E che sia negativa!

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi: riconoscere fenomeni riconducibili ad uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione o di previsione. Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema.	Equazioni polinomiali: numero delle soluzioni e algoritmi di approssimazione. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali. Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	<u>Porsi e risolvere problemi</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare	

Contesto
Polinomi.

Il contesto è matematico e, più precisamente, riguarda i polinomi, e le equazioni polinomiali in una variabile.
Il punto essenziale è l'utilizzo di proprietà importanti delle funzioni per avere informazioni su particolari richieste. Nella soluzione del problema posto si possono seguire due procedure risolutive diverse, una di tipo esclusivamente concettuale, una di tipo grafico e dunque più pragmatica, per ottenere la stessa risposta.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Si chiede inizialmente di rispondere alla seguente domanda:
L'equazione $x^3 + \pi x^2 + 1{,}763 = 0$ può avere una soluzione negativa?
I coefficienti sono stati scelti ovviamente in modo tale da dissuadere gli studenti dal fare i calcoli, anche se è probabile che qualcuno ci provi lo stesso.
Inizia a questo punto la discussione su come si possa rispondere alla domanda. E' probabile che emergano due diverse indicazioni. Una che privilegia l'aspetto computazionale, l'altra che privilegia l'aspetto grafico. In entrambi i casi si procederà in un primo momento per tentativi, ma l'insegnante farà attenzione a sottolineare quei tentativi che si basano, anche inconsapevolmente, sul concetto di continuità.
Si analizza l'aspetto computazionale. Sicuramente si inizierà col valutare la funzione in corrispondenza di $x = 0$; qui la funzione assume chiaramente un valore positivo. Altrettanto facilmente ci si rende conto che lo stesso accade per ogni valore positivo di x. Gli studenti cominceranno allora a dare a x valori anche negativi; il primo di essi potrebbe essere $x = -1$, il valore è ancora positivo. Per $x = -4$ si trova "finalmente" un valore negativo della funzione. A questo punto non solo ci si rende conto che nell'intervallo [-4; -3] ci sarà sicuramente una soluzione, ma che non ce ne saranno altre in quanto il polinomio si mantiene negativo per ogni valore minore di -4.

Il secondo metodo, quello grafico potrebbe, un primo momento, mettere in crisi gli studenti, per la difficoltà di tracciare il grafico di una funzione polinomiale di 3° grado della quale non è noto calcolare gli zeri, se non ricorrendo di nuovo al computo di alcuni valori. L'insegnante suggerirà allora di trasformare l'equazione in un'altra equivalente, ma con un diverso significato concettuale.
La scrittura $x^3 + \pi x^2 = -1{,}763$ può essere pensata come l'intersezione di una retta di valore costante e di un polinomio di 3° grado, più semplice del precedente. L'insegnante può comunque approfittare dell'occasione per far riprendere agli studenti, a livello qualitativo, l'andamento di una funzione polinomiale, il suo comportamento per valori che tendono all'infinito, il numero massimo dei suoi zeri.
La funzione $y = x^3 + \pi x^2$, a meno della traslazione, può essere scritta $y = x^2(x + \pi)$; essa tocca l'asse x in $x = 0$ e in $x = -\pi$. Le considerazioni sul segno fanno anche capire che la funzione si mantiene negativa per valori di $x < -\pi$, mentre è sempre positiva per tutti gli altri valori.

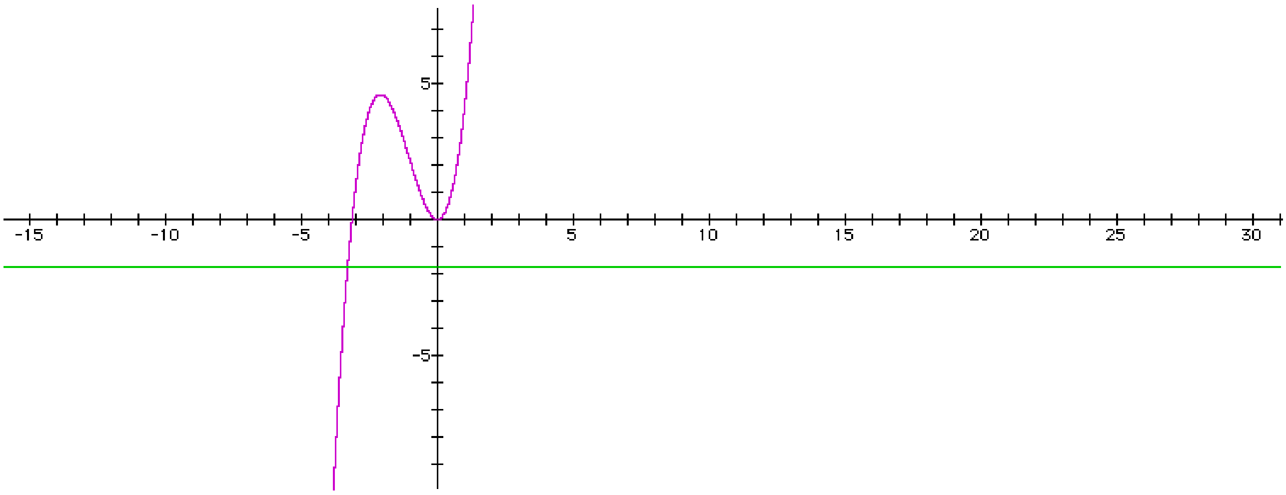

Figura 1

Il grafico fa capire che le due funzioni hanno una sola intersezione, che in questo caso è negativa, e – se disegnato con una certa accuratezza – ci da anche una stima numerica della soluzione.

