Grissini e triangoli

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici. Produrre congetture. Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano. Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Eventi e probabilità. Rette, segmenti, poligoni. Equazioni e disequazioni. Semplici funzioni razionali.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare</u> Dati e previsioni Spazio e figure Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Probabilità e geometria

L'attività si colloca al primo anno del secondo biennio quando gli studenti hanno già acquisito l'abilità di usare ed analizzare in varie situazioni linguaggi simbolici, produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e sono in possesso di conoscenze relative allo spazio degli eventi nel caso finito e alla valutazione classica di probabilità.
L'attività è finalizzata a favorire negli studenti l'evoluzione dall'argomentare al dimostrare privilegiando le loro capacità di ragionamento stimolate dal fatto che il problema proposto non suggerisce, a priori, neppure intuitivamente la soluzione.

Descrizione dell'attività
<u>Il grissino</u>
Un grissino di lunghezza b viene spezzato in tre punti a caso. Qual è la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo?
Si invitano gli studenti a formulare delle congetture (magari provando a spezzare in tre parti un grissino…) dalla discussione emerge che affinché i tre pezzi di grissino formino un triangolo essi devono avere una certa lunghezza!
La necessità di porre condizioni sulla lunghezza porta a tradurre il problema in linguaggio matematico: si consideri il grissino come un segmento che deve essere diviso in parti in modo da poter formare un triangolo.
Si rappresenti un segmento di lunghezza b e siano x e y due delle sue parti:

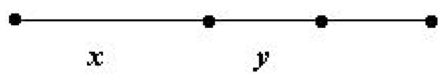

Figura 1

E' facile capire che $x + y < b$ traduce, in linguaggio formale, la condizione che il segmento possa essere diviso in tre parti.
Si sa che ciascuna delle tre parti per poter formare un triangolo deve avere una lunghezza minore della somma delle lunghezze degli altri due, che tradotto formalmente:

$$x < b/2\ ;\quad y < b/2;\quad x + y > b/2$$

Il passaggio dal grissino al segmento non è banale!
Richiede un processo di astrazione che, in questo contesto, si propone di realizzare utilizzando le abilità relative al calcolo delle probabilità. Per giungere ad esso è opportuno aver già abituato i ragazzi a calcolare la probabilità nel caso di spazi infiniti di eventi come rapporto di aree, proponendo ad esempio esercizi del tipo seguente.
Si vuole colpire un bersaglio di forma circolare. Qual è la probabilità di colpire il bersaglio in un punto più vicino al centro che alla circonferenza?

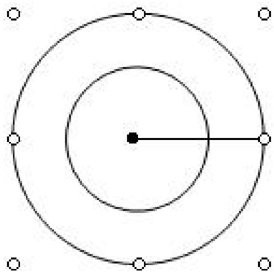

Figura 2

E' necessario osservare che il segmento, a differenza del grissino, è omogeneo rispetto ai suoi punti per cui si può congetturare che tutti i punti sono equiprobabili (cioè il segmento si può "spezzare" in ogni punto); si può quindi applicare la definizione classica di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
Per il calcolo dei casi favorevoli si utilizzano le condizioni:

$$x < b/2\ ;\quad y < b/2;\quad x + y > b/2$$

Per il calcolo dei casi possibili si utilizzano le condizioni:

$$x>0;\quad y>0;\quad x + y < b$$

che nel caso continuo (per un segmento) possono diventare $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq b$ includendo così anche i casi limite.

Se si interpretano le disequazioni precedenti nel piano cartesiano si conclude che la probabilità cercata è data dal rapporto tra l'area $A1$ del triangolo rettangolo (indicato in arancio in Figura 3) e l'area A del triangolo rettangolo che ha i cateti di lunghezza b.

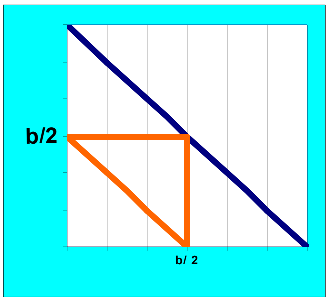

Figura 3

Se si indica con p la probabilità cercata, si ha:

$$p = A_1/A = 1/4$$

La risposta 1/4 non era assolutamente prevedibile!
Nel calcolo delle probabilità spesso le soluzioni dei problemi sono tutt'altro che intuitive e questo fatto ha una valenza didattica notevole soprattutto sul piano della motivazione.
Per aumentare il livello di astrazione si possono seguire due direzioni, aumentare:
a. il numero dei pezzi;
b. le condizioni sul tipo di triangolo.

Caso a
Se il segmento in questione si divide in quattro parti qual è la probabilità che si ottenga un quadrilatero?
Se il segmento si divide in cinque parti? …e in *n* parti?
Gli studenti, per rispondere, possono formulare congetture, pensando a un:
- grissino "ideale" che si può dividere in *n* parti;
- segmento divisibile all'infinito.

La discussione permetterà di consolidare la distinzione tra caso discreto (*grissino*) e caso continuo (*segmento*).

Caso b
Se la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo è 1/4, qual è la probabilità di ottenere un triangolo:
- equilatero?
- rettangolo?

Triangolo equilatero:

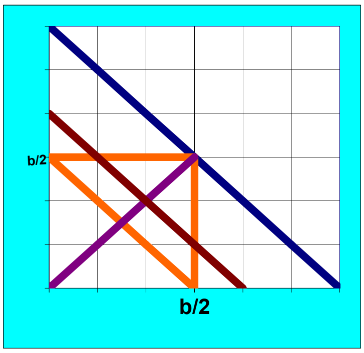

Figura 4

Il triangolo è equilatero se $x = y = b/3$
I casi favorevoli sono costituiti dal punto di intersezione (Figura 4) della bisettrice $y=x$ con la retta

$$x+y = 2/3\ b$$

Ne consegue che la probabilità di ottenere un triangolo equilatero dividendo a caso in tre parti un segmento è 0.
Questo non vuol dire che l'evento non si possa verificare!
Ma è un evento di probabilità nulla (come vincere alla lotteria)!

Triangolo rettangolo:
Dalla relazione Pitagorica:

$$x^2+y^2 = (b-x-y)^2$$

si perviene, con semplici calcoli, all'equazione:

$$y = \frac{b(x-\frac{b}{2})}{x-b}$$

che rappresenta, con i vincoli posti dal problema considerato, il ramo di iperbole disegnato azzurro in figura:

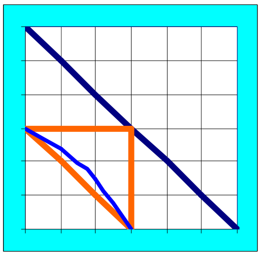

Figura 5

I casi favorevoli sono i punti del ramo di iperbole e i casi possibili sono sempre dati dall'area del triangolo rettangolo che ha per cateti *b*.
Se si suppone che si sia ottenuto un triangolo, per calcolare la probabilità che sia rettangolo, si deve tener conto che i casi favorevoli restano gli stessi mentre i casi possibili sono dati dall'area del triangolo rettangolo in arancio.
Quanto vale p?
Essendo l'area di un arco di curva uguale a zero la probabilità è in ogni caso 0.

Osservazione**:** Comprendere che una curva ha area 0 è un concetto che richiede una capacità di astrazione molto elevata.

Possibili sviluppi

- Il caso b può essere ulteriormente sviluppato cercando la probabilità che il triangolo sia ottusangolo. La probabilità è sempre un rapporto di aree in questo caso però, la sua valutazione quantitativa richiede la conoscenza del calcolo integrale (area di una figura a contorno curvilineo).