Non è vero che è sempre vero

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici dell'algebra. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	<u>Argomentare</u>, <u>congetturare</u>, <u>dimostrare</u> Numeri e algoritmi Dati e previsioni Laboratorio di matematica	Storia

Contesto
Aritmetica: numeri primi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo biennio, quando gli studenti sanno sia calcolare il valore di un'espressione numerica e semplificare una semplice espressione letterale, sia utilizzare il foglio elettronico per velocizzare la verifica della congettura descritta o per ricercare contro-esempi.
L'attività proposta - caratterizzata dalla problematicità della situazione (verifica dell'affermazione) e dall'implementazione nel foglio elettronico della stessa - permette agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di affinare uno spirito critico in seno alle forme di ragionamento e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.
Nell'attività sono prese in considerazione congetture semplici, verificabili numericamente e dimostrabili algebricamente, in modo da giustificare l'affermazione: Non è vero che è sempre vero.

Descrizione dell'attività
Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata alla semplificazione di semplici espressioni algebriche corrispondenti alle affermazioni presentate e si conclude con l'implementazione delle stesse in ambiente macchina. Quest'ultimo aspetto risulta necessario sia alla verifica delle affermazioni, sia allo sviluppo e al consolidamento del pensiero logico-deduttivo che maggiormente contraddistingue il "fare matematico".
All'attività sono legate l'acquisizione di varie abilità, ma soprattutto l'attenzione nella lettura e comprensione di enunciati matematici e la scoperta di aspetti interessanti legati agli insiemi numerici.
E' utilizzata *la metodologia dell'apprendistato cognitivo*[1] intesa come imitazione, da parte dello studente, delle strategie e dei processi attivati dall'insegnante o da altri studenti per risolvere situazioni problematiche o per evitare le difficoltà nell'affrontare i problemi.
L'attività può essere presentata autonomamente o inserita in un percorso più articolato che utilizza le altre unità: Quel che vedo è sempre vero, Sarà vero ma non ci credo e Condizione necessaria ma non sufficiente**.**

[1] Vedi Indicazioni metodologiche.

Prima fase

L'attività viene proposta in aula quando gli studenti sono in grado di calcolare il valore di un'espressione algebrica. L'insegnante illustra le *notizie storiche* legate alle congetture sui numeri primi, qui sintetizzate:

"Lo studio dei numeri primi è stato oggetto di numerose congetture nel corso dei secoli, alcune delle quali sono tuttora irrisolte. Nonostante l'amore per i numeri che i Pitagorici provavano, i risultati da loro ottenuti non riguardano esclusivamente i numeri primi. Il primo risultato importante sui numeri primi è dovuto ad Euclide che più di 2000 anni fa, nel libro IX degli *Elementi*, provò l'infinità di questi. Questa fu una delle prime dimostrazioni ad usare il metodo di riduzione all'assurdo per trovare un risultato. Euclide diede anche la prova del Teorema Fondamentale dell'Aritmetica: *ogni numero intero può essere scritto come un prodotto di numeri primi in modo essenzialmente unico*. Tale dimostrazione, tuttavia, non ha fornito alcuna indicazione ulteriore sulla distribuzione dei numeri primi lungo l'insieme dei naturali.

Intorno al 200 a.C. il greco Eratostene ideò un *algoritmo* per elencare i numeri primi, che si chiama il *Crivello di Eratostene*.

I successivi sviluppi importanti vennero fatti da Fermat (1601-1665) all'inizio del diciassettesimo secolo. Egli dimostrò una congettura di Albert Girard, cioè che ogni numero primo rappresentabile con la formula $4n + 1$ può essere scritto in modo unico come somma di due quadrati e congetturò come *ogni numero possa essere scritto come la somma di quattro quadrati*. e ipotizzò inoltre, che i numeri della forma $2^{(2^n)}+1$ fossero primi (Eulero dimostrò che la congettura è falsa per $5 \leq n \leq 16$).

Fermat dimostrò anche quello noto come il *Piccolo Teorema di Fermat*: *se p è un numero primo, allora per ogni numero intero a si ha* $a^p = a$ *modulo p*.

Ciò dava credito alla congettura cinese, risalente a 2500 anni prima, cioè che *un numero intero n è numero primo se e solo se il numero* $2^n - 2$ *è divisibile per n*. Se fosse vera tale congettura la ricerca dei numeri *primi* si semplificherebbe notevolmente.

