Area di un rettangolo: come cambia variando la lunghezza dei lati

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a contro-esempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare congetture, proprie o altrui, e teoremi. Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	<u>Argomentare</u>, <u>congetturare</u>, <u>dimostrare</u> Relazioni e funzioni Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto
Figure geometriche e loro relazioni.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del secondo biennio in un contesto matematico in cui gli allievi sono stimolati a formulare congetture di fronte a una situazione problematica. Con esplorazioni successive, alcune di queste congetture saranno confutate, mentre quella corretta sarà corroborata. Rimane però da spiegare il *perché*, che non appare intuitivamente evidente. Solo il passaggio al linguaggio algebrico e alla sua traduzione grafica nel piano cartesiano permetterà di comprendere e dimostrare le ragioni per cui la congettura è vera.
Si userà sia il quadro algebrico che quello cartesiano: la lettura opportuna delle rappresentazioni usate permetterà un inquadramento teorico delle esplorazioni numeriche iniziali.
E' opportuno che gli studenti dapprima congetturino e facciano previsioni, successivamente esplorino esempi numerici concreti e, infine, utilizzando il linguaggio algebrico, esplicitino in forma matematicamente compiuta la proprietà studiata.
L'attività può essere affrontata con una conoscenza preliminare del piano cartesiano, della parabola e dell'iperbole equilatera come funzioni.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Presentazione del problema.
Si consideri un rettangolo; come varia la sua area se un lato diminuisce del 10% e l'altro aumenta del 10%?

Possibili risposte degli studenti:
- l’area non cambia,
- dipende da quale lato (il maggiore o il minore) aumenta/diminuisce ….

L’insegnante invita gli studenti a fare degli esempi. I calcoli mostrano che c'è sempre una diminuzione dell’area. Di quanto diminuisce? Di poco, di tanto?
Il lavoro degli studenti, opportunamente guidato dall'insegnante, si precisa via via, definendo i termini del problema in forma sempre più netta.
È solo con il ricorso al linguaggio algebrico che il problema può essere interpretato in forma chiara e incontrovertibile:
se le dimensioni dei lati del rettangolo di partenza sono a e b, le dimensioni del secondo rettangolo sono $1{,}1a$ e $0{,}9b$; e *l'area* vale quindi:

$$1{,}1a \cdot 0{,}9b = 0{,}99ab$$

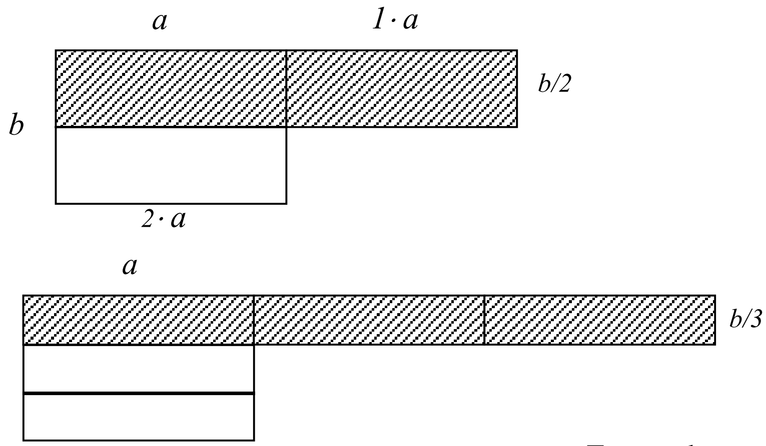
cioè diminuisce dell'1%.

<u>Seconda fase</u>
Generalizzazione del problema.
La seguente generalizzazione è occasione di discussione fra gli studenti sulle varie strategie risolutive.
I lati, di misura a e b, di un rettangolo vengono incrementati, uno secondo un fattore h (cioè a diventa $a+h\cdot a$) e un altro secondo un fattore k (cioè b diventa $b+k\cdot b$).
Come varia l’area del rettangolo?

Il problema ha senso per $h > -1$ e $k > -1$, perché per h e k uguali a -1 le dimensioni del rettangolo si ridurrebbero a zero.
L’area aumenta se h e k sono entrambi positivi.
Ha senso, invece, porsi il problema per h e k discordi.

Possibili approcci risolutivi al problema
- Esplorazione grafica

L’alunno può provare a raddoppiare, triplicare, ecc., un lato ed osservare che l’area resta invariata se l’altro lato viene dimezzato, diventa un terzo del lato iniziale, ecc.
Quindi l’area aumenta solo se il secondo lato diminuisce meno della metà, meno dei 2/3 , ecc.



