

## Condizione necessaria ma non sufficiente

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. Usare linguaggi simbolici dell'algebra. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture mediante contro esempi.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Calcolo aritmetico e letterale. Semplici dimostrazioni. Tabelle e grafici. Funzioni essenziali del foglio elettronico.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare</u>  Numeri e algoritmi  Dati e previsioni  Laboratorio di matematica	

### Contesto

Aritmetica: numeri primi.

Questa attività può essere introdotta nel primo anno del primo biennio, quando gli studenti sanno sia calcolare il valore di un'espressione numerica e semplificare una semplice espressione letterale, sia utilizzare il foglio elettronico per velocizzare la verifica della congettura descritta o per ricercare contro-esempi.

L'attività proposta - caratterizzata dalla problematicità della situazione (verifica dell'affermazione) e dall'implementazione nel foglio elettronico della stessa - permette agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di affinare uno spirito critico in seno alle forme di ragionamento e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.

Nell'attività sono prese in considerazione espressioni semplici, verificabili algebricamente, in modo da comprendere l'affermazione: Condizione necessaria ma non sufficiente.

### Descrizione dell'attività

Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata alla semplificazione di semplici espressioni algebriche corrispondenti alle affermazioni presentate e si conclude con l'implementazione delle stesse in ambiente macchina. Quest'ultimo aspetto risulta necessario sia alla verifica delle affermazioni, sia allo sviluppo e al consolidamento del pensiero logico-deduttivo che maggiormente contraddistingue il "fare matematico".

All'attività sono legate l'acquisizione di varie abilità, ma soprattutto l'attenzione nella lettura e comprensione di enunciati matematici e la scoperta di aspetti interessanti legati agli insiemi numerici. E' utilizzata la *metodologia dell'apprendistato cognitivo*<sup>1</sup> intesa come imitazione, da parte dello studente, delle strategie e dei processi attivati dall'insegnante o da altri studenti per risolvere situazioni problematiche o per evitare le difficoltà nell'affrontare i problemi.

L'attività può essere presentata autonomamente o, meglio, inserita in un percorso più articolato che utilizza le altre unità: Quel che vedo è sempre vero, Non è vero che è sempre vero e Sarà vero ma non ci credo.

<sup>1</sup> Vedi Indicazioni metodologiche.

### Prima fase

L'attività viene proposta in aula quando gli studenti sono in grado di calcolare il valore di un'espressione numerica.

- L'insegnante enuncia agli studenti le seguenti affermazioni:
  - ✓ “Ogni numero primo  $p$  si può scrivere nella forma  $p=n^2+1$ ”, con  $n$  elemento di  $R$ .
  - ✓ “Ogni numero  $n^2+1$  è un numero primo  $p$ ”, con  $n$  elemento di  $R$ .
- L'insegnante invita gli studenti, riuniti in gruppi, a verificare con esempi numerici (anche con utilizzo di una calcolatrice) tale asserzione e a ricercare eventuali eccezioni mediante riscontro mediante riscontro su una tabella come quella riportata alla fine dell'attività 4 (*Non è vero che è sempre vero*), che si trova facilmente in rete cliccando su ‘prime numbers’ con un qualsiasi motore di ricerca.
- L'insegnante evidenzia come il computer e in particolare l'uso del foglio elettronico può velocizzare il lavoro e aumentare il numero delle esplorazioni, anche con numeri più grandi.

### Seconda fase

L'attività viene proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado di utilizzare il computer e di implementare le specifiche istruzioni nel foglio elettronico.

- L'insegnante descrive le istruzioni necessarie a far eseguire automaticamente le operazioni in modo da verificare l'affermazione: *Ogni numero primo  $p$  si può scrivere nella forma  $p=n^2+1$* , e a ricercare eventuali controverifiche della congettura.
- L'insegnante rileva la banalità della ricerca e quindi, per rendere più interessante l'esplorazione, li invita a operare nell'insieme  $N$  osservando come talune proprietà hanno diversa validità a seconda dell'insieme in cui opera.