L'*ipotesi cinese* è però solo *necessaria ma non sufficiente*, infatti $341 = 11 \cdot 31$ non è primo ma $2^{341} - 2$ è divisibile per 341. Quindi tale condizione è efficace solo se non è verificata da *n*, nel qual caso si conclude che *n* non è primo.

Il *Piccolo Teorema di Fermat* è la base per molti altri risultati nella *Teoria dei Numeri* e per metodi ancora in uso oggi sui computer per controllare se i numeri sono primi.

Fermat trattenne una corrispondenza con altri matematici del suo tempo ed in particolare col monaco Marin Mersenne (1558-1648). In una delle sue lettere a Mersenne egli espresse l'idea che i numeri $2^n + 1$ erano sempre numeri primi se n è una potenza di 2, verificò questo per n = 1, 2, 4, 8 e 16, e sapeva che se n non fosse stata una potenza di 2, il risultato sarebbe stato falso; numeri di questa forma sono chiamati *numeri di Fermat*. Fu solo oltre 100 anni dopo che Eulero mostrò che il caso successivo $2^{32} + 1 = 4294967297$ è divisibile per 641 e così non è primo!

Anche i numeri della forma $2^n - 1$ attrassero attenzione perché è facile mostrare che se *n* non è primo quei numeri devono essere numeri composti. Essi sono spesso chiamati *numeri di Mersenne* M_n perché Mersenne li studiò. Euclide aveva dimostrato inoltre che se il numero $2^n - 1$ è un numero primo, allora il numero $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ è un numero perfetto (cioè pari alla somma dei suoi fattori; ad es. 6 = 1+2+3; altri numeri perfetti sono: 28, 496, 8128). Il matematico Eulero nel 1747 dimostrò che *tutti* i numeri perfetti pari avevano quella forma. Ancora oggi non si sa se vi sono dei numeri perfetti *dispari*. Non tutti i numeri della forma $2^n - 1$ con n primo sono primi.

Per esempio $2^{11} - 1 = 2047 = 23^1 \cdot 89$ è un numero composto. Per molti anni numeri di questa forma furono i più grandi primi noti. Il numero M_{19} venne dimostrato primo da Cataldi nel 1588 e fu il più grande primo conosciuto per circa 200 anni fino a che Eulero dimostrò che M_{31} è primo. Esso stabilì

un record, in quanto per un secolo non si scoprì un primo maggiore; successivamente, quando Lucas mostrò che M_{127} (numero a 39 cifre) è primo, quello diventò il record fino all'era dei computer elettronici. Infatti nel 1952 i numeri di Mersenne M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} ed M_{2281} vennero dimostrati primi da Robinson usando uno dei primi computer iniziando così l'era dei computer anche in teoria dei numeri.
La storia prosegue a tutt'oggi: ad esempio il 14.11.01 si scoprì che il numero di Mersenne $2^{13466917}$-1 è primo. Si tratta di un numero di 4053946 cifre; conseguentemente il numero $2^{13466916}\cdot(12^{13466917}-1)$ è perfetto".

- L'insegnante enuncia agli studenti la seguente affermazione: "*Esiste una formula che genera numeri primi?*".
- L'insegnante invita gli studenti ad utilizzare il polinomio: n^2-n+17, con $n \in N_+$, per la ricerca (anche con l'utilizzo di una calcolatrice) di numeri primi mediante riscontro su una tabella come quella riportata alla fine di questa attività (si trova facilmente in rete cliccando su 'prime numbers' con un qualsiasi motore di ricerca).
- L'insegnante invita gli studenti, riuniti in gruppi, a verificare con esempi numerici tale asserzione e a ricercare eventuali eccezioni.
- L'insegnante evidenzia come il computer e in particolare l'uso del foglio elettronico può velocizzare il lavoro e aumentare il numero delle esplorazioni, sia con numeri più grandi, sia con valori diversi da 17.

Seconda fase

L'attività viene proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado di utilizzare il computer e di implementare le specifiche istruzioni nel foglio elettronico.

