Gli incrementi finiti di una funzione

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre. Confrontare variazioni di grandezze utilizzando i concetti di pendenza e di variazione di pendenza. Stimare l'ordine di grandezza di una misura.	Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. Incrementi a passo costante, pendenza media.	<u>Misurare</u> Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Grandezze variabili.

Il contesto dell'attività è quello dello studio della variazione di grandezze.

Descrizione dell'attività
Mediante il calcolo degli incrementi finiti di funzioni che legano queste grandezze in semplici casi particolari, per cogliere nel fenomeno certe regolarità che preludono all'introduzione formale del concetto di derivata nell'ambito dell'analisi matematica. L'attività offre anche precisi riferimenti storici al problema della determinazione delle rette tangenti ad una curva assegnata in un suo punto, allo studio delle variazioni di una funzione attraverso la sua rappresentazione grafica ed alla determinazione della velocità istantanea del moto di un corpo a partire dalla sua legge oraria.
Prerequisiti: grafici di funzioni polinomiali di primo e secondo grado, calcolo letterale, frazioni algebriche, legge oraria del moto di un corpo.

<u>Prima fase</u>
Assegnato un grafico di una funzione sconosciuta (ad esempio, quello di una cubica con un punto di massimo relativo ed un punto di minimo relativo), tracciato su di un foglio, si propone agli studenti, come lavoro individuale oppure di gruppo, di descrivere qualitativamente per scritto le variazioni della variabile dipendente in relazione alle variazioni della variabile indipendente. Gli studenti hanno il compito di provare ad individuare le zone del grafico loro fornito in cui tali variazioni avvengono con maggiore o minore rapidità e di collegare questi fatti con le caratteristiche del grafico della funzione stessa.

Proposta di lavoro

Analizza il grafico riprodotto nel foglio che ti è stato dato.
Descrivi come cambiano i valori della variabile dipendente y al variare dei valori della variabile indipendente x; controlla in particolare se le variazioni di y si manifestano con una certa "uniformità" al variare dei valori di x oppure no. Trova un collegamento tra l'andamento del grafico ed il modo in cui variano i valori della variabile y e scrivi quali sono le tue opinioni a proposito.

Si mettono a confronto le osservazioni emerse nella prima fase durante una discussione collettiva in classe. Si propone quindi di continuare l'analisi con un approccio quantitativo al problema.

Seconda fase

Si passa da un'analisi qualitativa ad un'analisi quantitativa, restringendo però il campo d'azione alla situazione più semplice che gli studenti conoscono: l'ambito delle funzioni polinomiali. L'indagine, che si può ben avvalere di un foglio elettronico, procede dallo studio di un caso particolare verso la descrizione di un caso qualsiasi, così da porre ancora una volta l'accento sul potere generalizzante del linguaggio dell'algebra letterale e da permettere di pari passo la rilettura di quanto scoperto mediante il calcolo algebrico nelle proprietà del grafico associato alla funzione considerata. Uno degli aspetti caratterizzanti l'intera proposta è quello di non limitarsi alla sola determinazione delle differenze finite tra i valori della variabile dipendente, in funzione degli incrementi della variabile indipendente: in effetti per la funzione di secondo grado si calcolano anche gli incrementi delle differenze stesse (dette "prime differenze"), per ottenere le "seconde differenze" e verificare che queste ultime si mantengono costanti, mentre per la funzione di terzo grado si giunge a calcolare le "terze differenze", che risultano ugualmente costanti.

Nasce subito un problema aperto da proporre agli studenti: il comportamento delle funzioni di secondo e terzo grado può essere generalizzato? Si può dimostrare qualcosa a questo proposito?

Proposta di lavoro 1

Considera la funzione $y = 2x +1$ e rappresenta il suo grafico in un riferimento cartesiano ortogonale $x\mathrm{O}y$. Dati i seguenti valori di x: 0, 1 , 2, 3, 4, 5, 6, organizza con un foglio elettronico una tabella che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di y. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di y. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di x ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo. Prova a ritrovare le tue conclusioni nel grafico che hai rappresentato. Che cosa accade, secondo te, se si considera una funzione qualunque del tipo $y = m\,x + n$, essendo m ed n parametri assegnati? Ripeti il precedente esperimento di calcolo, annotando quello che scopri.

