Chi occupa il miliardesimo posto?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Esplicitare le proprie aspettative in termini di possibilità di trovare una soluzione. Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni (simbolici, geometrici, numerici, ecc.) e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie. Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie. Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali. Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.	<u>Porsi e risolvere problemi</u> Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare	Traffico automobilistico

Contesto
Numeri naturali, approssimazione numerica.

Il contesto è matematico ed in particolare si rivolge all'ambito del lavoro con i numeri naturali, e delle equazioni in una variabile discreta. Il punto essenziale è la scoperta di regolarità e di analogie fra relazioni, che spinge verso la formalizzazione. Dal punto di vista della ricerca di soluzioni numeriche è altrettanto importante la capacità di cercare semplificazioni e approssimazioni adeguate e funzionali al problema trattato.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Si inizia col proporre il seguente problema:
"Considera la successione di numeri naturali

1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6……
in cui si scrive una volta il numero 1, due volte il numero 2, ecc."

Qual è il *miliardesimo* termine di questa successione?

La richiesta può apparire, a prima vista, cervellotica. Vediamo se, riflettendo sull'enunciato, si riesce a trovare un punto di partenza. Un suggerimento usuale (ad esempio, Polya, 1967) è quello di affrontare preliminarmente un problema analogo più semplice. Proponiamoci allora il seguente problema:

"Considera la successione di numeri naturali
1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6……
in cui si scrive una volta il numero 1, due volte il numero 2, ecc."

Qual è il *ventesimo* termine di questa successione?

Qui è sufficiente costruire la successione dei primi venti termini per dare la risposta "6"
Facciamo un ulteriore passo (il 50° termine), e dopo aver trovato, solo un po' più laboriosamente, la soluzione 10, ci si chiede che collegamento esista, se esiste, tra il dato numerico della domanda e la risposta.
La regolarità della costruzione suggerisce che un collegamento deve esistere.
Già nel rispondere ai suoi primi due quesiti "semplificati" lo studente si sarà probabilmente accorto che scrivendo sei volte il numero 6 ha scritto 21 cifre e che, scrivendo dieci volte il numero 10, ha scritto addirittura 55 cifre.
Un'ulteriore semplificazione del problema, che ci porta un po' più avanti concettualmente, consiste nel cercare pertanto il collegamento non fra 20 e 6 o fra 50 e 10, ma fra 6 e 21 e fra 10 e 55.
Probabilmente gli studenti non sono ancora pronti per una formalizzazione del problema.
Conviene quindi continuare a trovare collegamenti fra coppie di numeri, ma è opportuno ricominciare dall'inizio.
Si può addirittura costruire una tabella che evidenzia i collegamenti:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	...
1	*3*	*6*	*10*	*15*	*21*	*28*	...

Forse adesso si vede il collegamento: 21 è la somma dei primi 6 numeri. Verifichiamo che 55 è la somma dei primi 10 numeri.
Ma ci vuole un passo verso l'astrazione: qual è la somma dei primi n numeri?
Qui l'insegnante può dare dei suggerimenti che vadano nella direzione dell'"intuizione" di Gauss: ad esempio, far scrivere la successione dei primi 50 numeri naturali, scrivendo soltanto i primi 5 e gli ultimi 5, nel modo seguente

1 2 3 4 5 …. … 46 47 48 49 50.

Adesso ci si accorge che la somma del primo e dell'ultimo numero, del secondo e del penultimo, ecc. è sempre la stessa. Questa somma si ripete per 25 volte (25 coppie).
Passando alla formalizzazione del problema, otteniamo la nota formula $\boldsymbol{n(n+1)/2}$ che fornisce la somma dei primi n numeri naturali e dove $n/2$ indica il numero delle coppie.
Qualche studente potrebbe far notare che allora n deve essere un numero pari. L'insegnante farà allora verificare che la formula continua a valere anche se n è un numero dispari.

Senz'altro ci si è allontanati dal problema di partenza, ma ci si ritorna subito con gli strumenti necessari.

