

## Solidi e volumi

### Percorso: Il problema della misura

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolare perimetri e aree di poligoni. Calcolare valori approssimati di $\pi$ Calcolare aree e volumi di solidi	Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. Lunghezze e aree dei poligoni. Esempi di grandezze incommensurabili. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Il numero $\pi$ . Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi. Approssimazione dell'area sottesa da un grafico.	Spazio e figure       Relazioni e funzioni	Fisica Disegno Storia dell'arte

### Contesto

#### Volumi

Questa attività viene proposta all'inizio del quinto anno e consolida alcune conoscenze e abilità già introdotte relativamente alla misura di superfici e volumi di solidi notevoli come la piramide e la sfera. Si confrontano diversi metodi visti negli anni precedenti, applicando il metodo di esaustione di Archimede già utilizzato per il calcolo dell'area del cerchio e di quella sottesa da un segmento parabolico.

### Descrizione dell'attività

Gli strumenti di cui avvalersi come supporto all'attività didattica sono modelli fisici dei solidi, un software di geometria e un software di manipolazione simbolica.

Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata dei metodi per il calcolo di aree e volumi e della nozione di successione.

#### Prima fase

Consideriamo una sfera di raggio unitario e la sezioniamo in due parti con un piano  $\alpha$  passante per il suo centro e consideriamo una delle due semisfere. Sezioniamo ora la semisfera con dei piani paralleli al piano  $\alpha$  (Figura 1), e inscriviamo in essa dei cilindri di altezza costante.

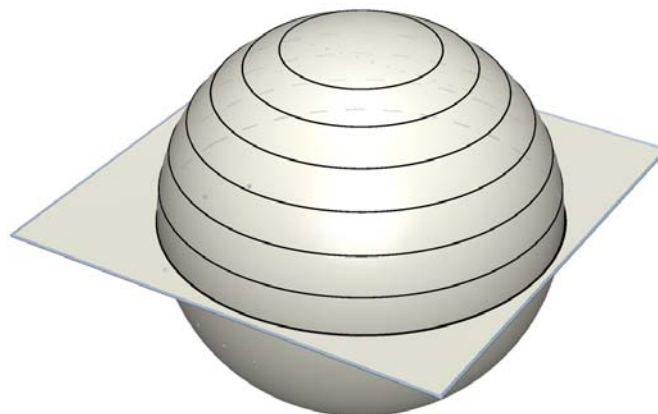


Figura 1

Per esempio possiamo dividere il raggio in dieci parti uguali (vedi Figura 2, nella quale si rappresenta la sezione mediana della semisfera di raggio unitario).

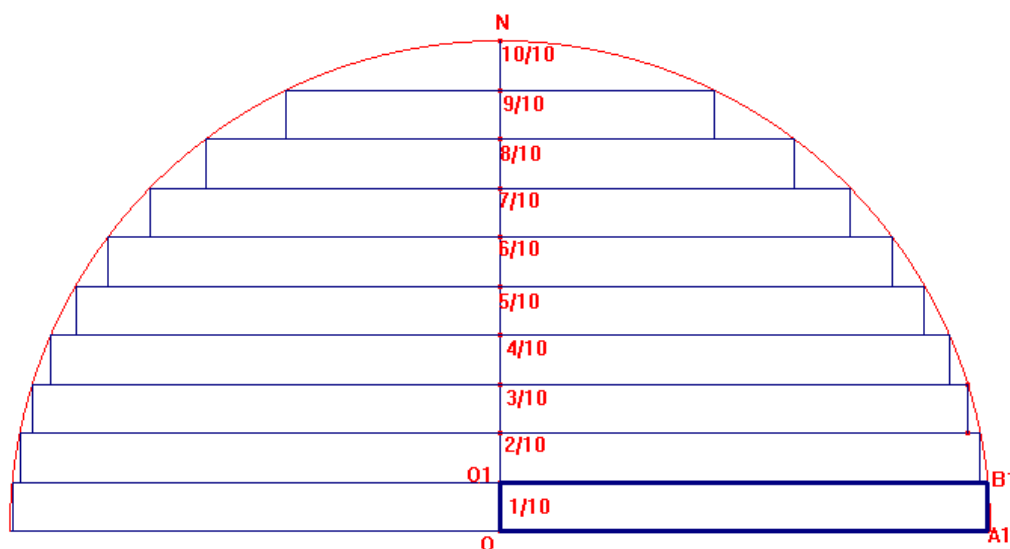


Figura 2

Per calcolare il volume dei cilindri inscritti dobbiamo preliminarmente determinare i raggi di base dei cilindri inscritti nella semisfera. Per risolvere questo problema ci aiutiamo con la costruzione della sezione mediana dei cilindri inscritti nella sfera. Ogni cilindro è generato dalla rotazione di un rettangolo attorno all'asse ON (Figura 2). Consideriamo ora un ingrandimento del rettangolo  $OA_1B_1O_1$  (Figura 2; Figura 3) che, con la sua rotazione attorno all'asse ON, genera il primo cilindro.

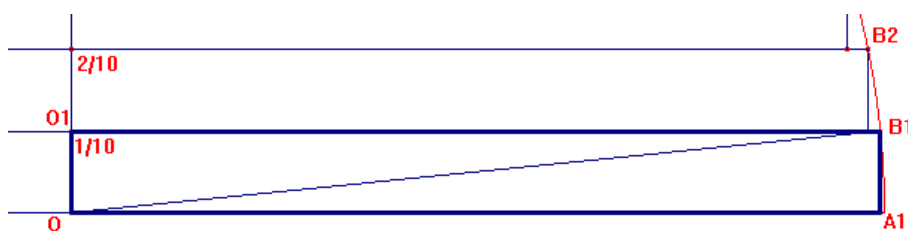


Figura 3

Il raggio  $r_1$  è uguale al segmento  $OA_1$  e per determinarlo applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo  $OA_1B_1$ ; si ha quindi:

$$r_1^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1.$$

Per determinare il raggio di base  $r_2$  del secondo cilindro (Figura 4) si applica lo stesso procedimento al triangolo  $OA_2B_2$ ; si ottiene

$$r_2^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 1$$

e così via.

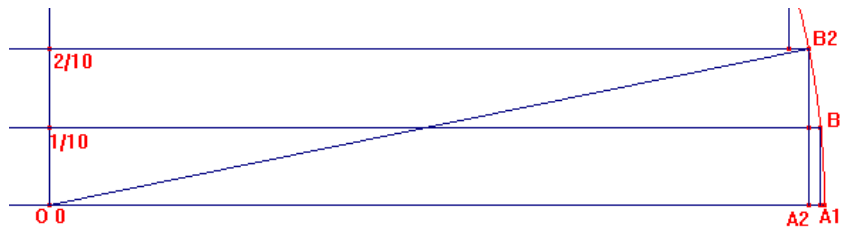


Figura 4

Chiamiamo  $V_n$  la somma dei volumi dei cilindri. Otteniamo, dopo aver espresso il raggio in funzione degli altri termini e calcolato la somma dei volumi dei cilindri, la seguente relazione:

$$V_n = \pi \left( 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2 \right) \frac{1}{10} + \pi \left( 1 - \left(\frac{2}{10}\right)^2 \right) \frac{1}{10} + \dots + \pi \left( 1 - \left(\frac{10}{10}\right)^2 \right) \frac{1}{10}$$

Generalizzando, supposto di dividere il raggio unitario in  $n$  parti uguali, otteniamo:

$$V_n = \pi \left( 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right) \frac{1}{n} + \pi \left( 1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \right) \frac{1}{n} + \dots + \pi \left( 1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) \frac{1}{n}$$

da cui:

$$V_n = \frac{\pi}{n} \left[ \left( 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right) + \left( 1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \right) + \dots + \left( 1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) \right].$$