- L'insegnante generalizza l'affermazione precedente con la relazione: n^2-n+c e descrive le istruzioni necessarie a far eseguire automaticamente le operazioni, in modo da verificare l'affermazione presentata in corrispondenza di diversi valori di $c \in N$.
- L'insegnante sollecita la risoluzione del problema e la riflessione sulle seguenti affermazioni:
  a) La formula genera tutti i numeri primi?
  b) La formula genera solo, ma non tutti, numeri primi?
  c) La formula genera anche alcuni numeri non primi?
  d) Il parametro *c* può assumere numeri pari?
  e) Il parametro *c* può assumere numeri composti?
  f) Il parametro *c* può assumere numeri primi?

- L'insegnante stimola gli studenti a ricercare la differenza tra verifica e dimostrazione in una congettura e a giustificare l'espressione: Non è vero che è sempre vero, ossia congetture non sempre verificabili aritmeticamente e non dimostrabili algebricamente.

Possibili sviluppi

- L'insegnante invita gli studenti a riflettere sulle seguenti osservazioni:
  - ✓ In che relazione si trovano particolari valori di *c: 11, 17, 41, ...* con la certezza che il valore corrispondente, undicesimo, diciassettesimo, … sia un numero primo: *soglia di credibilità della congettura;*
  - ✓ Riflessione sulla infinità dei numeri primi:
    La scelta di ***c*** sempre più grande individuerà una soglia di *non credibilità* della unicità della formula generatrice di numeri primi; per ogni ***c*** sempre più grande l'insieme dei numeri primi, che si potranno così individuare, sarà più denso e si potrà pertanto giungere all'affermazione che ***i*** *numeri primi sono infiniti.*
- Teorema di Euclide: *I numeri primi sono infiniti.*

- ✓ La dimostrazione fornita da *Euclide* è una classica dimostrazione per assurdo che si basa sull'osservazione che un numero "*composto*", cioè avente più di due divisori, si può decomporre nel prodotto di numeri primi. Supponiamo, per assurdo, che l'insieme dei numeri primi sia finito e disponiamoli in ordine crescente: 2, 3, 5, ……, *p*. Consideriamo il numero $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots\ldots \cdot p + 1$. Essendo $m>1$ sarà o un numero primo o un numero composto.
  Si presentano, pertanto, due casi:
  - Se m è primo il teorema resta così provato dal momento che $m > p$;
  - Se m è un numero composto allora potrebbe essere scritto come prodotto di numeri primi fin qui noti. Ora il 2 non può essere un fattore di m perché dividendolo per 2 otteniamo come resto il numero 1; la stessa cosa vale per tutti gli altri numeri primi considerati 2, 3, 5, 7, … , *p*. Quindi m non si può fattorizzare mediante prodotto di numeri primi. Cosa che è assurda avendo supposto che m è un numero composto.
    La conclusione è che ci sono altri numeri primi oltre a quelli "proposti"e che quindi essi sono infiniti.
- Utilizzare un'altra relazione del tipo: $n^2-79n+1601$ per verificare la congettura.
- La relazione del tipo: an^2+bn+c, *con c* diverso da uno, può generare solo numeri primi?

Elementi di prove di verifica

1. *Stabilire quali delle seguenti affermazioni è vera*:
   a) Esiste una formula generatrice di tutti i numeri primi
   b) Esistono formule generatrici di numeri primi
   c) La formula n^2-n+c, con $n \in N_+$ e $c \in N_+$ genera solo numeri primi
   d) La formula n^2-n+c, con $n \in N_+$ e $c \in N_+$ genera solo numeri composti
   e) La formula n^2+n-c, con $n \in N_+$ e $c \in N$ genera solo numeri primi

2. *Indicare quali sono i primi tre numeri generati dal polinomio* $P(n)=n^2-n+5$:
   a) 5; 7; 15
   b) 5; 7; 11
   c) 5; 9; 11
   d) 7; 9; 13
   e) 9; 13; 15

3. *Indicare quale sarà il primo numero composto nella formula* $P(n)=n^2-n+41$:
   a) Il trentanovesimo termine
   b) Il quarantesimo termine
   c) Il quarantunesimo termine
   d) Il quarantaduesimo termine
   e) Non è possibile dare una risposta

4. *Indicare quale sarà il primo numero composto nella formula* $P(n)=n^2-n+7$:
   a) Il secondo termine
   b) Il terzo termine
   c) Il quarto termine
   d) Il quinto termine
   e) Il sesto termine

