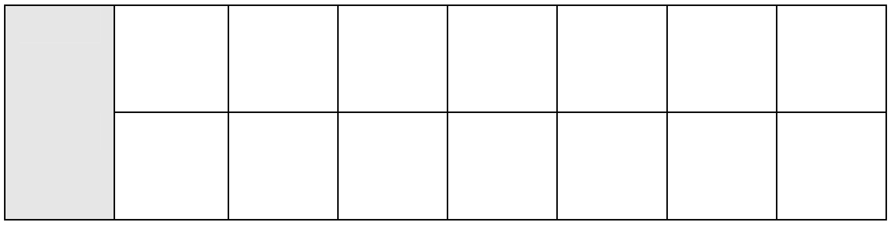

*Figura 5*

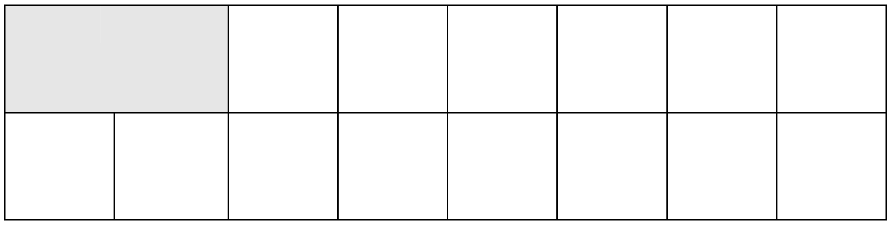

*Figura 6*

Nel primo caso ci si riconduce a dover risolvere il problema per una scacchiera $2 \times (n-1)$ con tasselli di domino $2 \times 1$.
Nel secondo caso ci si riconduce a dover risolvere il problema per una scacchiera $2 \times (n-2)$ con tasselli di domino $2 \times 1$.
Se il numero di modi cercato è indicato con $T_n$ , allora nel primo caso ci si riconduce a risolvere il problema di determinare $T_{n-1}$ e nel secondo caso il problema $T_{n-2}$. Poiché i due casi sono disgiunti, abbiamo che $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$, con $T_1 = 1$ e $T_2 = 2$

L'introduzione dei numeri di Fibonacci è l'occasione per far ricavare agli studenti la regola per doppia ricorrenza: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ che definisce la successione una volta assegnati i valori iniziali $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$.

**Possibili sviluppi**
Come ulteriore sviluppo si può implementare questa regola in un foglio elettronico oppure in una calcolatrice programmabile.

**Elementi di prove di verifica**

1. Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza che esprime la somma dei primi n quadrati

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2. Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza che esprime la somma di una serie ( serie di Mengoli):

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$