Per valutare quest'ultima somma, si riordinano opportunamente i termini; otteniamo la seguente relazione:

$$V_n = \pi - \pi \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right].$$

Per valutare il valore dell'espressione (indicata tra parentesi quadre):

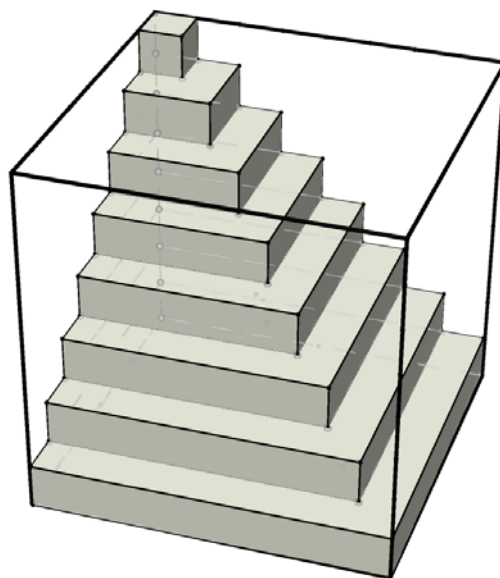
$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

all'aumentare di  $n$ , possiamo interpretarla geometricamente:

- il primo termine  $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$  è uguale al volume di un cubo di spigolo  $1/n$ ;
- il secondo termine  $\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$  è uguale al volume un parallelepipedo rettangolo che ha per base un quadrato di lato  $2/n$  e altezza  $1/n$ ;
- ...
- il termine  $(n-1)$ -esimo è uguale al volume di un parallelepipedo di base un quadrato di lato  $(n-1)/n$  e altezza  $1/n$ ;

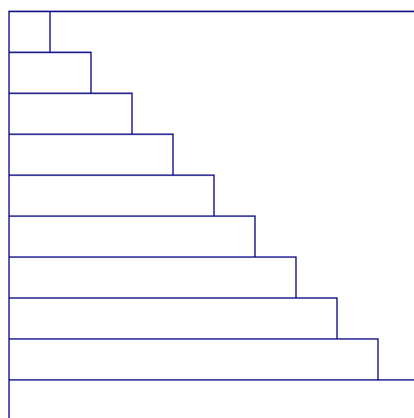
- l'ultimo termine  $\left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$  è uguale al volume di un parallelepipedo che ha per base il quadrato unitario e per altezza  $1/n$ .

Possiamo ora rappresentare graficamente questi parallelepipedo e “sistemarli” uno sopra l'altro come indicato in Figura 5: otteniamo uno “scaloide”.



*Figura 5*

Una sezione è data dal seguente disegno (Figura 6).



*Figura 6*

Al crescere di  $n$  la figura precedente si avvicina alla Figura 7, cioè alla metà di un quadrato che, ovviamente, ha area  $\frac{1}{2}$  essendo il quadrato di lato unitario.

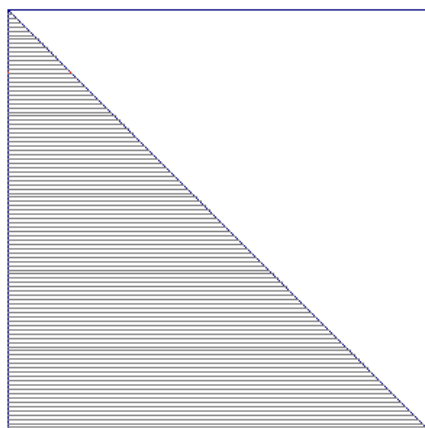


Figura 7

In modo analogo, la figura tridimensionale detta “scaloide”, di cui la Figura 6 rappresenta una sezione, si avvicina a una piramide con base un quadrato di lato 1 e altezza pari a 1.

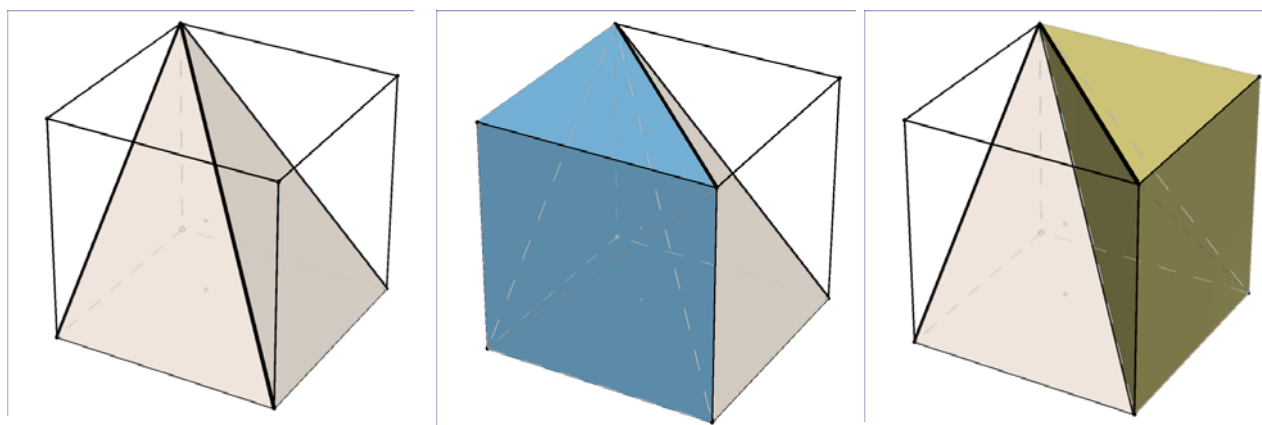


Figura 8

Poiché un cubo si può scomporre in tre piramidi tra loro equivalenti (Figura 8), il volume dello scaloide si avvicina, al crescere di  $n$ , a  $\frac{1}{3}$  e quindi  $V_n$ , che rappresenta un valore approssimato del volume della semisfera, tende a

$$V_{\text{semisfera}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Quindi il volume della sfera di raggio unitario è  $V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3}\pi$ .

Il metodo proposto è sostanzialmente una riformulazione, “per via algebrica”, di quello di esaustione usato da Archimede.

E cosa possiamo dire se la sfera non ha raggio unitario?

Si può pensare alla sfera di raggio  $r$  come l’ingrandimento tramite un’omotetia rispetto al centro della sfera unitaria e di rapporto  $r$ . Poiché il rapporto tra i volumi di figure nello spazio che si corrispondono tramite un’omotetia di rapporto  $r$  è uguale a  $r^3$ , si ottiene che il volume della sfera di raggio  $r$  è:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

### Possibili sviluppi

1. Dal volume della sfera all'area della superficie sferica.

Per misurare la superficie  $S$  della sfera sfruttiamo l'idea di “trasformare la superficie  $S$  in un solido” (citato da Giovanni Prodi), dotandola di un piccolo spessore  $h$ . Precisamente, si considera il “guscio” sferico formato dai punti che hanno distanza non superiore a  $h$  dalla superficie sferica di raggio  $r$ .

In questo ragionamento, in qualche modo si considera più semplice e intuitiva l'idea di volume rispetto a quella di area e si procede in senso inverso rispetto a quello che normalmente si fa per altre figure solide.

