Sarà vero, ma non ci credo

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Dati e previsioni Laboratorio di matematica	

Contesto
Aritmetica: numeri primi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo ciclo quando gli studenti sanno sia calcolare il valore di un'espressione numerica e semplificare una semplice espressione letterale, sia utilizzare il foglio elettronico per velocizzare la verifica della congettura descritta o per ricercare contro-esempi.
L'attività proposta - caratterizzata dalla problematicità della situazione (verifica dell'affermazione) e dall'implementazione nel foglio elettronico della stessa - permette agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di affinare uno spirito critico in seno alle forme di ragionamento e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.
Nell'attività sono prese in considerazione congetture semplici, verificabili numericamente e non dimostrate algebricamente, in modo da giustificare l'affermazione: Sarà vero ma non ci credo**.**

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata alla semplificazione di semplici espressioni algebriche corrispondenti alle affermazioni presentate e si conclude con l'implementazione delle stesse in ambiente macchina. Quest'ultimo aspetto risulta necessario sia alla verifica delle affermazioni, sia allo sviluppo e al consolidamento del pensiero logico-deduttivo che maggiormente contraddistingue il "fare matematico".
All'attività sono legate l'acquisizione di varie abilità, ma soprattutto l'attenzione nella lettura e comprensione di enunciati matematici e la scoperta di aspetti interessanti legati agli insiemi numerici. E' utilizzata *la metodologia dell'apprendistato cognitivo*[1] intesa come imitazione, da parte dello studente, delle strategie e dei processi attivati dall'insegnante o da altri studenti per risolvere situazioni problematiche o per evitare le difficoltà nell'affrontare i problemi.
L'attività può essere presentata autonomamente o, meglio, inserita in un percorso più articolato che utilizza le altre unità: Quel che vedo è sempre vero, Non è vero che è sempre vero e Condizione necessaria ma non sufficiente**.**

[1] Vedi Indicazioni metodologiche.

Prima fase

L’attività viene proposta in aula quando gli studenti sono in grado di calcolare il valore di un'espressione algebrica.

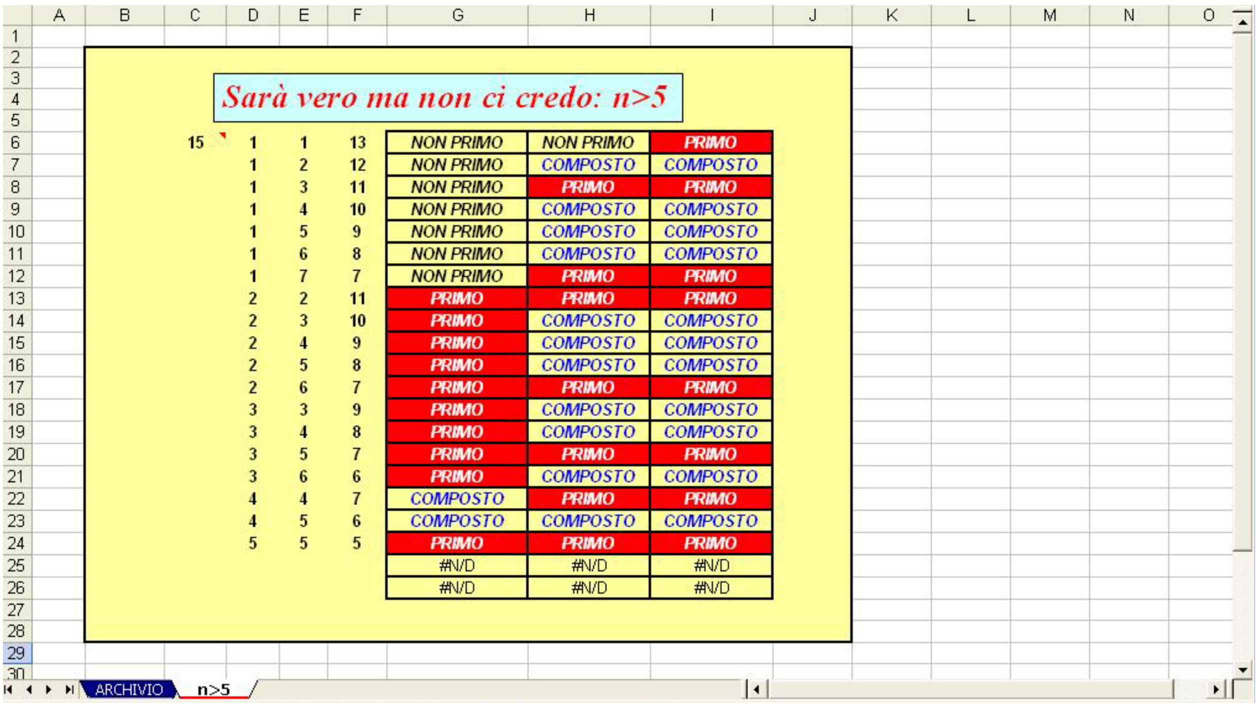
- L’insegnante enuncia agli studenti le seguenti affermazioni:
  - ✓ “*Per ogni numero pari n>2, esistono due numeri primi p e q (non necessariamente distinti) tali che n=p+q*”***;*** congettura di Cristian Goldbach (1690 – 1764).
  - ✓ “*Per ogni numero dispari n>5, esistono tre numeri primi p, q e r (non necessariamente distinti) tali che n=p+q+r*”***;*** problema di Cristian Goldbach sui Numeri Dispari.
  - ✓ “*Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi****”***, congettura di Polignac (1849).
- L’insegnante invita gli studenti, riuniti in gruppi, a verificare con esempi numerici (anche con utilizzo di una calcolatrice) tale asserzione e a ricercare eventuali eccezioni mediante riscontro mediante riscontro su una tabella come quella riportata alla fine dell’attività 4 (*Non è vero che è sempre vero*), che si trova facilmente in rete cliccando su ‘prime numbers’ con un qualsiasi motore di ricerca.
- L’insegnante evidenzia come il computer, e in particolare l’uso del foglio elettronico, può velocizzare il lavoro, aumentare il numero delle esplorazioni e utilizzare numeri più grandi.

