

Polli e conigli

Livello scolastico: primo biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolo di base - sistemi Risolvere per via grafica e algebrica problemi che si formalizzano con equazioni. Analizzare semplici testi del linguaggio naturale e interpretarli in linguaggio simbolico. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. Verificare una congettura usando con consapevolezza la verifica.	N e Q, ricorsività. Piano cartesiano. Sistemi e loro interpretazione geometrica. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di matematica	

Contesto

Aritmetica: numeri interi e razionali.

Il contesto è di tipo matematico e si colloca nell'ambito dell'aritmetica dei numeri interi e razionali. Si propone alla classe un semplice problema che può presentarsi come un rompicapo e si può risolvere utilizzando più metodi. L'intenzione è di esaminare singolarmente i metodi risolutivi e poi confrontarli con opportune osservazioni.

Un fattore ha polli e conigli. Questi animali hanno 50 teste e 140 zampe. Quanti polli e quanti conigli ha il fattore?

Descrizione dell'attività

Il problema viene proposto alla classe come problem posing, in modo tale che ciascun studente sia libero di ragionare per trovare la risoluzione. Spesso gli studenti procedono subito per tentativi, senza riflettere prima sulla coerenza delle procedure. I loro ragionamenti si sviluppano in funzione degli stimoli intellettivi che genera il linguaggio naturale e delle esperienze personali; ad esempio, a nessuno può venire in mente di pensare che polli e conigli possono essere animali anche con due teste. E' bene comunque sottolineare questo aspetto, che forse in questo caso può sembrare banale, ma che in generale serve ad abituare lo studente alla corretta valutazione della situazione da esaminare.

Un modo empirico per risolvere il problema dato può essere il seguente, che acquista forse più significato se chiamato :

- “Brancolando”

Si parte dalla seguente considerazione : se ci sono 50 polli e nessun coniglio, quante zampe avremmo in tutto? E se ci sono 50 conigli e nessun pollo, quante zampe...? E ancora se metà teste sono polli e metà conigli

Per avere sotto mano una visione globale dei tentativi fatti, può essere opportuno tabellare i risultati come nella successiva tabella 1.

<i>Polli</i>	<i>Conigli</i>	<i>Totale zampe</i>
50	0	100
0	50	200
25	25	150
24	26	152
23	27	154
22	28	156

Tabella 1

Da una prima lettura della tabella, si può dire che, prendendo come riferimento il numero complessivo delle zampe (ovvero 140, *cfr. testo*), si è individuato un intervallo numerico in cui trovare la soluzione: sicuramente i polli ed i conigli non possono essere meno di 1 né più di 49.

Neanche la soluzione 25 polli, 25 conigli va bene.

Decidiamo allora di prendere un numero minore di polli ed incrementiamo quello dei conigli (rispettivamente 24 e 26) abbiamo 152 zampe; non va ancora bene ed allora, procedendo allo stesso modo, incrementiamo ancora di due il numero delle zampe.....

A questo punto si fa notare che il procedimento usato è da abbandonare, in quanto il totale si allontana progressivamente da 140; conviene allora proseguire scambiando il ruolo dei conigli con quello dei polli e si ottiene la seguente tabella 2 che contiene anche la soluzione.

<i>Polli</i>	<i>Conigli</i>	<i>Totale zampe</i>
26	24	148
27	23	146
28	22	144
29	21	142
30	20	140

Tabella 2

Osservazione: è bene porre l'attenzione sul fatto che con il diminuire del numero dei polli e aumentando quello dei conigli (di un "passo" 1), il numero complessivo delle zampe è incrementato con passo 2, allontanandosi così dal 140 (*cfr. tabella1*). Ecco perché si abbandona questo procedimento e si continua, incrementando il numero dei polli e diminuendo il numero dei conigli; in questo caso il numero delle zampe diminuisce con passo 2 ed è proprio quest'ultimo procedimento che conduce al risultato 140.

La soluzione è: 30 polli e 20 conigli.

Siamo sicuri che questa è una soluzione unica?

- *"Formalizzando"*

Si può introdurre uno strumento cognitivo più forte che consenta agli studenti di avere la certezza di aver trovato l'unica soluzione possibile del problema assegnato: decodificare il testo, passando dal linguaggio naturale a quello dell'algebra; dopo aver chiamato x il numero dei conigli ed y il numero dei polli, il sistema risolutivo risulta essere il seguente:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

La discussione circa le soluzioni di tale sistema può essere fatta sia analiticamente sia geometricamente.

Ad esempio, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, le due equazioni rappresentano due rette che si intersecano in un punto le cui coordinate sono la soluzione del problema (e tale soluzione coincide con quella ottenuta precedentemente).

Osservazione: premesso che il metodo algebrico offre la possibilità di generalizzare la soluzione, si deve invitare gli studenti a riflettere non sulla coincidenza numerica delle soluzioni ottenute seguendo due ragionamenti diversi, quanto sulla interpretazione geometrica del sistema, da cui è possibile stabilire che la soluzione è unica.

In generale, è bene sempre controllare che le soluzioni analitiche non portino a dei risultati in contraddizione con i dati del problema. In questo caso, ad esempio, i numeri negativi o non interi vanno esclusi.

Si può provare ora a mutare le condizioni di partenza utilizzando una problematica simile.

L'azione didattica può continuare proponendo agli studenti: “e se x è uguale a y ”?

Il nuovo problema si risolve algebricamente con il seguente sistema.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ x = y \end{cases}$$

Sul piano cartesiano le due equazioni rappresentano due rette che si intersecano in un punto le cui coordinate $(x = y = \frac{70}{3})$ sono la soluzione del problema.

In questo caso le soluzioni analitiche portano a risultati in contraddizione con i dati del problema: il numero dei polli deve essere un intero positivo.

Adesso la soluzione che rispetta le condizioni del problema *non esiste*. Esiste però una soluzione approssimata da cercare in un intorno della soluzione analitica $\frac{70}{3} = 23, \bar{3}$

$Y=Polli$	$X=Conigli$	Totale zampe
23	24	140
24	23	142

Tabella 3

Alcune indicazioni per la verifica.

Problematiche di questo tipo, possono essere modificate contestualizzandole in modi diversi e con dati diversi, è chiaro che una risoluzione subordinata a numeri grandi è più complessa. Per accelerare il processo, si può pensare di utilizzare un foglio di calcolo.

Nella pagina successiva si trova l'esempio di foglio elettronico costruito per simulare passo passo la ricerca della soluzione. Può essere rielaborato dal docente per dati iniziali differenti. Se si vuole attivare il foglio elettronico basta caricarlo dal file (in questo caso Excel) già predisposto: [POLLI_CONIGLI.xls](#)

Con questo foglio elettronico si può simulare per tentativi il problema dei polli e dei conigli inserendo i dati									
iniziali									
	Matrice Unitaria	teste	zampe	teste	zampe		Partenza		
	DATI	50	140	T	Z	x=	50	massimo	
x	conigli	1	4	a1	b1	y=T-x	0	minimo	
y	polli	1	2	a2	b2	passo	1		
Per tentativi		conigli		polli		animali			
n. conigli	n. polli	T	Z	T	Z	TESTE	ZAMPE	teste	zampe
x	y	teste:a1*x	zampe:b1*x	teste:a2*y	zampe:b2*y	a1*x+a2*y	b1*x+b2*y	Soddisfa ?	Soddisfa ?
50	0	50	200	0	0	50	200	SI	NO
49	1	49	196	1	2	50	198	SI	NO
48	2	48	192	2	4	50	196	SI	NO
47	3	47	188	3	6	50	194	SI	NO
46	4	46	184	4	8	50	192	SI	NO
45	5	45	180	5	10	50	190	SI	NO
44	6	44	176	6	12	50	188	SI	NO
43	7	43	172	7	14	50	186	SI	NO
42	8	42	168	8	16	50	184	SI	NO
41	9	41	164	9	18	50	182	SI	NO
40	10	40	160	10	20	50	180	SI	NO
39	11	39	156	11	22	50	178	SI	NO
38	12	38	152	12	24	50	176	SI	NO
37	13	37	148	13	26	50	174	SI	NO
36	14	36	144	14	28	50	172	SI	NO
35	15	35	140	15	30	50	170	SI	NO
34	16	34	136	16	32	50	168	SI	NO
33	17	33	132	17	34	50	166	SI	NO
32	18	32	128	18	36	50	164	SI	NO
31	19	31	124	19	38	50	162	SI	NO
30	20	30	120	20	40	50	160	SI	NO
29	21	29	116	21	42	50	158	SI	NO
28	22	28	112	22	44	50	156	SI	NO
27	23	27	108	23	46	50	154	SI	NO
26	24	26	104	24	48	50	152	SI	NO
25	25	25	100	25	50	50	150	SI	NO
24	26	24	96	26	52	50	148	SI	NO
23	27	23	92	27	54	50	146	SI	NO
22	28	22	88	28	56	50	144	SI	NO
21	29	21	84	29	58	50	142	SI	NO
20	30	20	80	30	60	50	140	SI	SI

RISOLVERE E PORSI PROBLEMI

19	31	19	76	31	62	50	138	SI	NO
18	32	18	72	32	64	50	136	SI	NO
17	33	17	68	33	66	50	134	SI	NO
16	34	16	64	34	68	50	132	SI	NO
15	35	15	60	35	70	50	130	SI	NO
14	36	14	56	36	72	50	128	SI	NO
13	37	13	52	37	74	50	126	SI	NO
12	38	12	48	38	76	50	124	SI	NO
11	39	11	44	39	78	50	122	SI	NO
10	40	10	40	40	80	50	120	SI	NO
9	41	9	36	41	82	50	118	SI	NO
8	42	8	32	42	84	50	116	SI	NO
7	43	7	28	43	86	50	114	SI	NO
6	44	6	24	44	88	50	112	SI	NO
5	45	5	20	45	90	50	110	SI	NO
4	46	4	16	46	92	50	108	SI	NO
3	47	3	12	47	94	50	106	SI	NO
2	48	2	8	48	96	50	104	SI	NO
1	49	1	4	49	98	50	102	SI	NO
0	50	0	0	50	100	50	100	SI	NO