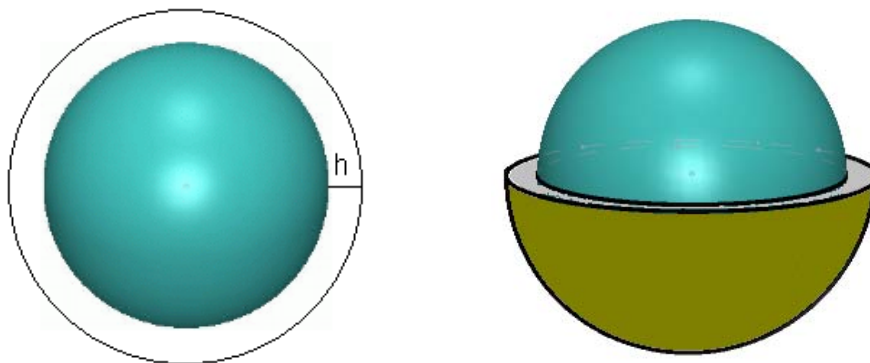


Figura 9

Indicando con  $W(h)$  il volume del “guscio” sferico (Figura 9), si ha che

$$W(h) = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Quest'ultima espressione può essere interpretata come l'incremento del volume della sfera di raggio  $r$  quando il raggio diventa  $r+h$ . Quindi, indicato con  $V(r)$  il volume della sfera di raggio  $r$ , possiamo anche scrivere:

$$W(h) = V(r+h) - V(r) = \Delta V.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo il volume del guscio sferico:

$$W(h) = 4\pi\left(r^2h + rh^2 + \frac{1}{3}h^3\right).$$

Possiamo quindi interpretare l'ultima formula trovata come l'espressione del volume di un solido equivalente a un cilindro di altezza  $h$  e superficie di base pari a

$$S_{base} = \frac{W(h)}{h} = \frac{4\pi\left(r^2h + rh^2 + \frac{1}{3}h^3\right)}{h} = 4\pi\left(r^2 + rh + \frac{1}{3}h^2\right).$$

Diminuendo  $h$  lo spessore del “guscio” diventa sempre più piccolo. Di conseguenza la misura della superficie  $S_{base}$ , data dall'espressione  $\frac{W(h)}{h}$ , si avvicina al valore della superficie sferica.

Ragionando sulla formula trovata precedentemente, si osserva che, al divenire di  $h$  sempre più piccolo,  $\frac{W(h)}{h}$  si avvicina a  $4\pi r^2$ . Quindi la superficie della sfera è  $S = 4\pi r^2$ .

2. Revisione del procedimento per determinare il volume della sfera usando il principio di Cavalieri e la cosiddetta *scodella di Galileo*.

3. Il procedimento di Archimede per determinare l'area della superficie sferica.

Si usa in questo caso il cilindro circoscritto alla sfera, con altezza uguale al diametro della sfera stessa (detto, con espressione imprecisa, cilindro “equilatero”).

## Da Platone a Escher: simmetrie e regolarità nello spazio

*Percorso: Geometria e arte*

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. Utilizzare le conoscenze della geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza. Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni	Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli. Simmetrie nei poliedri regolari. Posizioni reciproche di rette e piani nello spazio. Proprietà dei principali solidi geometrici.  Il metodo ipotetico-deduttivo. Enti primitivi e assiomi. Definizioni; teoremi e dimostrazioni.	Spazio e figure      Argomentare, congetturare, dimostrare	Storia dell'arte Disegno Architettura Scienze naturali Filosofia

### Contesto

Solidi platonici.

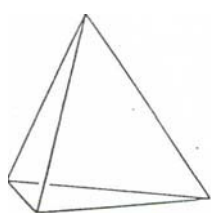
Il contesto dell'attività in cui si svolge l'analisi dei solidi platonici e dei poliedri è rappresentato dal mondo naturale, dalla produzione artistica e da quella architettonica.

### Descrizione dell'attività

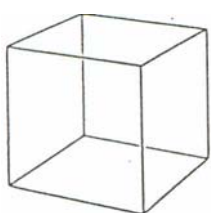
Il lavoro prevede l'osservazione di fotografie di opere d'arte, di monumenti e di immagini tratte dal mondo naturale in cui siano presenti poliedri. La selezione delle immagini che verranno utilizzate seguirà un criterio significativo sia dal punto di vista storico che geometrico. Prima di affrontare il lavoro è opportuno riprendere in esame le caratteristiche fondamentali dei poliedri e le loro simmetrie (Matematica 2003, Spazio e Figure, Simmetrie nei poliedri) al fine di riorganizzare le conoscenze e giustificarne le proprietà. Per affrontare questa attività lo studente può avvalersi di software di geometria e di strumenti per il disegno.

### Prima fase

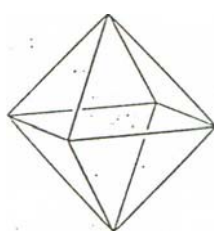
L'insegnante illustra l'attività prevista e riesamina con gli studenti, avvalendosi di modelli tridimensionali o di immagini o con l'ausilio di opportuni software, i poliedri e, in particolare quelli regolari (Figura 1).



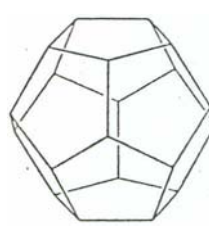
Tetraedro  
regolare



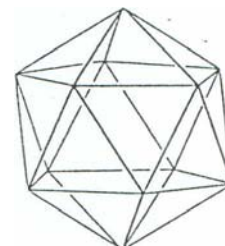
Cubo



Ottaedro regolare



Dodecaedro  
regolare



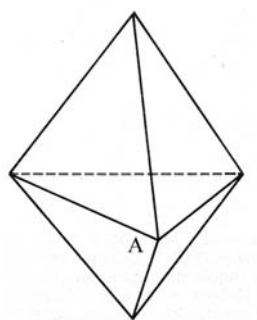
Icosaedro  
regolare

*Figura 1*

Il docente fa osservare alcune loro proprietà:

- le facce sono poligoni regolari tra loro isometrici;
- ogni spigolo è comune a due facce; i diedri formati da due facce con uno spigolo in comune sono isometrici;
- ogni vertice è comune a tre o più facce concorrenti; gli angoloidi sono isometrici;
- il piano passante per una qualsiasi faccia del poliedro lascia tutto il poliedro dalla stessa parte;
- dato un poliedro regolare, i vertici stanno su una sfera.

L'insegnante deve far notare, se non emerge dalla discussione, che non è sufficiente per un poliedro avere tutte le facce costituite da poligoni regolari e uguali, per avere anche gli angoloidi uguali. Considerando, infatti, due tetraedri regolari con facce uguali, di cui due coincidenti, si ottiene un esaedro (Figura 2), le cui facce sono triangoli equilateri uguali, ma i cui angoloidi non sono tutti uguali: l'angoloide di vertice A (Figura 2) è, ad esempio, uguale al doppio degli angoloidi di un tetraedro regolare.

*Figura 2*

### Seconda fase

L'insegnante inquadra storicamente i solidi platonici.

Il primo documento che contiene riferimenti ai poliedri regolari risale a Platone. Sebbene Platone non abbia dato alcun contributo specifico alla matematica dal punto di vista strettamente tecnico, fu, tuttavia, al centro dell'attività matematica di quel tempo e guidò ed ispirò il suo sviluppo. Probabilmente il filosofo di Atene venne a conoscenza dei cinque solidi regolari in occasione di un incontro in Sicilia con Archita, un matematico della scuola pitagorica. A tale scuola si attribuisce la scoperta del cubo, del tetraedro e del dodecaedro regolari, mentre la scoperta dell'ottaedro e dell'icosaedro regolari viene fatta risalire al matematico e filosofo ateniese Teeteto (V - IV sec. a.C.).

I poliedri regolari sono passati alla storia sotto il nome di solidi platonici o poliedri regolari o corpi platonici. In Euclide è presente una loro trattazione approfondita; ad essi il matematico greco dedica il XIII libro degli *Elementi*, quello conclusivo, che costituisce il coronamento dell'opera.