Seconda fase

L’attività viene proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado di utilizzare il computer e di implementare le specifiche istruzioni nel foglio elettronico.

- L’insegnante descrive le istruzioni necessarie a far eseguire automaticamente le operazioni in modo da verificare l'affermazione: “*Per ogni numero pari n>2, esistono due numeri primi p e q (non necessariamente distinti) tali che n=p+q*”, e a ricercare eventuali controverifiche della congettura.

- L’insegnante stimola gli studenti a verificare la successiva affermazione: “*Per ogni numero dispari n>5, esistono tre numeri primi p, q e r (non necessariamente distinti) tali che n=p+q+r*”, e a ricercare eventuali contro verifiche della congettura.


Sarà vero ma non ci credo: n>5

15	1	1	13	NON PRIMO	NON PRIMO	PRIMO
	1	2	12	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	3	11	NON PRIMO	PRIMO	PRIMO
	1	4	10	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	5	9	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	6	8	NON PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	1	7	7	NON PRIMO	PRIMO	PRIMO
	2	2	11	PRIMO	PRIMO	PRIMO
	2	3	10	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	2	4	9	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	2	5	8	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	2	6	7	PRIMO	PRIMO	PRIMO
	3	3	9	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	3	4	8	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	3	5	7	PRIMO	PRIMO	PRIMO
	3	6	6	PRIMO	COMPOSTO	COMPOSTO
	4	4	7	COMPOSTO	PRIMO	PRIMO
	4	5	6	COMPOSTO	COMPOSTO	COMPOSTO
	5	5	5	PRIMO	PRIMO	PRIMO
				#N/D	#N/D	#N/D
				#N/D	#N/D	#N/D

Figura 1

- L'insegnante stimola gli studenti a verificare l'ultima affermazione: *Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi* e a ricercare eventuali

