La moneta è truccata!

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare criticamente le informazioni. Selezionare, produrre ed usare appropriate distribuzioni grafiche.	Il ragionamento induttivo e le basi dell'inferenza. Produrre grafici di relazioni.	Risolvere e porsi problemi Dati e previsioni Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	

Contesto
Statistica.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito della vita sociale cercando di dare indicazioni di consapevolezza critica verso il mondo circostante.
Giochi di sorte. Si propone alla classe un semplice problema che implica la necessità di una (forse prima) riflessione circa il modo di verificare se una congettura, o una ipotesi, è vera oppure è falsa.
"Si gioca a Testa e Croce con una moneta di cui non si conosce la provenienza...magari per farci delle scommesse. Prima di fare delle puntate, si vorrebbe sapere, con una certa attendibilità, se essa è equilibrata o meno, cioè se si può attribuire la stessa probabilità alle 2 facce, Testa o Croce, cioè se $P(T)=P(C)=1/2$ "

Descrizione dell'attività
Si propone inizialmente agli studenti di riflettere sul fatto che non sempre, quando sono di fronte a due eventi alternativi, devono pensare che tali eventi abbiano la stessa probabilità di verificarsi. Ciò perché in modo spontaneo, ma non sempre corrispondente alla realtà, gli studenti, messi a confronto con le prime considerazioni probabilistiche, sono portati a considerare equilibrata qualsiasi moneta, e quindi, ad attribuire la stessa probabilità alle due facce.
Per rendere più evidente la cosa facciamo notare che è senz'altro corretto attribuire un alto grado di fiducia, o "verità" a questa congettura, se ci troviamo fra le mani una moneta coniata dalla Zecca di Stato, mentre non sappiamo cosa si può dire se fra le mani ci è capitata una vecchia moneta o se, chi ci propone di usarla per il gioco, sia qualcuno che sospettiamo abbia truccato la moneta, ad esempio, in modo da far venire *mediamente* più Teste che Croci.
Un'altra possibile osservazione, che viene spontanea in classe, è sul significato di frequenza dell'evento: si può ragionevolmente ritenere che, anche se una moneta è equilibrata, in una serie limitata di osservazioni, ciò porti esattamente ad ottenere il 50% di Teste e 50% di Croci?
Prima conclusione che si raggiunge dalla discussione: un numero non molto grande di lanci può non essere sufficiente a scoprire, anche con monete equilibrate, se è attendibile l'ipotesi di equiprobabilità.

Ma vediamo cosa succede se facciamo crescere il numero di prove.
Un modo per “risolvere” il problema dato può essere chiamato “metodo empirico”, e risulta particolarmente significativo per la sua valenza didattica.

“Metodo Empirico”
Per creare le premesse per il ragionamento induttivo, si propone ai ragazzi di usare una moneta di uso corrente, ad esempio da 2 Euro, per fare un numero di prove sempre più elevato ed osservare cosa succede della frequenza relativa di successo, ad esempio di Testa, costruendo il grafico che esprime l'andamento delle frequenze relative di successi F_i/N all'aumentare delle prove.
Sarà utile, infine, chiedersi se lo scostamento fra le Frequenze relative osservate, al variare del numero dei lanci, è lontano, in modo significativo da $p = ½$. Se ciò avviene diremo che la moneta è truccata.

1) Si invitano gli studenti a costruire una tabella delle osservazioni (*Tabella 1*), ripetendo più volte il lancio della stessa moneta. Si possono far fare, ad esempio, 60 lanci a ciascuno dei 20 studenti e poi raggruppare in un'unica tabella i dati ottenuti. Nella tabella che segue, dopo aver chiamato con N il numero complessivo dei lanci e con F_i e con F_i/N rispettivamente la frequenza cumulata e la frequenza cumulata relativa, si sono indicati gli estremi dell'intervallo con $p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1{,}5}{\sqrt{N}}$. E' noto infatti che tale intervallo comprende statisticamente più del 99% dei dati e che il centro di tale intervallo è la probabilità p richiesta. Diventa particolarmente significativo osservare dalla Tabella 1 la differenza fra la frequenza ottenuta F_i/N e la probabilità teorica indicata con p nell'ultima colonna.