Può essere anche interessante proporre agli studenti la lettura di alcuni passi del *Timeo*, nel quale Platone associa il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e l'icosaedro regolari rispettivamente a quelli che erano allora ritenuti i quattro elementi fondamentali: fuoco, aria, terra ed acqua. Il dodecaedro, non realizzabile unendo opportunamente triangoli - come invece avviene per gli altri poliedri regolari citati nella descrizione di Platone - veniva invece associato all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta "quintessenza" (Figura 3).





Figura 3

### Terza fase

L'insegnante sottolinea come spesso nel mondo naturale, nell'arte e nell'architettura si trovino spunti per lo studio dei solidi platonici.

Si propongono alcuni esempi significativi utili per stimolare riflessioni.

#### *- I poliedri in natura*

I solidi platonici sono presenti in natura sotto diverse forme. La struttura dei cristalli presenta infatti simmetrie e forme spesso riconducibili ai solidi platonici. Il docente può proporre le strutture di alcuni cristalli - quali ad esempio il salgemma, l'ossido di ferro e la pirite - invitando gli studenti a riconoscere in essi eventuali solidi platonici (cubo, ottaedro, dodecaedro regolari).

E' significativo presentare agli alunni la forma spaziale della molecola di carbonio  $C_{60}$ , scoperta nel 1985 da Harold Kroto, Robert F. Curl e Richard E. Smalley (detto *fullerene*), che presenta una struttura poliedrica e consente una riflessione su alcune proprietà (Figure 4.1 e 4.2).

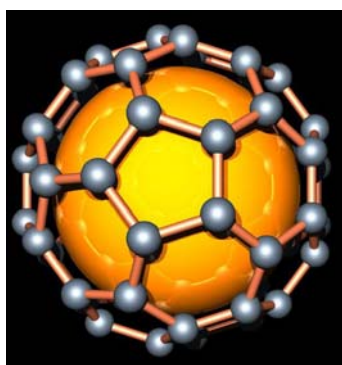


Figura 4.1

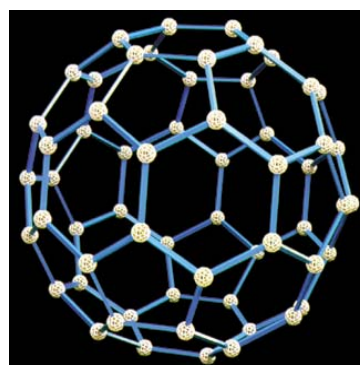


Figura 4.2

Altre analogie tra la natura e le forme poliedriche si riscontrano nelle forme biologiche (radiolari); in chimica dove, ad esempio, la molecola del metano ( $CH_4$ ) ha la forma di un tetraedro regolare.

#### *- I poliedri nell'arte*

Il periodo storico in cui si ebbe il maggiore utilizzo dei poliedri nell'arte fu il Rinascimento. La composizione di molte opere d'arte in quel periodo si basava su una figura pitagorica. L'insegnante propone agli studenti la lettura delle seguenti righe:

*“Multa sunt corpora lateribus constituta, quae in spherico corpore locari queunt, ita ut eorum anguli sperae superficiem omnes contingunt. Verum quinque ex eis tantummodo sunt regularia: hoc est, quae aequales bases habent et latera”*<sup>1</sup> (Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, 1480 ca.).

<sup>1</sup> “Sono molte le figure costituite di lati che si possono inscrivere nella sfera in modo che i loro angoli tocchino tutti la superficie della sfera. Tuttavia soltanto cinque di essi sono regolari, cioè quelli che hanno angoli e lati uguali”.

Il passo risulta particolarmente significativo in quanto afferma che i poliedri regolari sono solo cinque e induce ad una riflessione sulla validità di tale considerazione.

Si propone la discussione in classe e si predispone una tabella come quella di seguito riportata (Tabella 1), da compilare con l'ausilio degli studenti, nella quale vengono calcolati la somma degli angoli concorrenti nello stesso vertice in funzione della tipologia delle facce (poligoni regolari).

Facce (poligoni regolari)	Angoloide triedro	Angoloide tetraedro	Angoloide pentaedro	Angoloide esaedro
<b>Triangolo equilatero</b>	$3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$	$4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$	$5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$	$6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$
<b>Quadrato</b>	$3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$	$4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$	–	–
<b>Pentagono regolare</b>	$3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$	–	–	–
<b>Esagono regolare</b>	$3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$	–	–	–

Tabella 1

Durante la compilazione della tabella si farà osservare che quando si ottiene in una casella il valore di  $360^\circ$ , il valore stesso non sarà accettabile e le caselle successive risulteranno vuote in quanto la somma delle facce di un angoloide è sempre minore di un angolo giro.

Dalla tabella si ha una conferma che i poliedri regolari sono solo cinque, come ha dimostrato Euclide nell'ultima proposizione de *Gli Elementi* (libro XIII, proposizione 18):

*“Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette [i poliedri regolari], non può costruirsi nessun'altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali”.*

*Per il docente:* Il fatto che esistono solo cinque tipi di poliedri regolari può anche essere ricavato - in modo più astratto - dal teorema di Eulero (Matematica 2003, Spazio e Figure, Simmetrie nei poliedri):  $V + F = S + 2$ , dove  $F$ ,  $S$  e  $V$  indicano, rispettivamente, il numero delle facce, il numero degli spigoli e il numero dei vertici di un poliedro regolare. Per questo occorre osservare che per ottenere la superficie di un poliedro occorrono  $F$  poligoni regolari, ognuno con  $p$  lati ( $p$  = numero dei lati di ciascuna faccia di un poliedro regolare). Una volta ottenuto il poliedro, uno spigolo è sempre in comune a due facce del poliedro: pertanto  $2S = pF$ .

Pensiamo ora di costruire il poliedro a partire dai suoi spigoli. Se indichiamo con  $q$  il numero degli spigoli che concorrono in un vertice del poliedro e se pensiamo che ogni spigolo deve congiungere due vertici, allora si ha anche  $2S = qV$ . Si ottiene pertanto che  $F = 2S/p$  e  $V = 2S/q$ . Sostituendo i valori trovati di  $F$  e di  $V$  nella formula di Eulero, si ricava la formula  $S = \frac{2pq}{2(p+q)-pq}$  e le

analoghe  $F = \frac{4q}{2(p+q)-pq}$  e  $V = \frac{4p}{2(p+q)-pq}$ .

Il denominatore delle precedenti frazioni si può scrivere nella forma:  $4 - (p-2)(q-2)$ ; ne consegue che il prodotto  $(p-2)(q-2)$  deve essere un numero naturale minore di 4. I valori permessi per  $p$  e per  $q$  sono dunque quelli riportati nella Tabella 2.

$p$	$q$	$S$	$V$	$F$	Poliedro regolare
3	3	6	4	4	Tetraedro regolare
3	4	12	8	6	Cubo
4	3	12	6	8	Ottaedro regolare
5	3	30	20	12	Dodecaedro regolare
3	5	30	12	20	Icosaedro regolare

Tabella 2

Si mostrano poi le illustrazioni realizzate da Leonardo da Vinci per il libro, dedicato alla sezione aurea (Matematica 2003, Spazio e Figure, Alla ricerca del rettangolo più bello), di Luca Pacioli, *De Divina Proportione*: in esse sono rappresentati i poliedri regolari e i loro derivati semplici e stellati pieni e vuoti. Per poter eseguire correttamente questi lavori, Leonardo dovette costruire alcuni modelli in legno dei solidi e studiarne le facce come proiezione del piano (Figure 5.1 e 5.2).