Sarà vero ma non ci credo: $n=p_2 - p_1$

2	3	1	PRIMO	NON PRIMO	28	26	COMPOSTO	COMPOSTO
	4	2	COMPOSTO	PRIMO	29	27	PRIMO	COMPOSTO
	5	3	PRIMO	PRIMO	30	28	COMPOSTO	COMPOSTO
	6	4	COMPOSTO	COMPOSTO	31	29	PRIMO	PRIMO
	7	5	PRIMO	PRIMO	32	30	COMPOSTO	COMPOSTO
	8	6	COMPOSTO	COMPOSTO	33	31	COMPOSTO	PRIMO
	9	7	COMPOSTO	PRIMO	34	32	COMPOSTO	COMPOSTO
	10	8	COMPOSTO	COMPOSTO	35	33	COMPOSTO	COMPOSTO
	11	9	PRIMO	COMPOSTO	36	34	COMPOSTO	COMPOSTO
	12	10	COMPOSTO	COMPOSTO	37	35	PRIMO	COMPOSTO
	13	11	PRIMO	PRIMO	38	36	COMPOSTO	COMPOSTO
	14	12	COMPOSTO	COMPOSTO	39	37	COMPOSTO	PRIMO
	15	13	COMPOSTO	PRIMO	40	38	COMPOSTO	COMPOSTO
	16	14	COMPOSTO	COMPOSTO	41	39	PRIMO	COMPOSTO
	17	15	PRIMO	COMPOSTO	42	40	COMPOSTO	COMPOSTO
	18	16	COMPOSTO	COMPOSTO	43	41	PRIMO	PRIMO
	19	17	PRIMO	PRIMO	44	42	COMPOSTO	COMPOSTO
	20	18	COMPOSTO	COMPOSTO	45	43	COMPOSTO	PRIMO
	21	19	COMPOSTO	PRIMO	46	44	COMPOSTO	COMPOSTO
	22	20	COMPOSTO	COMPOSTO	47	45	PRIMO	COMPOSTO
	23	21	PRIMO	COMPOSTO	48	46	COMPOSTO	COMPOSTO
	24	22	COMPOSTO	COMPOSTO	49	47	COMPOSTO	PRIMO
	25	23	COMPOSTO	PRIMO	50	48	COMPOSTO	COMPOSTO
	26	24	COMPOSTO	COMPOSTO	51	49	COMPOSTO	COMPOSTO
	27	25	COMPOSTO	COMPOSTO	52	50	COMPOSTO	COMPOSTO

ARCHIVIO n=p2-p1

Figura 2

- L'insegnante stimola gli studenti a ricercare la differenza tra verifica e dimostrazione in una congettura e a giustificare l'espressione: Sarà vero ma non ci credo, ossia congetture sempre verificabili aritmeticamente ma non dimostrabili algebricamente.

Possibili sviluppi

- Per consolidare l'esperienza l'insegnante propone di verificare altre congetture:
- Per *ogni numero dispari n, esistono due numeri primi p e q tali che n = p - q.*
  Congettura formulata da Chen nell'esame del problema di Goldbach.
- *Esistono infiniti numeri primi gemelli.*
  Due numeri primi p e q si dicono gemelli se e solo se p-q=2. Nel 1919 Brun ha dimostrato che la somma dei reciproci delle infinite coppie di numeri primi gemelli converge ad una costante detta, appunto, costante di Brun, *B=1,902160577783278.*
- *Esiste sempre un numero primo tra due quadrati perfetti consecutivi.*

Elementi di prove di verifica

1. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è vera*

a) Per ogni numero n esistono tre numeri primi distinti p, q e r tali che n > p + q +r
b) Per ogni numero n>2 esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n > p + q
c) Per ogni numero pari n>2, esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n=p+q
d) Per ogni numero dispari n>2, esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n=p+q
e) Per ogni numero pari n>2 esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n = p - q

2. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è vera*

a) Per ogni numero n esistono tre numeri primi distinti p, q e r tali che $n > p + q + r$
b) Per ogni numero $n>5$, esistono due numeri distinti p e q tali che $n > p + q$
c) Per ogni numero pari $n>5$, esistono due numeri primi (non necessariamente distinti) p, q e r tali che $n = p + q + r$
d) Per ogni numero dispari $n>5$, esistono due numeri primi (non necessariamente distinti) p, q e r tali che $n = p + q + r$
e) Per ogni numero $n>5$, esistono tre numeri dispari (non necessariamente distinti) p, q e r tali che $n = p + q- r$

3. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è una verifica della congettura di Goldbach*

a) $17 = 15 + 2$
b) $22 = 17 + 5$
c) $22 = 20 + 2$
d) $26 = 11 + 15$
e) $4 = 1 + 3$

4. *Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è una verifica della congettura di Goldbach*

a) $45 = 53 – 5 – 3$
b) $45 = 3 \cdot (17 – 2)$
c) $45 = 3 \cdot (2 + 13)$
d) $45 = 5 \cdot 3 \cdot 3$
e) $45 =23 + 17 +5$

5. *La congettura di Polignac asserisce che:*

a) Ogni numero dispari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri consecutivi
b) Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi
c) Ogni numero dispari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi
d) Ogni numero pari e maggiore di 5 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi
e) Ogni numero dispari e maggiore di 5 è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi