Quanto è lontana la Luna?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze. Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre. Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza.	Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali. La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrivibili e circoscrivibili. Seno, coseno e tangente di un angolo. Coordinate polari. Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo.	<u>Misurare</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Astronomia Filosofia Fisica Scienze

Contesto
Corpi celesti.

Il contesto dell'attività è quello del moto dei corpi celesti, con particolare riguardo alla rivoluzione della Luna intorno alla Terra ed al fenomeno (relativamente frequente) dell'eclisse totale di Luna.

Descrizione dell'attività
Servendosi di opportuni dati astronomici, rintracciati sui repertori ufficiali, e di alcune immagini, prelevabili da Internet, dell'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001, con l'ausilio di alcuni calcoli trigonometrici, si giunge a stimare la misura della distanza Terra-Luna.
Prerequisiti: angoli e loro misura, seno, coseno, tangente e teoremi sui triangoli rettangoli, conoscenze sul fenomeno delle eclissi.
Obiettivo: fornire un contesto nel quale applicare nozioni elementari di trigonometria per ricavare una misura indiretta di una grandezza astronomica significativa.

<u>Prima fase</u>

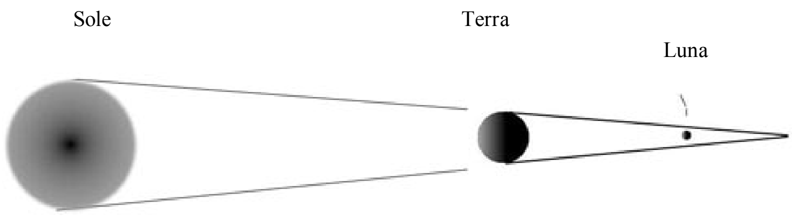


Figura 1

Partendo da alcuni dati astronomici noti, servendosi di alcune immagini fornite dall'insegnante, si procede al calcolo della lunghezza del cono d'ombra prodotto dalla Terra.
Come è noto, la Terra produce un cono d'ombra nello spazio.

Seconda fase
Si effettua la misurazione indiretta dell'ampiezza angolare del cono d'ombra prodotto dalla Terra in occasione di un'eclisse di Luna.
La misura dell'apertura di tale cono d'ombra può essere rintracciata nei repertori di dati astronomici. Per quel che riguarda l'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001, tale apertura è pari a (0,54)°. Si procede adesso al calcolo della lunghezza del cono d'ombra terrestre, indicata con il simbolo $R_S = R_{Shadow} = R_{Ombra}$.

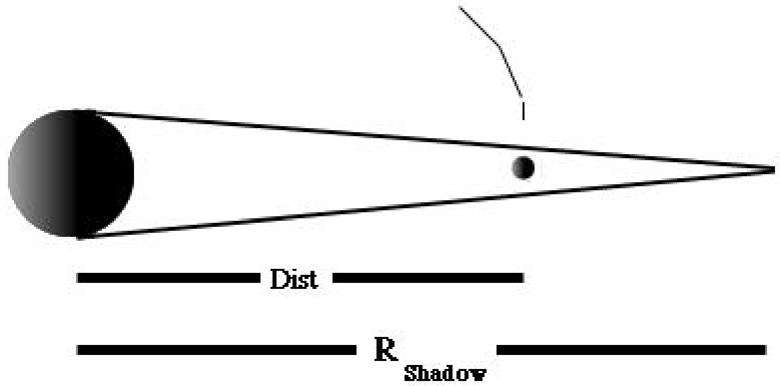


Figura 2

Prima di tutto si ricorda che il raggio terrestre è circa pari a 6372 km. Pertanto la lunghezza del cono d'ombra terrestre misura circa $R_S = 6372 / sen\,(0.27)° = 1352185$ km $\approx 1{,}352 \times 10^6$ km.

Terza fase
Si elabora una formula trigonometrica per valutare la distanza Terra-Luna.