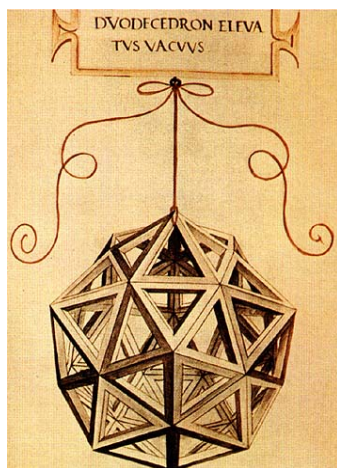


Figura 5.1



Figura 5.2

Come Piero della Francesca e Leonardo nel Rinascimento, anche artisti a noi contemporanei hanno mostrato un accentuato interesse per i solidi platonici. Il caso più emblematico è forse quello del grafico olandese Maurits Cornelis Escher (1898-1972) che ha fatto dei solidi platonici l'oggetto di numerose rielaborazioni (per una riproduzione delle sue opere si rinvia al sito <http://www.mcescher.com>). Interessante è l'analisi della xilografia *Stelle* realizzata nel 1948. La stampa raffigura un dodecaedro stellato, limitato dai piani di dodici stelle a cinque punte. Su ognuno di questi piani vive un mostro senza coda con il corpo imprigionato in una piramide a cinque facce e con la testa e le zampe che sporgono dai fori che si aprono sulle mura di questa prigione.

#### - I poliedri nell'architettura

L'architettura, come l'arte pittorica, ha subito il fascino dei poliedri come forme di riferimento per realizzare costruzioni. Fin dai tempi antichi le forme poliedriche hanno influenzato l'architettura; ne sono un esempio le piramidi dall'antico Egitto ad oggi (Figura 6).

Anche Castel del Monte (Andria, Puglia) presenta una struttura che si ispira ai poliedri e alla sezione aurea (Figura 7). Forme regolari, come quella del cubo (esaedro regolare), hanno influenzato anche l'architettura contemporanea. L'ingegnere-architetto Richard Buckminster Fuller ha realizzato cupole geodetiche molto particolari come, ad esempio, quella progettata per l'Expo di Montreal (Canada) nel 1966 (Figura 8).



Figura 6 – Piramidi di Giza



Figura 7 – Castel del Monte



Figura 8 – Padiglione per l'Expo

#### Quarta fase

L'insegnante, in continuità con quanto proposto nelle precedenti fasi e anche nell'attività Simmetrie nei poliedri (Matematica 2003, Spazio e Figure), propone una sintesi sulle simmetrie nei poliedri regolari e una riflessione su una particolare proprietà di cui esse godono: la dualità. Si riporta come esempio una figura che evidenzia la dualità tra cubo ed ottaedro regolare (Figura 9).

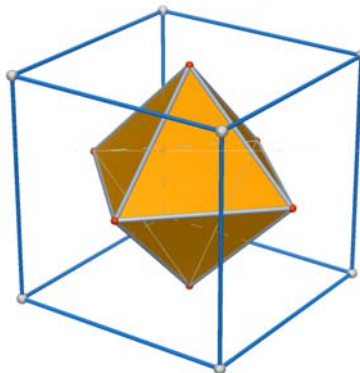


Figura 9

Con l'analisi dell'immagine riportata e con opportune considerazioni si può arrivare ad una generalizzazione del principio di dualità: se si fissa un poliedro regolare  $P$  e si uniscono con un segmento i centri di tutte le coppie di facce aventi uno spigolo comune, si ottiene un poliedro regolare  $P^*$  che è detto duale del poliedro dato. E' da notare che il tetraedro è duale di se stesso.

#### Possibili sviluppi

- Il docente, riprendendo le figure di Leonardo da Vinci e di Escher relative ai poliedri regolari stellati, stimola una riflessione su come si possa passare da un poliedro regolare ad un poliedro semi-regolare o stellato.

Se nella definizione di poliedro regolare si lascia cadere l'ipotesi che gli angoloidi siano uguali, si può ottenere, per esempio, il poliedro formato da due tetraedri regolari accostati lungo una faccia (Figura 2); se, invece, si lascia cadere l'ipotesi che il poliedro sia convesso, si ottengono i poliedri regolari che prendono il nome di poliedri regolari stellati (Figura 10).

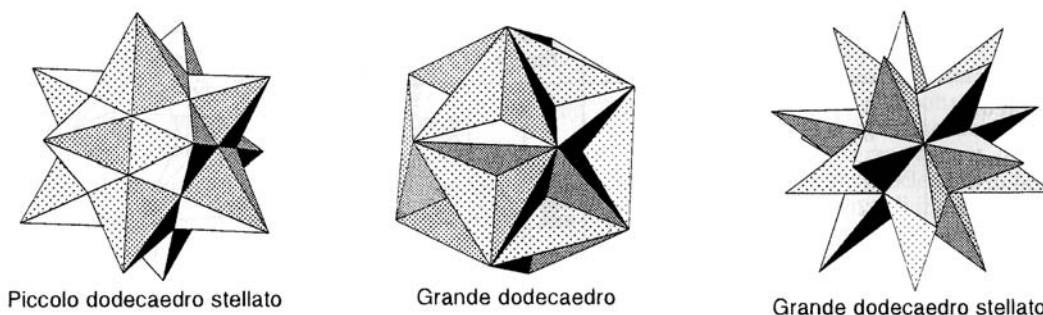


Figura 10

- Per stimolare la curiosità degli studenti, sempre partendo dai poliedri, l'insegnante può sollecitare una riflessione sui paradossi percettivi e sulle conseguenti "figure impossibili". Nella litografia *Belvedere* di Escher del 1958 (vedi ad es.: <http://www.wordofescher.com/gallery/A4.html>), si osserva un palazzo a tre piani, avente sullo sfondo un paesaggio montuoso. Sul pavimento, in primo piano, giace un pezzo di carta su cui è tracciata la figura di un cubo (detto "cubo di Necker"). Due cerchietti indicano i punti di intersezione dei lati. A seconda di come si guarda il cubo, si vede una delle due linee davanti all'altra. Il ragazzo seduto sulla panca tiene tra le mani un puzzle cubico che combina le due possibilità: il "sopra" e il

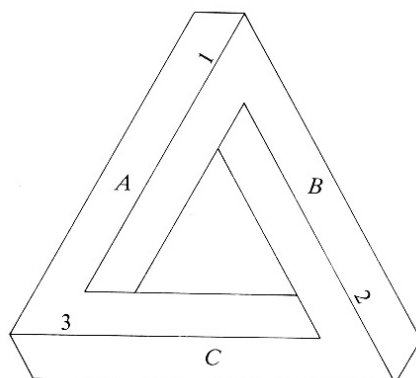
“sotto” si contraddicono a vicenda. Anche l'edificio alle sue spalle presenta le stesse incongruenze e contraddizioni.

Per esempio, la scala a pioli al centro, pur essendo stata disegnata correttamente dal punto di vista prospettico e in maniera credibile come oggetto, ha la base che poggia nella casa, mentre l'estremità superiore ne resta fuori. Quindi tra il “fuori” e il “dentro” del palazzo viene riproposta la stessa contraddizione contenuta nel cubo di Necker, proposto nel 1832 da Louis Albert Necker, cristallografo svizzero (Figura 11).



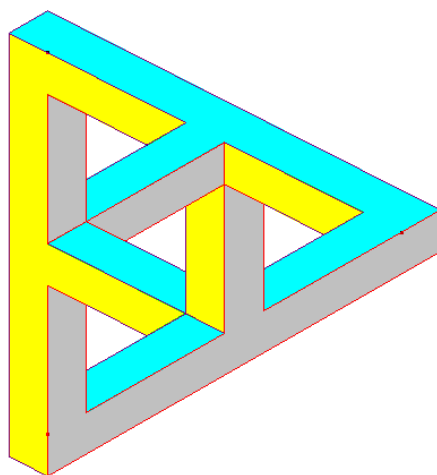
*Figura 11 – Cubo di Necker*

- Nella litografia *Cascata* del 1961 (per es., vedi: <http://www.wordofescher.com/gallery/A63.html>), Escher presenta un ulteriore paradosso raffigurando un canale che localmente sembra scorrere in discesa, ma globalmente è in salita. Il tema della cascata è basato sul triangolo di Penrose (Roger Penrose, matematico inglese) (Figura 12).



*Figura 12 – Triangolo di Penrose*

Sullo stesso triangolo è basata anche la figura impossibile contenuta in un'opera dell'artista svedese Oscar Reutersvard (Figura 13).



*Figura 13 – Una figura impossibile di Oscar Reutersvard*



- In continuità con quanto già proposto per il piano in merito allo studio della tassellazione (Matematica 2003, Spazio e Figure, Tassellazioni del piano), sarà possibile riproporre lo stesso problema per lo spazio. In tal caso gli studenti saranno guidati ad individuare il cubo come il più semplice poliedro regolare che consente la tassellazione dello spazio.

### Elementi di prove di verifica

1. Piero della Francesca, nel secondo libro del *Libellus de quinque corporibus regularibus*, tratta i poliedri regolari considerando le relazioni euclidee tra spigoli e diametro della sfera circoscritta. Si riportano di seguito le relazioni enunciate per:

- *Tetraedro regolare*: lo spigolo è medio proporzionale fra l'altezza del tetraedro e il diametro della sfera circoscritta; il quadrato dello spigolo sta al quadrato del diametro della sfera circoscritta come 2 sta a 3; il rapporto tra il quadrato dello spigolo e il quadrato dell'altezza è  $3/2$ .
- *Cubo*: il quadrato del diametro della sfera circoscritta sta al quadrato dello spigolo come 3 sta ad 1; ancora il quadrato del diametro sta alla superficie come 2 sta ad 1.

In base agli elementi acquisiti, si può ritenere che quanto affermato da Piero della Francesca corrisponda a verità? In che modo è possibile motivare le risposte?

2. Si consideri il tetraedro regolare  $T$  di vertici  $A, B, C, D$ .
- a) Indicati rispettivamente con  $V$  e  $S$  il volume e l'area totale di  $T$ , con  $r$  il raggio della sfera iscritta in  $T$ , trovare una relazione che legghi  $V$ ,  $S$  ed  $r$ .
  - b) Considerati il tetraedro regolare  $T'$  avente per vertici i centri delle facce di  $T$ , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli  $T$  e  $T'$  e il rapporto fra i volumi di  $T$  e  $T'$ .
  - c) Condotta il piano  $\alpha$ , contenente la retta  $AB$  e perpendicolare alla retta  $CD$  nel punto  $E$ , e detta  $s$  la lunghezza di uno spigolo di  $T$ , calcolare la distanza di  $E$  dalla retta  $AB$ .
3. Date le seguenti immagini, evidenziare le eventuali "incongruenze".

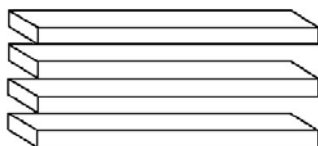


Figura 14

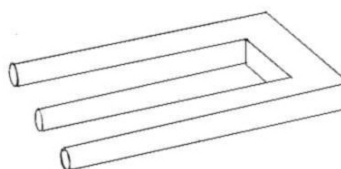


Figura 15

## Alla ricerca di massimi e minimi con metodi elementari

### Percorso: Problemi di massimo e minimo

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, ...). Produrre congetture e riconoscere la validità con semplici dimostrazioni. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie. Calcolare perimetri e aree di poligoni. Calcolare aree e volumi di solidi.	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie. Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. Lunghezze e aree dei poligoni. Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze.	Spazio e figure          Misurare	Fisica Economia

#### Contesto

Costruzioni geometriche.

Il contesto è quello delle costruzioni geometriche finalizzate alla ricerca delle soluzioni di problemi di massimo e minimo, utilizzando metodologie esplorative permesse dal software di geometria.

#### Descrizione dell'attività

Il tema dei massimi e minimi ha una notevole importanza teorica ed applicativa. Problemi di massimo e minimo si ritrovano nella vita di tutti i giorni, nella fisica, nella tecnologia, nell'economia... Questa attività di consolidamento propone alcuni problemi di massimo e minimo, seguendo perlopiù itinerari geometrici che conducono alla costruzione delle soluzioni. Il tema è ovviamente molto vasto e per essere sviluppato richiede di fare delle scelte, anche perché si presta ad essere trattato con diversi approcci. L'attività ha il compito di consolidare alcune conoscenze di geometria e di algebra e di utilizzarle, con l'aiuto di un software di geometria, in modo da esplorare situazioni di massimo e di minimo. All'inizio di questa attività si farà riferimento anche ad alcune identità e disuguaglianze, interpretandole geometricamente. Tutti i problemi proposti sono risolti per via elementare, senza far uso della nozione di derivata.

#### Prima fase

All'inizio dell'attività proponiamo un semplice problema di massimo che si presenta in matematica e nelle sue applicazioni. Espresso in linguaggio geometrico il problema è il seguente:

*Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, trovare quello che ha area massima.*

E' intuitivo pensare che la risposta sia il quadrato. Per affrontare questo problema si possono proporre diversi metodi. Inizialmente si può sfruttare la disuguaglianza tra la media geometrica e la media aritmetica. La media geometrica di due numeri positivi è minore od uguale alla media aritmetica (le due medie sono uguali solo se  $x = y$ ):

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Di questa disuguaglianza esiste una dimostrazione “visuale” (figura 1), per via geometrica, che si può proporre agli studenti. Posto  $\overline{AC} = x$  e  $\overline{CB} = y$ , si costruisce un segmento AB di lunghezza  $x + y$  e la circonferenza di diametro AB. Allora il raggio OD misura  $\frac{x+y}{2}$  e CD, che è altezza relativa all’ipotenusa del triangolo rettangolo ABD, misura  $\sqrt{xy}$ . Dal triangolo ODC, si ricava che  $CD \leq OD$ .

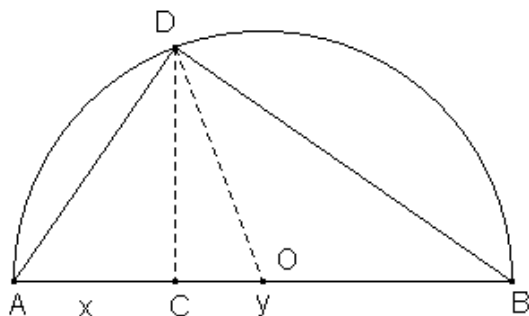


Figura 1

Alla risoluzione del problema si poteva arrivare anche con altre considerazioni, facendo ad esempio uso della geometria analitica. Se si fissa il semiperimetro del rettangolo ( $x + y = 2a$ ),  $xy$  rappresenta l’area del rettangolo e si può scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2a \\ xy = k \end{cases}$$

Nel piano cartesiano il sistema rappresenta l’intersezione tra una retta e un fascio di iperboli equilateri. Affinché il sistema abbia soluzioni occorre che l’iperbole di equazione  $xy = k$  ( $k > 0$ ) intersechi la retta  $x + y = 2a$ . Il massimo dell’area del rettangolo si ottiene quando l’iperbole è tangente alla retta (figura 2), ossia per  $x = y = a$ ; per questa iperbole si ha quindi  $k = a^2$ .