Lanci complessivi	Freq. Cumulate	Frequenza relativa	Min	Max	Probabilità
N	F_i	F_i/N	$p - 1{,}5/\sqrt{N}$	$p + 1{,}5/\sqrt{N}$	p
60	31	0,52	0,39	0,61	0,5
120	65	0,54	0,42	0,58	0,5
180	98	0,54	0,44	0,56	0,5
240	121	0,50	0,45	0,55	0,5
300	151	0,50	0,45	0,55	0,5
360	183	0,51	0,46	0,54	0,5
420	216	0,51	0,46	0,54	0,5
480	246	0,51	0,46	0,54	0,5
540	271	0,50	0,47	0,53	0,5
600	301	0,50	0,47	0,53	0,5
660	331	0,50	0,47	0,53	0,5
720	367	0,51	0,47	0,53	0,5
780	400	0,51	0,47	0,53	0,5
840	430	0,51	0,47	0,53	0,5
900	460	0,51	0,47	0,53	0,5
960	489	0,51	0,47	0,53	0,5
1020	526	0,52	0,48	0,52	0,5
1080	561	0,52	0,48	0,52	0,5
1140	591	0,52	0,48	0,52	0,5
1200	619	0,52	0,48	0,52	0,5

Tabella 1

Si riportano i dati in un grafico su un foglio elettronico per vedere se la frequenza relativa si stringe attorno alla probabilità 0,5 in caso di moneta equilibrata.