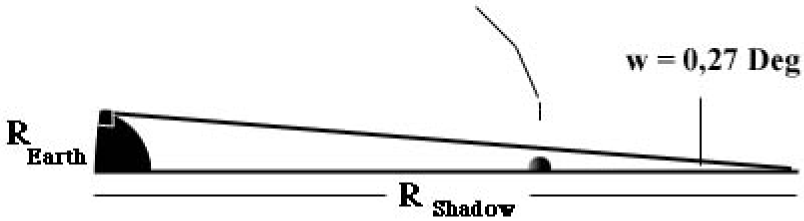


Figura 3

Come mostra il precedente disegno, il diametro dell'ombra diminuisce all'aumentare della distanza dalla Terra. Misurando la semiampiezza angolare *v* dell'ombra durante l'eclisse, si è in grado di determinare la distanza Terra-Luna.

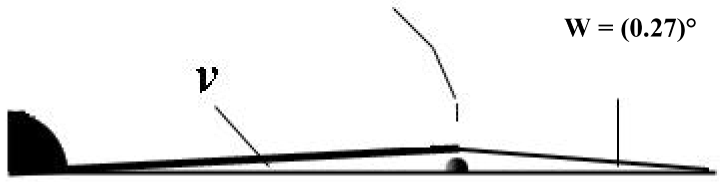


Figura 4

Si suddivide allora il triangolo sopra riportato in una parte destra ed in una parte sinistra. Si denomina poi con *h* l'altezza di tale triangolo. Considerando il triangolo di sinistra si ottiene:

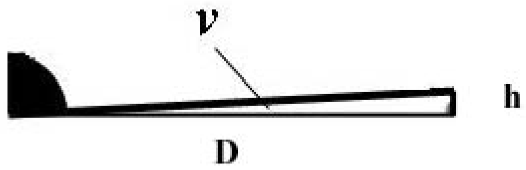


Figura 5

$$\tan(\nu) = \frac{h}{D}$$

Dal triangolo di destra della figura 4 si ricava anche:

$$\tan(w) = \frac{h}{R_s - D} \quad .$$

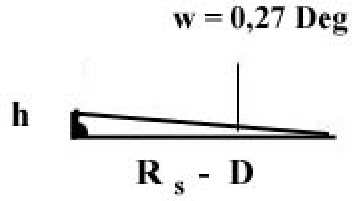


Figura 6

Combinando queste due ultime equazioni si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{\tan(w)}{\tan(\nu)} = \frac{R_s - D}{D} = \frac{R_s}{D} - 1 \quad ,$$

ovvero

$$\frac{\tan(w)}{\tan(\nu)} + 1 = \frac{R_s}{D} \quad ,$$

dalla quale si ricava:

$$D = \frac{R_S}{\frac{\tan(w)}{\tan(v)} + 1} \quad .$$

Come annotazione significativa dal punto di vista storico, si può ricordare che Aristotele (384–322 a.C.) osservò la forma circolare dell'ombra prodotta dalla Terra proprio durante un'eclisse di Luna e dedusse correttamente che il nostro pianeta ha forma sferica!

Quarta fase

Si procede al calcolo della distanza Terra-Luna mediante la formula in precedenza ricavata, analizzando l'incertezza del risultato e confrontandolo con i dati ufficiali.

L'angolo v in precedenza considerato può essere stimato uguale a circa la metà di (1,42)°, ovvero (0,71)°. Il valore di (1,42)° è ricavato direttamente dagli studenti, i quali, servendosi della figura 9, misurano il diametro angolare dell'ombra prodotta dalla Terra, confrontandolo anche con quello ricavabile dalla figura 8 e tenendo conto dell'unità di misura di 1° riportata direttamente sulle immagini utilizzate. Questa operazione di misurazione può essere effettuata in gruppo o individualmente e si presta ad un'analisi della variabilità dei risultati. Inserendo il valore di v – insieme con il valore dell'apertura angolare del Sole (semidiametro) $w = (0{,}27)°$ (come riportato in un repertorio di dati astronomici) – nella precedente formula si ricava:

$$D = \frac{1{,}352 \times 10^6}{\frac{\tan(0{,}71)}{\tan(0{,}27)} + 1} = 3{,}72 \times 10^5 \,\text{km}$$

Gli studenti possono valutare, a titolo di esercizio, l'incertezza da cui sono affette le misure ottenuta nel corso dell'attività. In particolare, partendo da una ragionevole incertezza di 1 km nella valutazione della misura del raggio della Terra e di 0,01° nella valutazione dell'ampiezza dell'angolo w , si può ricavare una stima per l'incertezza della misura R_S. In seguito, analizzate le incertezze relative ai valori angolari w e v, sulla base delle leggi di propagazione degli errori nelle moltiplicazioni e nelle divisioni, si perviene ad una stima dell'errore commesso sulla valutazione della distanza D. E' istruttivo poi determinare la differenza percentuale tra il valore di D ricavato con questa analisi ed il valore di D fornito da un programma di calcolo astronomico, ad esempio "MOONCALC": in relazione al valore sopra indicato, tale differenza ammonta appena al 5%!

Immagini dell'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001

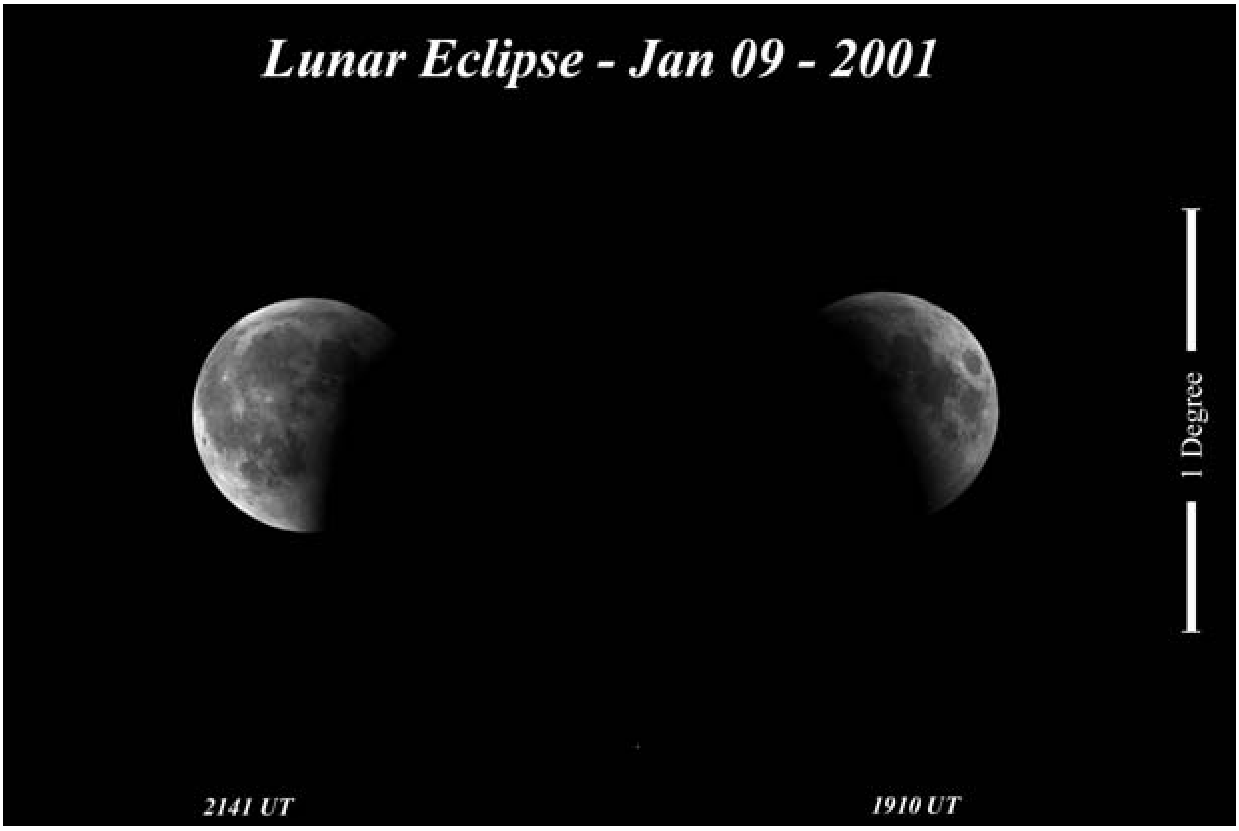


Figura 7

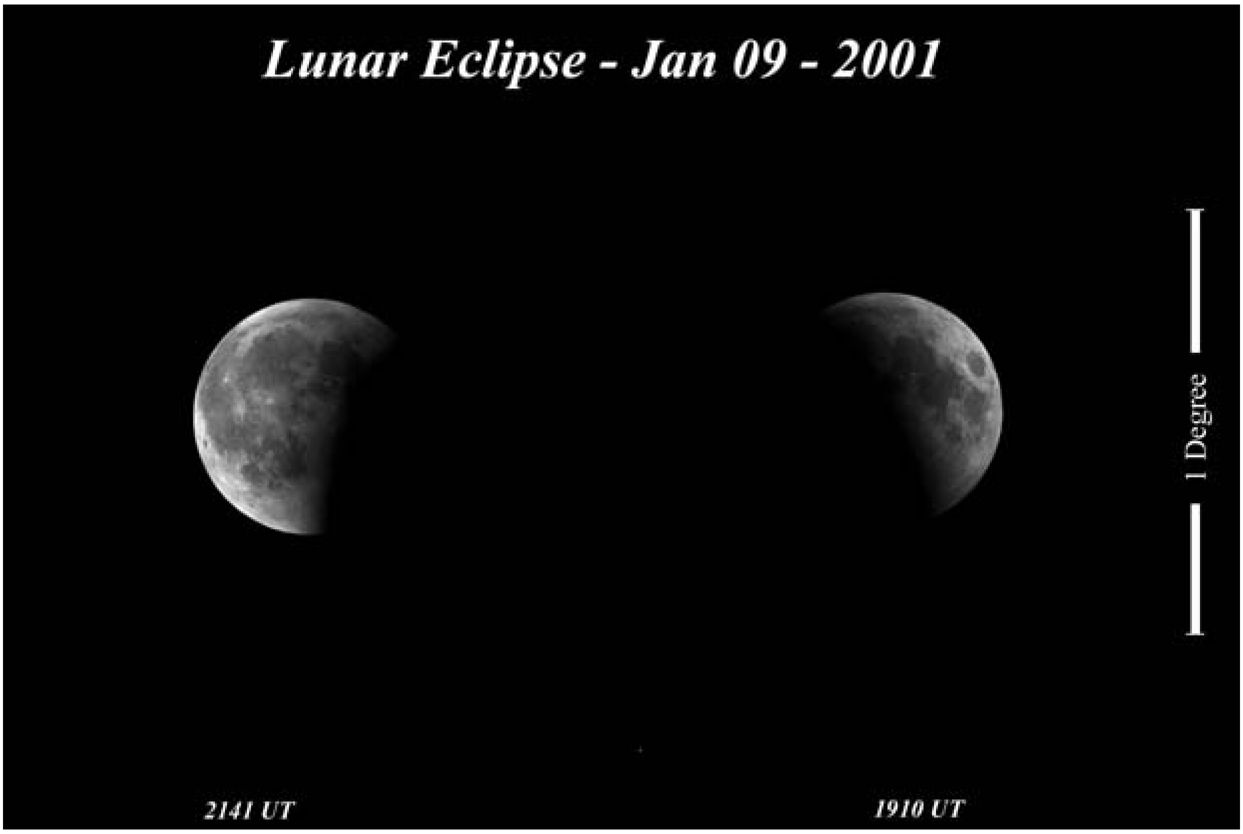


Figura 8

(La precedente immagine è una combinazione di due immagini distinte. L'effetto è stato ottenuto sovrapponendo con attenzione le due immagini, a partire da accurate misurazioni astronomiche effettuate durante ciascuna esposizione).