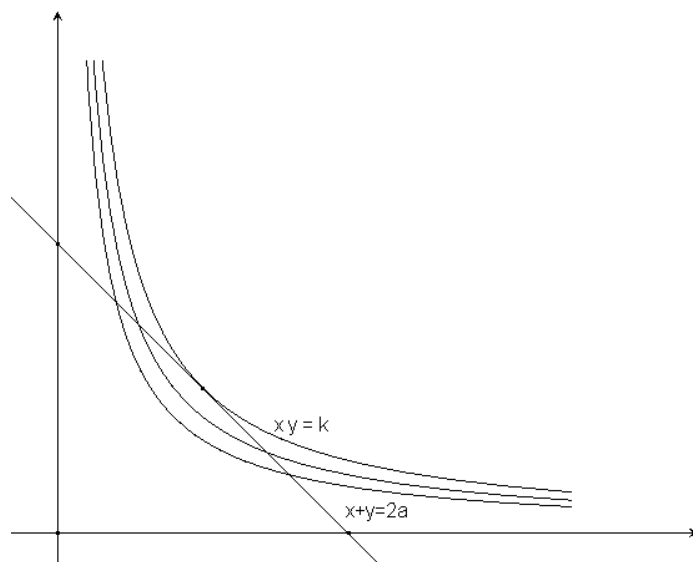


Figura 2

In generale, quindi, per le iperboli che intersecano la retta, si ha  $xy \leq a^2$  ovvero

$$xy \leq \left( \frac{x+y}{2} \right)^2.$$



Quest'ultima relazione, se si estrae la radice quadrata, esprime la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica. La disuguaglianza può essere letta in entrambi i versi e dà origine sia ad una proprietà di massimo che ad una proprietà di minimo. In precedenza abbiamo fissato il valore di  $x+y$ ; se, viceversa, fissiamo il valore di  $xy$  - ossia l'area di un rettangolo - la disuguaglianza esprime allora la proprietà simmetrica di quella finora studiata:

*tra tutti i rettangoli di area costante, il quadrato ha il perimetro minimo.*

Può essere interessante dal punto di vista didattico presentare questo problema anche tramite un'animazione ottenuta con un software di geometria. Si fissa un segmento AB, che diventa il semiperimetro del rettangolo, e si costruiscono dei rettangoli isoperimetrici. L'area è rappresentata da un arco di parabola di equazione  $S = x \cdot (2a - x) = -x^2 + 2ax$ , che ha il massimo per  $x = a$ , ascissa del vertice. La dinamicità della figura permette di trascinare il punto D e osservare il variare dell'area del rettangolo e contemporaneamente il grafico dell'area di ADHK in funzione di  $x$  (figura 3).

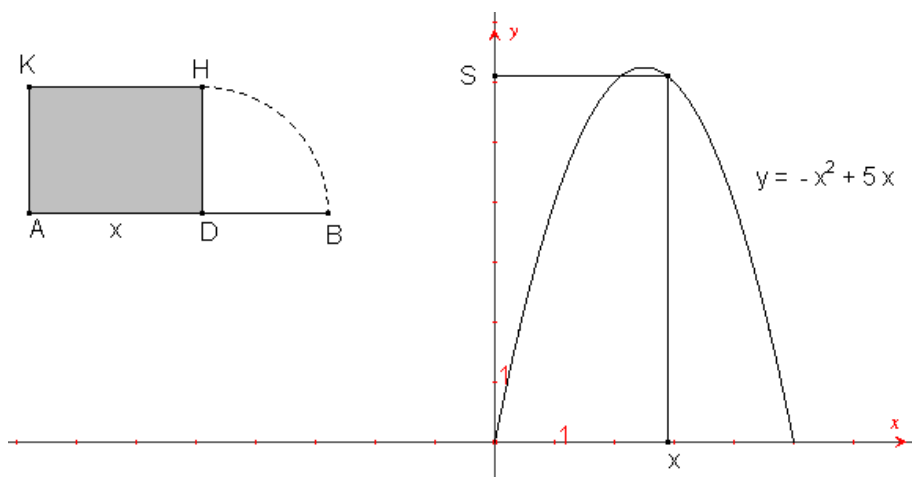


Figura 3

Lo stesso problema può essere presentato anche con un approccio storico, partendo dalla lettura della proposizione 5 del II libro degli *Elementi* di Euclide. Questo approccio, perché possa interessare gli studenti, dovrebbe essere proposto in laboratorio, mediante un software di geometria. Euclide, nella proposizione citata afferma:

*Se si divide un segmento in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali del segmento, insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà del segmento.*

Poniamo  $\overline{AB} = 2a$ . Il punto C divide a metà il segmento AB. Quindi  $\overline{AC} = a$ . Sia D un punto qualunque di CB. Quindi  $\overline{AD} = a + b$  e  $\overline{DB} = a - b$  (figura 4).

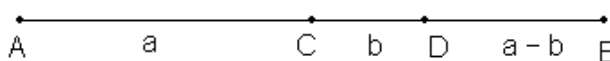


Figura 4

La formulazione della proposizione diventa allora:

$$\text{rettangolo}(\overline{AD}, \overline{DB}) + \text{quadrato}(\overline{CD}) = \text{quadrato}(\overline{DB})$$

e in termini algebrici  $(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$ , ossia il prodotto notevole  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

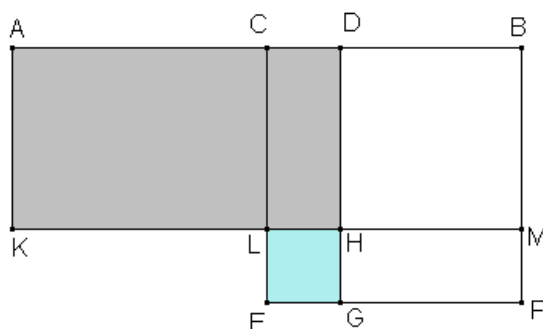


Figura 5

Dalla figura 5 si osserva che il rettangolo costruito su AD e DB rimane sempre dello stesso perimetro ( $4a$ ). Da quanto detto in precedenza possiamo ricavare che per “raggiungere” il quadrato costruito su  $a$  - che è costante - occorre aggiungere all’area di questi rettangoli il quadrato costruito su  $b$ . In modo algebrico, possiamo scrivere:

$$(a+b)(a-b) + b^2 = a^2$$

L’area del rettangolo ADHK diventerà quindi massima quando non occorrerà aggiungere nulla a  $(a+b)(a-b)$  per ottenere  $a^2$ ; deve quindi essere  $b=0$ . Ma se  $b=0$ , allora il rettangolo ADHK diventa un quadrato. Ne segue che: tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, il quadrato è quello che ha area massima. Se si pone  $a+b=x$ ,  $a-b=y$ , la proposizione di Euclide si può scrivere in forma algebrica nel seguente modo:

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

dalla quale è evidente che  $xy$  è massimo quando  $x=y$ .

La dimostrazione di Euclide non è difficile e può essere lasciata agli studenti. Si disegna il segmento AB, che sarà il semiperimetro dei rettangoli isoperimetrici, e si prende su di esso un punto D, con AD maggiore di DB. Si disegna quindi il rettangolo ADHK con DH=DB e il quadrato CBFE, dove C il punto medio di AB. Detta L l’intersezione delle rette CE ed LM, si nota che il quadrato CBFE è formato dal rettangolo CDHL, che è in comune con il rettangolo ADHK, dal rettangolo HMFG, che è uguale al rettangolo CDHL, dal quadrato DBMH e dal quadrato LHGE, che ha lato uguale alla differenza tra AD (lato maggiore del rettangolo) e AC (metà di AB ovvero metà del semiperimetro).

Si fa notare che il rettangolo ADHK ha una superficie minore del quadrato CBFE, in quanto tale quadrato ha “in più” il quadrato LHGE. Facendo variare D su CB si può notare che quando D coincide con C il quadrato LHGE degenera in un punto e che il rettangolo ADHK diventa un quadrato uguale a CBFE. Si può quindi concludere che il rettangolo costruito ADHK ha area massima quando le due parti, AC e CD, in cui viene diviso il segmento considerato sono uguali (D coincidente con B).