$h = 1$
$k = -1/2$
$(k>-1/2)$

$h = 2$
$k = -2/3$
$(k>-2/3)$

Figura 1

- Esplorazione numerica

L'alunno può costruire una tabella di valori, eventualmente tramite l'uso di un foglio elettronico, attribuendo diversi valori agli elementi del problema (può far variare tutti gli elementi, oppure può rendersi conto che la soluzione è indipendente dalle dimensioni iniziali del rettangolo; ancora, può accorgersi che il problema è simmetrico e far variare solo uno tra h e k).
Entrambe le esplorazioni possono sfociare, poi, in un

- Approccio algebrico

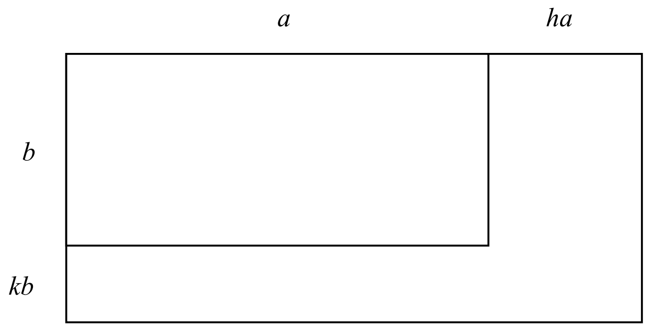


Figura 2

Dette A ed A' rispettivamente l'area del rettangolo dato e l'area del rettangolo i cui lati sono stati incrementati, in generale è $A' > A$ se:

$$(a + ha)(b + kb) > ab$$

cioè se:

$$a(1 + h)b(1 + k) > ab$$

da cui si ricavano le seguenti disuguaglianze:

$$(1 + h)(1 + k) > 1, \quad h + k + hk > 0, \quad k(h + 1) > -h,$$

ed essendo $h > -1$, si ha $k > -\dfrac{h}{h+1}$.

E' interessante osservare, cosa generalmente non banale per gli studenti, che nella formula

$$(1 + h)(1 + k)$$

che esprime il rapporto tra le aree, h, k possono essere negativi.

Le condizioni trovate, $k > -\dfrac{h}{h+1}$, $h > -1$, possono essere interpretate graficamente in un riferimento cartesiano Ohk come la parte di piano "sovrastante" un opportuno arco di iperbole equilatera.

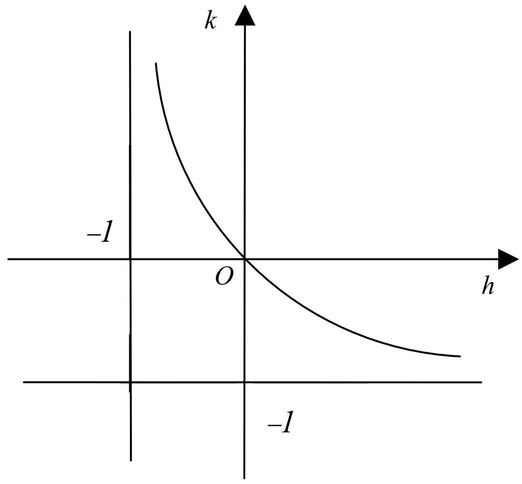


Figura 3

Possibili sviluppi

Si aggiunge un vincolo al problema precedente, per esempio la condizione $h + k = c$ con c reale fissato.

Cosa succede per c=0?

Per quali valori di h e k si ottiene il massimo incremento dell'area?

Il rapporto tra le aree, cioè l'incremento relativo, si può esprimere in funzione di c, sostituendo, per esempio, $k = c - h$, $\frac{A}{A'} = 1 + c + h(c - h)$.

Studiando il grafico (Figura 4) di tale funzione, $y = (1 + c) + ch - h^2$, si trova il massimo per

$$h = k = c/2.$$

Si osserva che un analogo metodo può essere applicato allo studio della propagazione degli errori nel prodotto (cfr. nucleo Misurare).

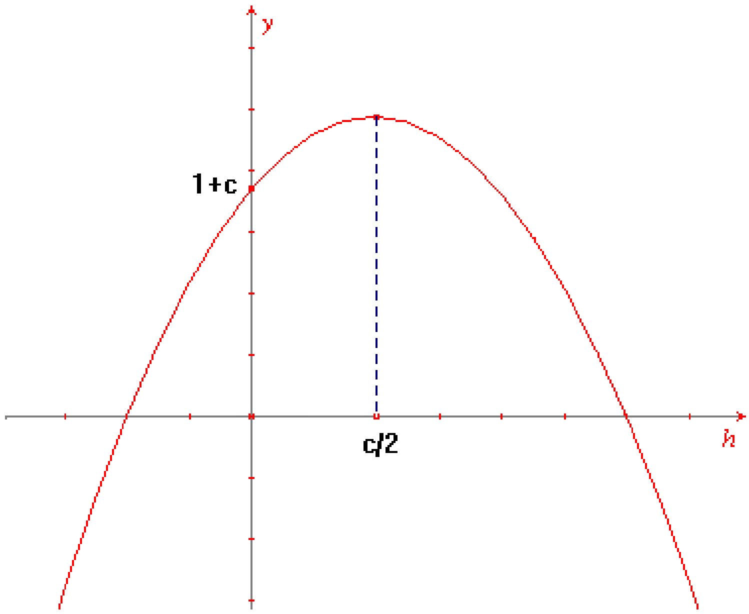


Figura 4