<u>Seconda fase</u>
Si considera adesso l'equazione $x^3 + ax^2 + b = 0$ a cui si vogliano applicare i due metodi proposti nell'esempio precedente. E' interessante sottolineare subito come la nozione di continuità sia l'elemento fondamentale che consente di portare avanti con successo le due procedure, anche da un punto di vista generale.
Procedendo per casi gli studenti si renderanno conto che se a e b sono positivi, la situazione ricalca del tutto quella precedente. Gli altri casi prevedono però la considerazione di ulteriori sottocasi che portano a rendere complessa la discussione generale dell'equazione. Tuttavia si possono trovare altre condizioni: l'intersezione del polinomio con l'asse x, il fatto che per x che tende a meno infinito il polinomio ha sicuramente segno negativo e che per x tendente a più infinito il polinomio ha segno positivo. Quindi si può affermare che c'è sempre almeno una soluzione reale, di cui però è necessario discutere il segno.
Il metodo grafico visto in precedenza porta invece un po' più avanti. Scriviamo ancora l'equazione come $x^3 + ax^2 = -b$, riferendoci dunque all'intersezione delle due funzioni

$$y = -b\text{ , e}\quad y = x^3 + ax^2 = x^2(x + a).$$

La prima è una retta parallela all'asse delle ascisse, nel semipiano inferiore o superiore a seconda che b sia positivo o negativo. La seconda interseca l'asse x in $x = 0$ e in $x = -a$, è positiva per $x > -a$, e negativa per $x < -a$.
Se a è positivo si ha una grafico con lo stesso andamento di quello visto nell'esempio precedente, ovvero c'è una soluzione negativa per b positivo e una o tre soluzioni se b è negativo.

Se *a* è negativo, il grafico ha un andamento del tipo indicato in figura (in cui abbiamo posto *a* =-3). Se *b* è positivo, c'è sicuramente una soluzione negativa, se *b* è negativo c'è solo una soluzione positiva.

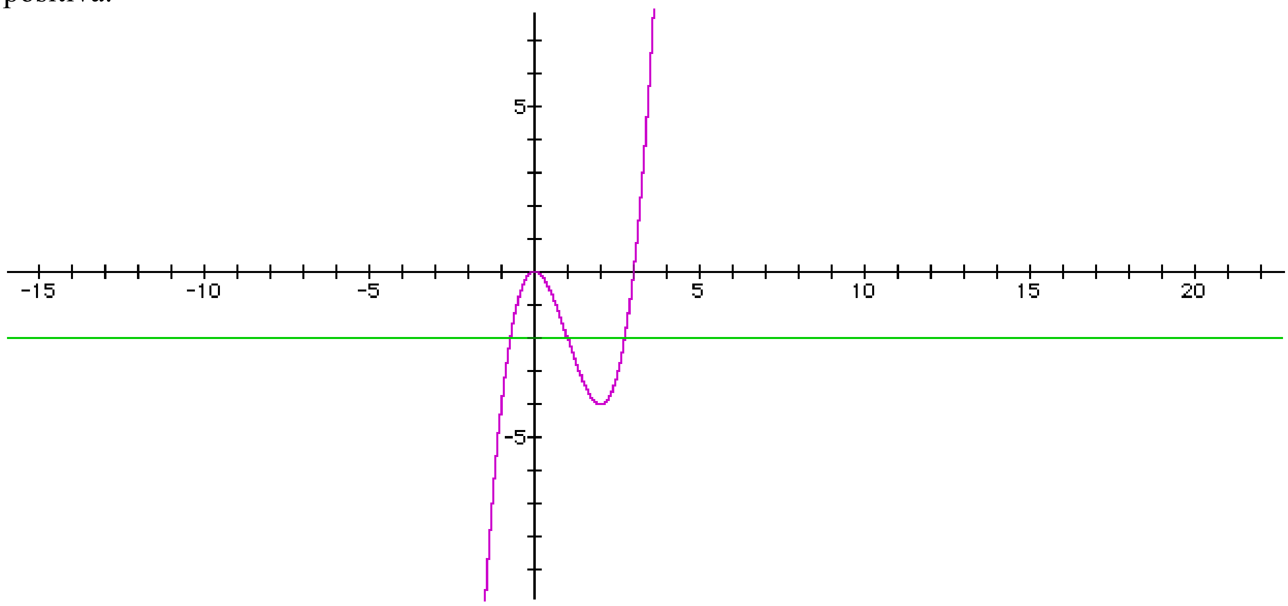

Figura 2

Possibili sviluppi
Il metodo utilizzato, che consiste nell'interpretare un'equazione come intersezione di due funzioni, portando opportunamente alcuni termini a secondo membro, può essere utilizzato vantaggiosamente in molte situazioni, anche per funzioni non polinomiali. Si provi ad esempio a determinare gli intervalli in cui si trovano gli zeri dell'equazione $2\ln(x+2) - x = 0$.
Senza riferirsi alle funzioni, ma utilizzando considerazioni teoriche in modo analogo a quanto fatto nel primo esempio, si può rispondere subito alla domanda, apparentemente mostruosa:
L'equazione $x^5 - 7\mathrm{Log}(x + 1) + \sin x - (x + 1)^{1/2} = 0$ ha radici reali? La risposta è sì (infatti per $x = 0$ il primo membro assume valore -1, mentre per $x = 9$ l'espressione è abbondantemente positiva).