p	n	Esito di p	Esito cong.
186	13,60147	COMPOSTO	
187	13,63818	COMPOSTO	
188	13,67479	COMPOSTO	
189	13,71131	COMPOSTO	
190	13,74773	COMPOSTO	
191	13,78405	PRIMO	
192	13,82027	COMPOSTO	
193	13,85641	PRIMO	
194	13,89244	COMPOSTO	
195	13,92839	COMPOSTO	
196	13,96424	COMPOSTO	
197	14	PRIMO	Positivo
198	14,03567	COMPOSTO	
199	14,07125	PRIMO	
200	14,10674	COMPOSTO	
201	14,14214	COMPOSTO	
202	14,17745	COMPOSTO	
203	14,21267	COMPOSTO	
204	14,24781	COMPOSTO	
205	14,28286	COMPOSTO	
206	14,31782	COMPOSTO	
207	14,3527	COMPOSTO	
208	14,38749	COMPOSTO	

Condizione necessaria ma non sufficiente:  
 $p=n^2+1$

Figura 1

- L'insegnante invita gli studenti a verificare anche l'altra asserzione, ossia: “Ogni numero  $n^2+1$  è un numero primo  $p$ ”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														

  

n	$n^2+1$	Esito di $n^2+1$	Esito cong.
1	2	PRIMO	Positivo
2	5	PRIMO	Positivo
3	10	COMPOSTO	
4	17	PRIMO	Positivo
5	26	COMPOSTO	
6	37	PRIMO	Positivo
7	50	COMPOSTO	
8	65	COMPOSTO	
9	82	COMPOSTO	
10	101	PRIMO	Positivo
11	122	COMPOSTO	
12	145	COMPOSTO	
13	170	COMPOSTO	
14	197	PRIMO	Positivo
15	226	COMPOSTO	
16	257	PRIMO	Positivo
17	290	COMPOSTO	
18	325	---non dispon.---	
19	362	---non dispon.---	
20	401	---non dispon.---	
21	442	---non dispon.---	
22	485	---non dispon.---	
23	530	---non dispon.---	

Condizione necessaria ma non sufficiente:  
 $n^2+1=p$

Figura 2

- L'insegnante stimola gli studenti a commentare gli aspetti semantici e logici del costrutto: Condizione necessaria ma non sufficiente ed eventualmente Condizione necessaria e sufficiente.

### Possibili sviluppi

- Per consolidare l'esperienza l'insegnante prospetta agli studenti di verificare altre affermazioni:
 

Teoremi di aritmetica

  - La somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per due – non è vero che ogni numero divisibile per due è somma di due numeri dispari consecutivi.
  - Un numero è primo se ha due divisori – non è vero che ogni numero che ha due divisori è primo.
  - Un numero è primo se ha soltanto due divisori, uno e se stesso – è anche vero che qualunque numero che ha soltanto due divisori, uno e se stesso, è primo.
  - Un numero è composto se ha più di due divisori – è anche vero che qualunque numero che ha più di due divisori, è composto.

Teoremi di geometria

  - Ogni quadrato è un rettangolo – non è vero che ogni rettangolo è un quadrato.
  - In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti – è vero che un triangolo avente gli angoli alla base congruenti è isoscele.
  - Due rette parallele tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti – è vero che due rette tagliate da una trasversale formano due angoli alterni interni congruenti sono parallele.

### Elementi di prove di verifica

1. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è vera:
  - a) La formula  $p=n^2+1$  genera tutti i numeri primi
  - b) La formula  $p=n^2+1$  non genera numeri primi
  - c) La formula  $p=n^2+1$  genera numeri primi solo per  $n$  dispari
  - d) La formula  $p=n^2+1$  genera numeri primi solo per  $n$  pari

e) Nessuna delle precedenti

2. *Il numero generato dalla formula  $p=n^2 + 1$  per  $n=12$ :*

- a) È dispari ed è primo
- b) È pari ed è primo
- c) È dispari ed è il prodotto di 5 numeri primi
- d) È dispari ed è il prodotto di 3 numeri primi
- e) È dispari ed è il prodotto di 2 numeri primi

3. *Il primo numero “non primo” generato dalla formula  $p=n^2 + 1$  è:*

- a) 10                      b) 15                      c) 26                      d) 45                      e) 33

4. *Condizione sufficiente affinché un triangolo sia isoscele è che sia un triangolo equilatero.*

- a) L'affermazione è sempre vera
- b) L'affermazione è vera solo per alcuni triangoli isosceli
- c) L'affermazione è sempre falsa
- d) Non si può esprimere un giudizio in merito
- e) Nessuna risposta è esatta

5. *Per conseguire la patente in Italia è necessario essere maggiorenni.*

- a) L'affermazione è vera ed è sufficiente
- b) L'affermazione è vera ma non è sufficiente
- c) L'affermazione è sempre falsa
- d) Non si può esprimere un giudizio in merito
- e) Nessuna risposta è esatta