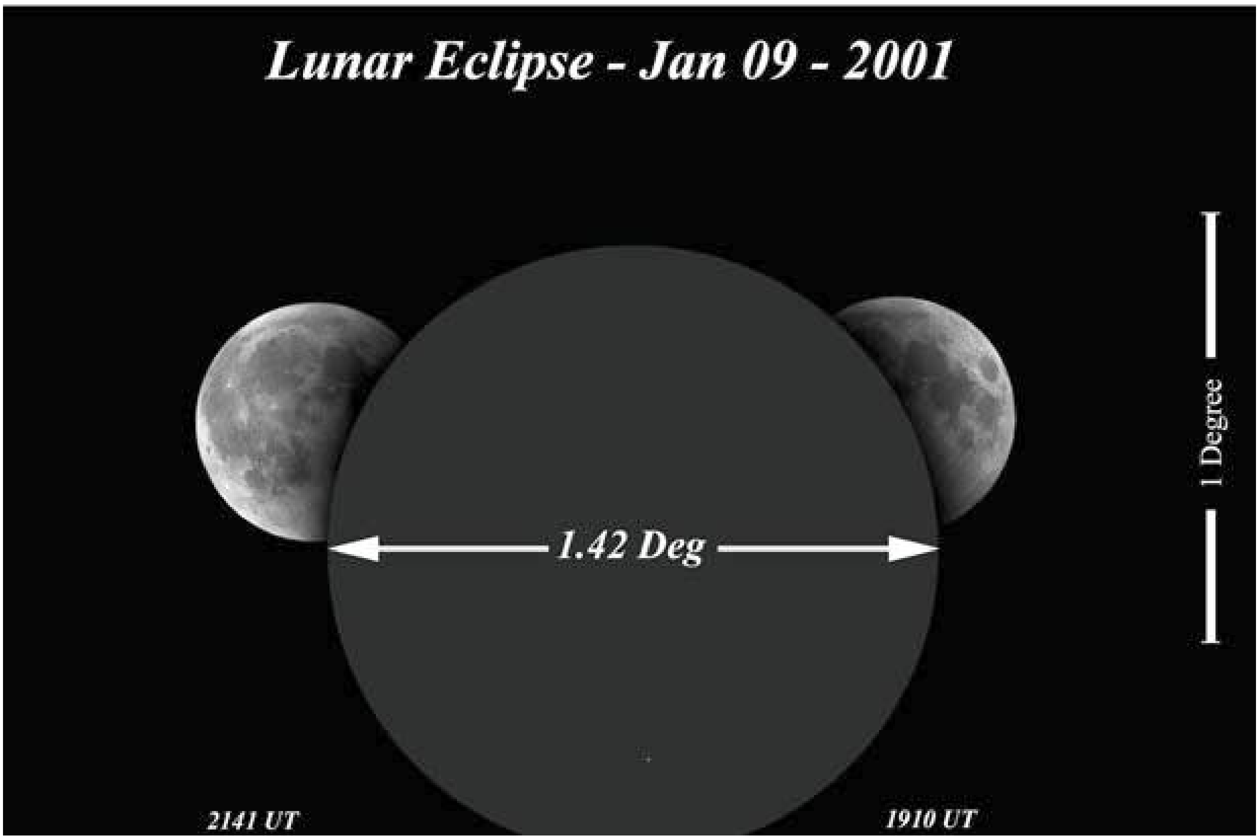


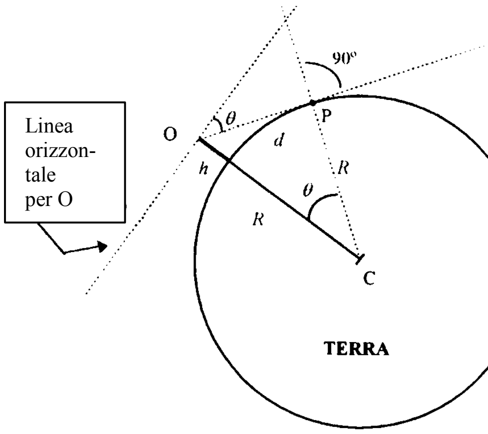
Figura 9

Elementi di prove di verifica

1. A quale distanza dai nostri occhi si trova l'orizzonte?
L'immensità dei grandi spazi aperti fa normalmente ritenere che l'orizzonte geografico si trovi molto lontano da un osservatore, ad esempio a svariate decine di chilometri di distanza secondo alcuni, addirittura ancora più lontano secondo altri. Prova adesso a valutare se in realtà è veramente così.
Immagina che la Terra sia una sfera di raggio R. Considera un osservatore posto nel punto O ad un'altezza h rispetto alla superficie terrestre. Il punto P appartiene alla linea dell'orizzonte, che è definita come il luogo geometrico dei punti di tangenza alla superficie del globo, relativi alle direzioni che escono dal punto O.

a) Descrivi geometricamente la linea dell'orizzonte in base alla precedente definizione, giustificando la tua risposta.

b) Considera il triangolo OCP e ricava un'espressione letterale per la distanza OP, in funzione dei dati R e h. Spiega perché, dal momento che, in generale, è $h \ll R$, si può scrivere, senza avere una grande incertezza, $d = \sqrt{2Rh}$.



Figura

c) Nel caso della Terra (R = 6,372 · 10^6 m), supponendo che l'osservatore si trovi nel mezzo dell'oceano (al fine di evitare gli inconvenienti legati alla presenza di rilievi sul terreno), a bordo di un'imbarcazione e con gli occhi posti ad un'altezza h = 15,0 m rispetto alla superficie dell'acqua, determina qual è il valore della distanza d.

Quando dirige lo sguardo verso il punto P, l'osservatore non guarda secondo la direzione orizzontale, bensì secondo l'angolo ϑ al di sotto della linea orizzontale stessa passante per O (questo angolo ϑ è generalmente noto con il nome di depressione apparente dell'orizzonte).