5. *Per n=c il polinomio* $P(n)=n^2-n+c$ *è uguale a:*
   a) c^2

b) *2c*
c) *2c+1*
d) *c*
e) *c-1*

6. *Per n=(c-1) il polinomio* $P(n)=n^2-n+c$ *è uguale a:*
a) $c^2 -2c+2$
b) $c^2 +2$
c) $c^2 -2c$
d) $c^2 +2c$
e) c^2

7. *Per n=(c+1) il polinomio* $P(n)=n^2-n+c$ *è uguale a:*
a) $c^2 -2c+2$
b) $c^2 +2$
c) $c^2 -2c$
d) $c^2 +2c$
e) c^2

Tabella dei numeri primi fino a 10007

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151
1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223
1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451
1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583
1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811
1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889
1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053
2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129
2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287
2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357
2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423

2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531
2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609	2617
2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741
2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819
2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999
3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257
3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331
3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511
3517	3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571
3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727
3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821
3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989
4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057
4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231
4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289	4297
4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493
4507	4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583
4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751
4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831
4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937
4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003
5009	5011	5021	5023	5039	5051	5059	5077	5081	5087
5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171	5179
5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279
5281	5297	5303	5309	5323	5333	5347	5351	5381	5387
5393	5399	5407	5413	5417	5419	5431	5437	5441	5443
5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507	5519	5521
5527	5531	5557	5563	5569	5573	5581	5591	5623	5639
5641	5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693
5701	5711	5717	5737	5741	5743	5749	5779	5783	5791
5801	5807	5813	5821	5827	5839	5843	5849	5851	5857
5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053
6067	6073	6079	6089	6091	6101	6113	6121	6131	6133
6143	6151	6163	6173	6197	6199	6203	6211	6217	6221
6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299	6301
6311	6317	6323	6329	6337	6343	6353	6359	6361	6367
6373	6379	6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473
6481	6491	6521	6529	6547	6551	6553	6563	6569	6571
6577	6581	6599	6607	6619	6637	6653	6659	6661	6673
6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761
6763	6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833
6841	6857	6863	6869	6871	6883	6899	6907	6911	6917
6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977	6983	6991	6997
7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103
7109	7121	7127	7129	7151	7159	7177	7187	7193	7207
7211	7213	7219	7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297
7307	7309	7321	7331	7333	7349	7351	7369	7393	7411
7417	7433	7451	7457	7459	7477	7481	7487	7489	7499
7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561
7573	7577	7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643
7649	7669	7673	7681	7687	7691	7699	7703	7717	7723
7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817	7823	7829

7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919
7927	7933	7937	7949	7951	7963	7993	8009	8011	8017
8039	8053	8059	8069	8081	8087	8089	8093	8101	8111
8117	8123	8147	8161	8167	8171	8179	8191	8209	8219
8221	8231	8233	8237	8243	8263	8269	8273	8287	8291
8293	8297	8311	8317	8329	8353	8363	8369	8377	8387
8389	8419	8423	8429	8431	8443	8447	8461	8467	8501
8513	8521	8527	8537	8539	8543	8563	8573	8581	8597
8599	8609	8623	8627	8629	8641	8647	8663	8669	8677
8681	8689	8693	8699	8707	8713	8719	8731	8737	8741
8747	8753	8761	8779	8783	8803	8807	8819	8821	8831
8837	8839	8849	8861	8863	8867	8887	8893	8923	8929
8933	8941	8951	8963	8969	8971	8999	9001	9007	9011
9013	9029	9041	9043	9049	9059	9067	9091	9103	9109
9127	9133	9137	9151	9157	9161	9173	9181	9187	9199
9203	9209	9221	9227	9239	9241	9257	9277	9281	9283
9293	9311	9319	9323	9337	9341	9343	9349	9371	9377
9391	9397	9403	9413	9419	9421	9431	9433	9437	9439
9461	9463	9467	9473	9479	9491	9497	9511	9521	9533
9539	9547	9551	9587	9601	9613	9619	9623	9629	9631
9643	9649	9661	9677	9679	9689	9697	9719	9721	9733
9739	9743	9749	9767	9769	9781	9787	9791	9803	9811
9817	9829	9833	9839	9851	9857	9859	9871	9883	9887
9901	9907	9923	9929	9931	9941	9949	9967	9973	10007