Proposta di lavoro 2

Considera adesso una funzione generica di secondo grado, del tipo $y = x^2$. Dati i seguenti valori di x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, organizza una tabella con un foglio elettronico che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di y. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di y e determina inoltre le differenze tra le differenze successive che hai appena calcolato. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di x ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo.

Che cosa accade, secondo te, se si considera una funzione qualunque del tipo $y = ax^2$, essendo a un parametro assegnato? Ripeti il precedente esperimento di calcolo, annotando quello che scopri.

Proposta di lavoro 3

Considera adesso una funzione generica di terzo grado, del tipo $y = ax^3$. Dati i seguenti valori di x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, organizza con un foglio elettronico una tabella che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di y. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di y, determina come prima le differenze tra le differenze successive che hai appena calcolato e stavolta determina anche i valori delle differenze tra queste ultime differenze consecutive ottenute. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di x ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo.

Riesci ad immaginare che cosa accadrebbe se ripetessi il procedimento per una funzione di quarto grado del tipo $y = ax^4$? Puoi prevedere un comportamento generalizzabile per le funzioni del tipo $y = ax^n$, con n esponente intero positivo qualsiasi?

Osservazioni
Ciò che in conclusione deve emergere da queste prime fasi dell'attività è una specifica metodologia di analisi del comportamento di una funzione che trova immediata applicazione nella ricerca del coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione assegnata in un suo punto. Tale ricerca viene condotta in stretto collegamento con la determinazione della velocità istantanea del moto di un corpo secondo una certa legge oraria, come descritto nella fase successiva dell'attività.

Terza fase
Si passa ora all'applicazione del metodo degli incrementi finiti per la determinazione della velocità media di un corpo in movimento, a partire dall'espressione algebrica della legge oraria. In seguito si determina l'espressione della velocità istantanea al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente t e si giunge a prevedere quella che è in fondo la legge generale della derivata della funzione $s(t) = at^n$.

Proposta di lavoro 1

Immagina di dover studiare il moto di un corpo che si muove secondo la seguente legge oraria: $s(t) = at + b$. Calcola la velocità media in relazione all'intervallo di tempo $[t_1 , t_2]$. Che cosa ottieni? E se il valore di t_2 si avvicina sempre di più a t_1, che cosa puoi dire del valore della velocità media che hai prima calcolato? Pensi che si possa dare un significato preciso alle tue osservazioni? Prova a ripetere adesso lo stesso calcolo, indicando per semplicità l'istante di tempo t_2 come $t_1 + h$, per la legge oraria $s(t) = at^2$ e per la legge oraria $s(t) = at^3$, immaginando che il valore di h si avvicini sempre più a 0. C'è qualche regolarità in quello che hai trovato? Spiega le tue risposte.

Osservazioni
L'obiettivo della discussione da far seguire alla precedente consegna è evidentemente l'introduzione in modo intuitivo del concetto di velocità istantanea del moto di un corpo, senza però ricorrere alla formalizzazione del concetto di limite del rapporto incrementale.

Proposta di lavoro 2

Prova adesso a generalizzare tutto quello che fino ad ora si è scoperto. Cerca di prevedere quale potrebbe essere una legge di carattere generale per la velocità associata alle leggi orarie del tipo $s(t) = at^n$, con n esponente intero positivo qualsiasi. Cambiando un po' le cose, si potrebbe dire qualcosa per la velocità associata alla legge oraria di un moto uniformemente accelerato, come quello di caduta dei corpi nel vuoto? Ricorda che la legge oraria è in tal caso $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0\, t + s_0$. Scrivi quello che pensi a proposito.

Possibili sviluppi

A questo punto un naturale sviluppo dell'attività consiste nel collegare il problema della ricerca di un'espressione per la velocità istantanea di un corpo in moto secondo una legge oraria assegnata, almeno per il caso polinomiale, al problema della ricerca dell'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto. Ciò conduce ad interpretare il coefficiente angolare della retta tangente ad un grafico come il valore della velocità istantanea del corpo in moto secondo la legge oraria associata a tale grafico, senza arrivare per il momento ad una teoria compiuta della derivazione.