d) Ricava una formula goniometrica per determinare l'angolo ϑ e il suo valore, servendoti dei dati precedentemente forniti.

e) Utilizzando le espressioni che hai in trovato precedenza, nel caso di un osservatore che si trovi lungo una spiaggia, con gli occhi posti ad un'altezza di 1,60 m rispetto alla superficie dell'acqua, ricava i valori di d e di ϑ.

D'altra parte, la formula ottenuta nel punto *b)* mostra che il valore di d dipende da R e ciò ha alcune curiose conseguenze.

f) Considera infatti un corpo celeste di piccole dimensioni, come ad esempio Cerere ($R \approx 480$ km), il quale è approssimativamente sferico. Stabilisci dove un osservatore di altezza h = 1,60 m, in piedi, vede il punto P e valuta anche l'ampiezza dell'angolo ϑ. Analizza quindi come cambiano le due risposte precedenti nel caso del Sole (R = 7,0 · 10^8 m), ammettendo che esso abbia una superficie solida ed una temperatura sopportabile e che l'elevato valore del campo gravitazionale non crei alcun effetto sul fenomeno considerato.

A questo punto si è verificato che la linea dell'orizzonte non si trova così lontana come in apparenza potrebbe sembrare. L'analisi svolta ammette la presenza di superfici perfettamente sferiche, il che non è vero nel caso della Terra e degli altri corpi celesti.

g) Dal momento che, di solito, si considerano piccole distanze nelle vicinanze del punto O, per quale motivo si può affermare che le semplificazioni adottate nei precedenti calcoli sono ragionevolmente legittime? Esprimi la tua opinione a proposito.