La condanna dell'astrologo

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	*Nuclei coinvolti*	**Collegamenti esterni**
Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime. Formulare congetturare per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici diversi; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti, ricercando controesempi e (in mancanza di essi) cercare di costruire dimostrazioni via via più esaurienti e rigorose, riferite agli elementi di teoria disponibili. Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi; fenomeni riconducibili a uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione e previsione.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato della probabilità e sue valutazioni. Successioni e limiti di successioni (2° biennio).	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Dati e previsioni Relazioni e funzioni	

Contesto
Mondo delle fiabe.

L'attività si colloca nell'ambito probabilistico ed è intesa a dare le prime indicazioni di ricerca di strategie. Il problema può essere affrontato a livello di primo biennio quando si conosca la definizione di probabilità e si sappia dare una valutazione di probabilità per eventi indipendenti. Si vuole portare gli studenti a rendersi consapevoli che, analizzando passo per passo una procedura e valutandone volta per volta la convenienza, si può arrivare a definire la strategia migliore possibile.

Descrizione dell'attività
Si pone il seguente problema:
"Un astrologo era stato condannato a morte. Il re decise di lasciargli un'ultima possibilità. Diede all'astrologo la facoltà di mettere in due urne due palline bianche e due nere. Il re doveva poi scegliere a caso una delle due urne e estrarre a caso una pallina: se fosse uscita nera, l'astrologo sarebbe stato ucciso; se fosse uscita bianca avrebbe avuto salva la vita.
Come conveniva all'astrologo inserire le quattro palline nelle due urne, per avere la maggiore probabilità di sopravvivenza?"
Il problema si presenta qui come un indovinello e può essere perciò accattivante. Gli studenti cercheranno di dare subito una risposta.

Di solito la risposta più frequente è quella di proporre di mettere le due bianche in un'urna e le due nere nell'altra.
Si inviteranno gli studenti a considerare tutte le possibili configurazioni.
Per far ciò occorre una prima schematizzazione del problema.

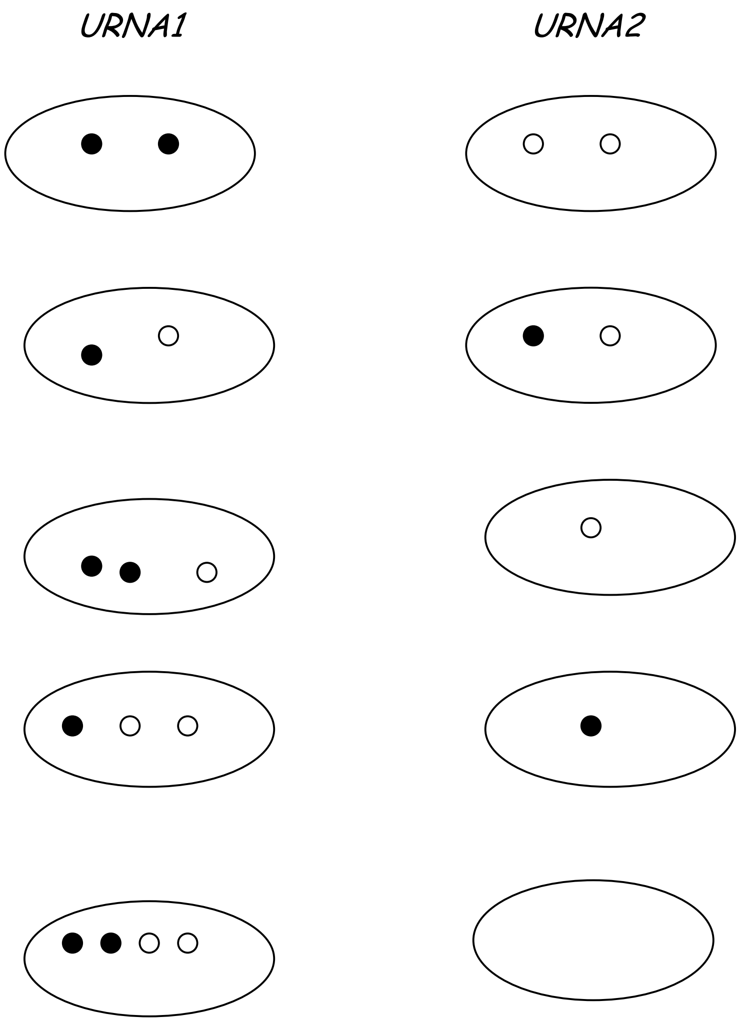

Figura 1

Le palline possono essere disposte due in un'urna e due in un'altra (in tal caso i modi diversi sono due nere e due bianche oppure una nera e una bianca) oppure tre da una parte e una dall'altra oppure tutte e quattro nella stessa urna.
Una possibile schematizzazione è quella che usa i diagrammi di Venn, ma naturalmente se ne possono trovare altre; essa però non ci dice quale di queste combinazioni dia maggiore probabilità di sopravvivenza al nostro astrologo.
Intuitivamente si può prevedere che nel primo caso la quantità delle palline è ininfluente, tutto sta nell'indovinare l'urna giusta, mentre nel secondo caso è l'urna ad essere ininfluente.
Per arrivare ad una valutazione quantitativa può essere opportuna la schematizzazione con un grafo ad albero.