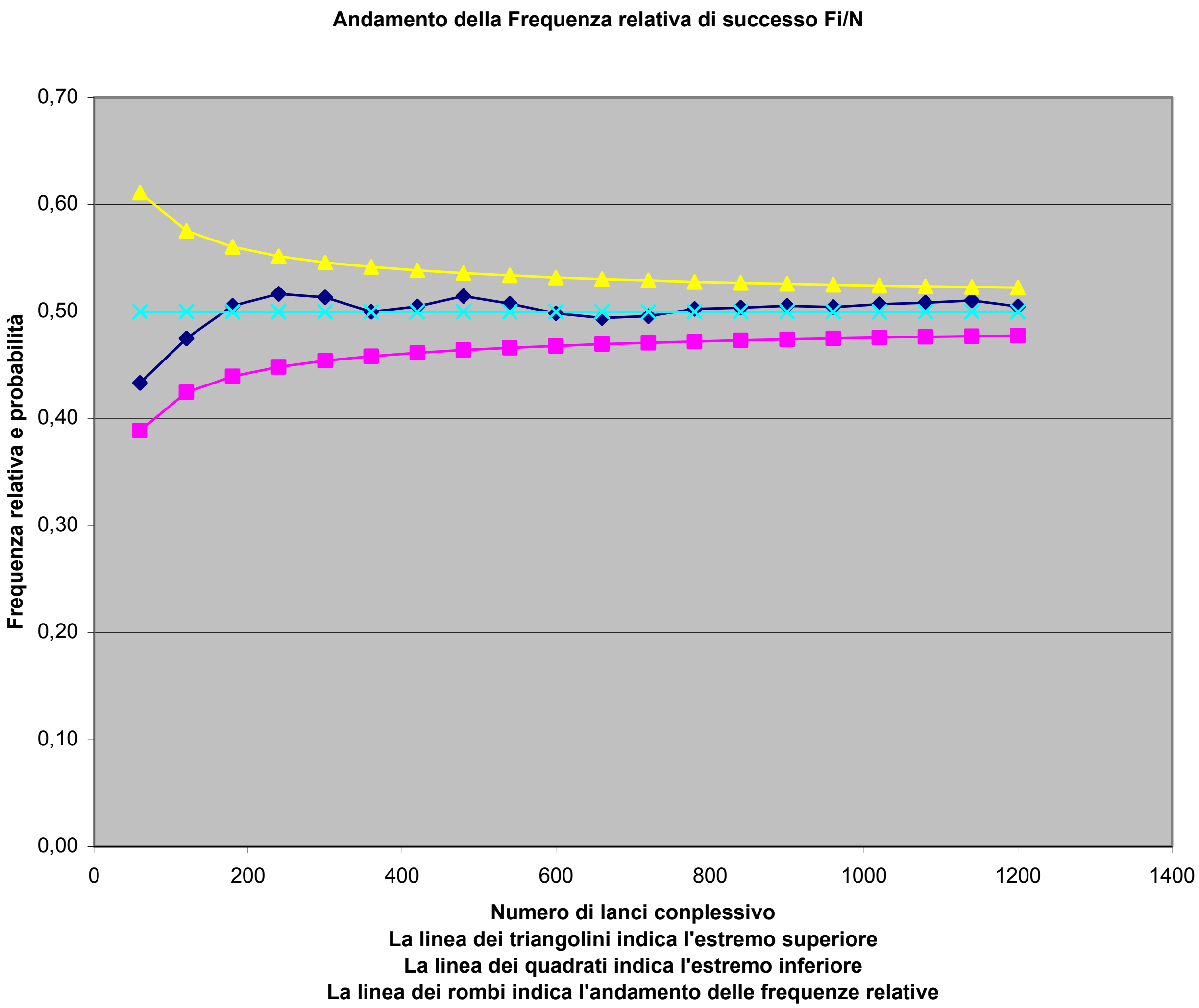

Figura 1

La verifica empirica è simulata, con i limiti dipendenti dalla non perfetta casualità della funzione di Excel usata, sul foglio elettronico allegato: **Lancio_moneta_TCA**
(Per attivare la simulazione è sufficiente inserire un qualsiasi dato nella casella gialla e premere invio). E' anche possibile effettuare la verifica realmente in classe, usando lo stesso foglio e inserendo manualmente i risultati del lancio di 60 monete e il numero dei successi ottenuti da ciascuno dei venti studenti, sostituendo così la funzione casuale che si presenta nella seconda colonna.
Il grafico mostra la convergenza "empirica" della frequenza relativa *Fi/N* dei successi alla probabilità *p*, attraverso il cosiddetto "grafico ad imbuto" che evidenzia come questa approssimazione migliori all'aumentare di N .
Osservazione: come è noto, per un certo valore di *N*, la distribuzione di *Fi/N* ha media *p* e varianza *p(1-p)/N*. Si può perciò delimitare una banda di oscillazione attorno a *p* = 0,5, visualizzata dal grafico ad imbuto, che rappresenta il valore atteso minimo e massimo delle frequenze relative. Le bande hanno ampiezza $3\cdot\sqrt{p(1-p)/N}$ rispetto a *p* e contengono circa il 99,7% dei casi. Al cumularsi dei lanci, cioè al crescere di *N*, si vede come la frequenza relativa dei successi tende a stare nel grafico ad imbuto e ad avvicinarsi a *p*.

Osservazione (qualitativa): all'aumentare del numero di prove, aumenta la probabilità che la frequenza empirica si avvicini al valore teorico $p = 0,5$ e, quindi, aumenta la fiducia che *Fi/N* sia una "buona" stima della vera probabilità.
Naturalmente, nel caso si operi con una moneta equilibrata, si osserva che ciò è solo una verifica empirica di quanto già si sapeva: che la frequenza relativa stima bene la probabilità, al crescere di *N*.
Ma in una serie non numerosa di osservazioni, può accadere che la stima sia "lontana" da 0,5, anche in una moneta equilibrata.
Come possiamo, perciò, operando all'inverso, valutare l'attendibilità di tale congettura se non abbiamo una forte informazione iniziale sulla moneta?
Ipotesi nulla: La moneta è equilibrata $p = 0,5$
Ipotesi alternativa: La moneta non è equilibrata $p \neq 0,5$
Possiamo operare in questo modo:
Costruiamo un criterio di decisione (o Test statistico) basato sulla distribuzione Normale standardizzata dello stimatore della *Fi/N*

$$z = \frac{\frac{Fi}{N} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}}$$

Tale variabile, nel caso in cui la moneta sia equilibrata, si distribuisce come una variabile casuale Normale standardizzata (0,1), di cui si dispone delle necessarie tavole numeriche.
Il procedimento per decidere è il seguente:

Si decide di effettuare un numero di lanci "abbastanza grande": per la ragione appena esposte la frequenza relativa tende alla probabilità p (ad es. si possono fare $N = 100$ lanci).
Si sceglie un grado di attendibilità funzionale alla decisione che vogliamo prendere; se, ad es. fissiamo una attendibilità del 95%, vuol dire che, nel caso la moneta sia equilibrata, siamo pronti ad accettare una probabilità di sbagliare il giudizio, a causa del campionamento, del 5%.
Si determina empiricamente il valore di *Fi /N* nel caso esaminato.
Si determina il valore di z, se p=0,5 e N=100.
Si osserva se z cade nell'intervallo standardizzato (−1,96 , +1,96); è noto che tale intervallo contiene il 95% circa dei valori di z, nell'ipotesi che p= 0,5 e N=100.
In conclusione:
si accetta l'ipotesi di moneta equilibrata se z è compreso nell'intervallo considerato;
si conclude, invece, che la moneta è truccata se z cade fuori dell'intervallo considerato.

Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*Tabella 2*). I simboli α e β indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata in presenza di ipotesi nulla e in presenza di ipotesi alternativa. Il grado di attendibilità $1 - \alpha = 0,95$ è stato fissato preliminarmente e così pure, ovviamente, $\alpha = 0,05$, che rappresenta la probabilità di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi nulla. Rimane indeterminata la probabilità β di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi alternativa.

Regola di decisione	***Situazione effettiva***	
	Ipotesi nulla (moneta equilibrata) $p = \frac{1}{2}$	Ipotesi alternativa (moneta non equilibrata) $p \neq \frac{1}{2}$
z cade nell'intervallo $(-1{,}96, +1{,}96)$: si accetta l'ipotesi nulla	Decisione corretta $1 - \alpha = 0{,}95$	Decisione errata β
z cade fuori dell'intervallo $(-1{,}96, +1{,}96)$: si accetta l'ipotesi alternativa	Decisione errata $\alpha = 0{,}05$	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 2