Seconda fase

Cercando la miliardesima cifra della successione relativa al problema iniziale, ed utilizzando quanto appena detto, si arriva a modellizzare il problema nel modo seguente:
$n(n+1)/2 = 10^9$
Questa si presenta come un'equazione di 2° grado, che gli studenti non sanno ancora risolvere. Ma qui il problema può essere enunciato in modo più semplice: trovare due numeri consecutivi il cui prodotto è $2 \cdot 10^9$. A questo punto un'ulteriore, conveniente, approssimazione ci porta alla ricerca della radice quadrata di $2 \cdot 10^9$, che è circa $4.472136 \cdot 10^4$ ovvero 44721,36.
Una prima osservazione:
nell'effettuare i calcoli con una calcolatrice tascabile, è importante non fermarsi prima della quinta cifra decimale, altrimenti la moltiplicazione per 10^4 ci darebbe un valore intero, e ciò non sarebbe plausibile.
Come interpretare il valore decimale ottenuto? Gli studenti a questo punto dovrebbero ricordare che nei loro primi tentativi avevano scritto più termini della successione di quanti ne chiedeva il problema, per "esaurire" il numero considerato. Anche in questo caso il numero si "esaurisce" dopo il miliardesimo termine, ed il risultato è fornito quindi dall'approssimazione per eccesso del risultato, dunque da 44722.

Una seconda osservazione: l'aggiunta dello zero nella tabella iniziale non modifica nulla, in quanto dovrei scrivere zero volte "0". Ma qui si deve fare un po' di attenzione.

Possibili sviluppi

1. Porsi problemi: Cosa succede se la successione è formata, con le stesse regole, solo da numeri dispari?
Commento: i passi da seguire possono essere analoghi al caso trattato, osservando che in questo caso la formalizzazione riguarda la somma dei primi n numeri dispari, che risulta uguale a n^2. In questo caso la regola di Gauss si generalizza in quella della somma dei primi n termini di una successione aritmetica (di differenza 2) ma può anche essere visualizzata graficamente.
Negli anni successivi l'insegnante potrà usare il *principio di induzione* per dimostrare in modo più rigoroso queste regole.

2. Una fila di automobili è ferma davanti a un semaforo. Supponiamo che la distanza fra le parti anteriori di due automobili, l'una dietro l'altra, sia in media di 6 metri e che, quando il semaforo diventa verde, ogni automobile parta a due secondi di tempo dalla precedente, muovendosi con la velocità media di 10 m/s (36 km/h) nel tratto che precede il semaforo. Se il verde dura 40 secondi, quante automobili passano?

I dati numerici forniti potrebbero essere anche decisi in classe collegialmente, chiarendo comunque che una schematizzazione è necessaria (supponendo, ad esempio, che le automobili siano a distanza fissa una dall'altra). Tale schematizzazione può richiedere, anche se a livello intuitivo, il concetto di media. Diamo una traccia di quelli che potrebbero essere i vari passaggi di un'attività guidata dall'insegnante:

Sia n il numero delle automobili che riescono a passare. L'ennesima automobile comincia a muoversi dopo $2(n-1)$ secondi dallo scattare del verde (2 secondi per ogni automobile che la precede) e, se d è la distanza che la separa dal semaforo, impiegherà un tempo $t = d/v$ per raggiungerlo. Dal momento che vi è un'automobile ogni 6 metri, vale la relazione $d = 6\ (n-1)$ (in

metri). Il tempo totale in cui l'ennesima automobile raggiunge il semaforo è quindi dato (in secondi) da: $2(n-1) + 6(n-1)/10 = 40$, da cui si ricava $n = 213/13 \cong 16.4$ automobili.
L'insegnante discuterà, come nel caso precedente, il significato da attribuire al risultato ottenuto che è un numero non intero. E' probabile che venga spontaneo dire che il risultato non è accettabile, oppure che deve essere arrotondato per difetto.
Nel problema, invece, si calcola il tempo in cui l'ennesima automobile raggiunge il semaforo con la parte anteriore. Se passano 16.4 automobili vuol dire che la sedicesima automobile non solo raggiunge il semaforo verde con la parte anteriore, ma lo supera per quasi la metà. È quindi il guidatore della diciassettesima automobile che per primo vede il semaforo non più verde.