Si può agevolmente calcolare che nei primi due casi la probabilità di sopravvivenza è 1/2.

Nel terzo caso si ha:

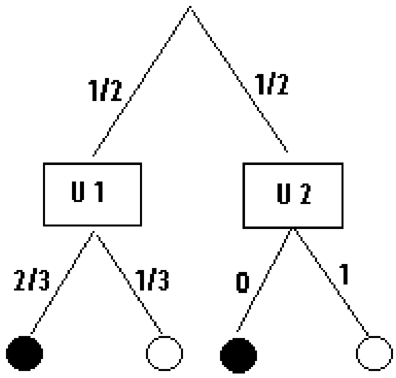

Figura 2

La probabilità che viva è dunque $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Nel quarto caso si ha:

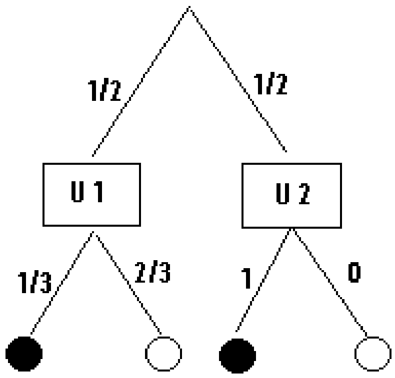

Figura 3

La probabilità che viva è adesso: $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{3}$

Nel terzo caso, dunque, la probabilità è superiore al 50% ed è quindi la strategia più conveniente.
Nell'ultimo caso la probabilità di sopravvivenza si riduce a 1/4.
Il problema si può anche generalizzare. Se disponiamo di due urne e di tre palline per ogni colore, quale sarà la configurazione più conveniente?

Figura 4

In questo caso avremo:

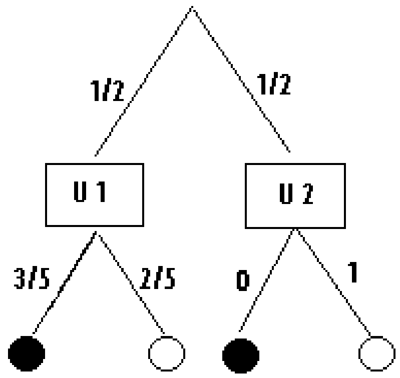

Figura 5

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{10}$$

La probabilità è salita al 70%!!
Seguendo lo schema del primo esempio, abbiamo scelto subito la configurazione con una sola pallina bianca in una delle due urne. Ovviamente gli studenti arriveranno gradualmente a questa conclusione, magari analizzando altri casi.

<u>Ulteriori sviluppi</u> (porsi problemi)

E se le palline sono *n* bianche e *n* nere?
Il "solito" grafo ci dà:

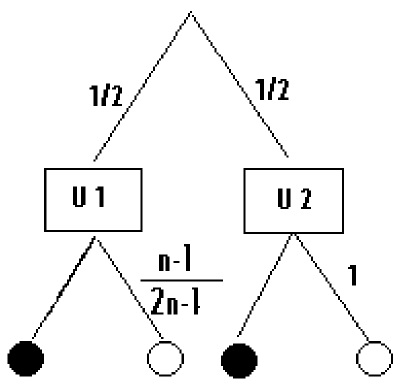

Figura 6

Calcoliamo:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3n-2}{2n-1}$$

Si è ormai capito che la strategia ottimale consiste nel mettere in una delle due urne una sola pallina bianca. Si può osservare che, al crescere di *n*, questa strategia fornisce probabilità di salvezza crescente. Lo studente potrà verificarlo studiando la crescenza della successione *p=p(n)* appena definita.
A livello di secondo biennio ci si può porre un'ulteriore domanda: al crescere di *n* potremo avere la certezza che il nostro astrologo si salvi?

Si ha anche euristicamente: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{4}$

Dunque, anche se non si vuole introdurre la notazione di limite, si potrà arrivare intuitivamente a definire una stima superiore di questa successione e si ritroverà che in ogni caso la probabilità di salvezza per il nostro astrologo non può, in nessun caso, superare il 75% (e questo dato potrà essere fonte di varie discussioni).