Si propone un altro esempio nel quale si verifica una situazione analoga. Nella figura 6 è rappresentato il quadrato ABCD il cui lato è la somma di due segmenti AP e PB. Il quadrato è costituito da quattro rettangoli la cui area è uguale al prodotto delle misure di AP e PB e da un quadrato il cui lato è la differenza dei segmenti AP e PB. Le aree dei rettangoli risulteranno massime quando il quadrato ABCD risulta scomposto solo nei quattro rettangoli, ovvero quando AP = PB (come gli studenti possono notare facendo variare il punto P sul segmento AB).

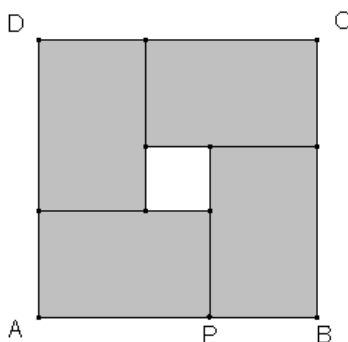


Figura 6

Si può anche far notare che la figura 6 rappresenta, in forma geometrica, l'identità algebrica  $(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$ . Dall'analisi di questa identità, si vede che l'area dei rettangoli ( $4xy$ ) diventa massima per  $x = y$ .

In questa prima parte è stata rivista la disuguaglianza tra la media geometrica e la media aritmetica. Si può anche citare il fatto - ed eventualmente fornire una dimostrazione - che questa proprietà non vale solo per due numeri positivi, ma vale in generale per  $n$  numeri positivi.

*Proposizione 1.* Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono numeri positivi e indichiamo con  $m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  la loro media aritmetica e con  $m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$  la loro media geometrica, allora si ha  $m_g \leq m_a$  e l'uguaglianza  $m_g = m_a$  si ha solo se i numeri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono uguali tra loro.

Sulla base di questa proposizione è possibile dimostrare le seguenti proposizioni tra loro "simmetriche" (per passare da una all'altra la parola "prodotto" viene sostituita con "somma" e la parola "massimo" viene sostituita con "minimo").

*Proposizione 2.* Il prodotto di  $n$  numeri non negativi  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la cui somma è costante, è massimo quando i numeri sono uguali tra loro.

*Proposizione 3.* La somma di  $n$  numeri non negativi  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , il cui prodotto è costante, è minimo quando i numeri sono uguali tra loro.

### Seconda fase

Come applicazione di quanto visto in precedenza si propone di indagare come varia l'area dei rettangoli inscritti in un triangolo (ovvero rettangoli che hanno due vertici consecutivi su un lato del triangolo e gli altri due su ognuno degli altri due lati) e in particolare se si può individuare il rettangolo di area massima.

L'indagine può essere condotta usando un software di geometria che evidenzi il cambiamento dell'area del rettangolo al variare della posizione di uno dei suoi vertici su uno dei lati del triangolo, considerando la situazione nei tre possibili casi (base del rettangolo appartenente a ciascuno dei tre lati del triangolo).

Osservando la figura 7 si può congetturare che l'area massima è quella dei tre rettangoli che hanno l'altezza uguale alla metà dell'altezza del triangolo relativa al lato sul quale giace la base dello stesso rettangolo. È utile sottolineare come in questo caso il problema ammette tre soluzioni diverse per l'area massima.

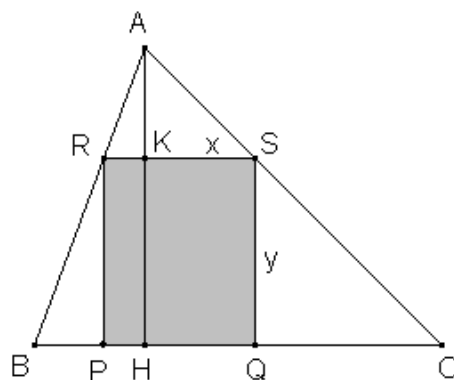


Figura 7

Per dimostrare ciò possiamo, indicati con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  rispettivamente i lati  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  e con  $x$  e  $y$  la base e l'altezza dei rettangoli, applicare una proprietà dei triangoli simili e notare che l'area dipende dal prodotto di due numeri che hanno somma costante.

Osservando che i triangoli  $ARS$  e  $ABC$  sono simili (omotetia di centro  $A$  che manda  $R$  in  $B$ ) si può scrivere la proporzione  $x : a = (h - y) : h$ , da cui si ricava  $x = a(h - y)/h$ ; l'area del rettangolo  $PQSR$  è allora uguale a  $ay(h - y)/h$  e quindi, essendo  $a/h$  costante, varia al variare del prodotto  $y(h - y)$  i cui fattori hanno somma costante ( $h - y + y = h$ ). Si conclude, in base a quanto dimostrato nella prima fase, che l'area è massima quando i due fattori sono uguali  $h - y = y$ , ovvero quando  $y = h/2$  e  $x = a/2$ . L'area del rettangolo è uguale a  $ah/4$ , che è la metà dell'area del triangolo.

Si ragiona analogamente per i rettangoli inscritti relativamente agli altri lati. Qui abbiamo supposto che il triangolo fosse acutangolo. Si propone agli studenti di esaminare anche gli altri casi (triangolo rettangolo e triangolo ottusangolo).

### Terza fase

Si considerano i rettangoli di data area e si guidano gli studenti a individuare quello di perimetro minimo.

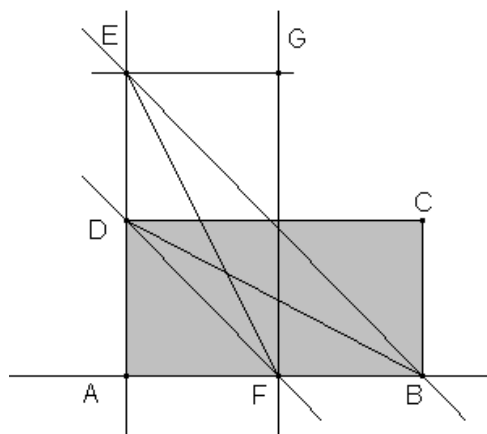


Figura 8

Dato il rettangolo  $ABCD$  (figura 8) si costruisce il rettangolo  $AFGE$  equivalente ad  $ABCD$  nel seguente modo: sul prolungamento di  $AD$  si prende un punto  $E$  e successivamente si determina il punto  $F$  di intersezione tra il lato  $AB$  e la retta parallela a  $EB$  passante per  $D$ . Si fa quindi osservare che i triangoli  $ABD$  e  $AFE$  sono equivalenti.

Infatti hanno in comune il triangolo  $AFD$  e sono completati rispettivamente dai triangoli  $DFB$  e  $DFE$  che sono tra loro equivalenti perché hanno stessa base  $DF$  e uguale altezza, essendo  $DF$

parallela a EB. Quindi sono equivalenti anche i rettangoli AFGE e ABCD le cui aree sono doppie di quelle dei triangoli AFE e ABD. Pertanto, al variare di E sul prolungamento di AD i rettangoli AFGE hanno tutti la stessa area di ABCD.

Il perimetro dei rettangoli AFGE, invece, varia al variare di E sulla retta AD. Misurando la lunghezza del perimetro con il software, si può congetturare che raggiunga il suo valore minimo quando  $AF = AE$ . Indicato con  $x$  la misura del lato AF e con  $y$  quella di AE, si ha  $xy = c$  per quanto si è dimostrato. Il semiperimetro è quindi  $x + y = k$ . Nel piano cartesiano si è ricondotti ad un sistema formato da un'iperbole equilatera e da un fascio di rette. Il minimo valore di  $k$ , in modo che il sistema abbia soluzioni, si ottiene quando la retta è tangente all'iperbole, cioè per  $x = y$ , che fornisce  $x = \sqrt{c}$  (figura 9). Si conclude che:

*Tra tutti i rettangoli di data area il quadrato è quello di perimetro minimo.*

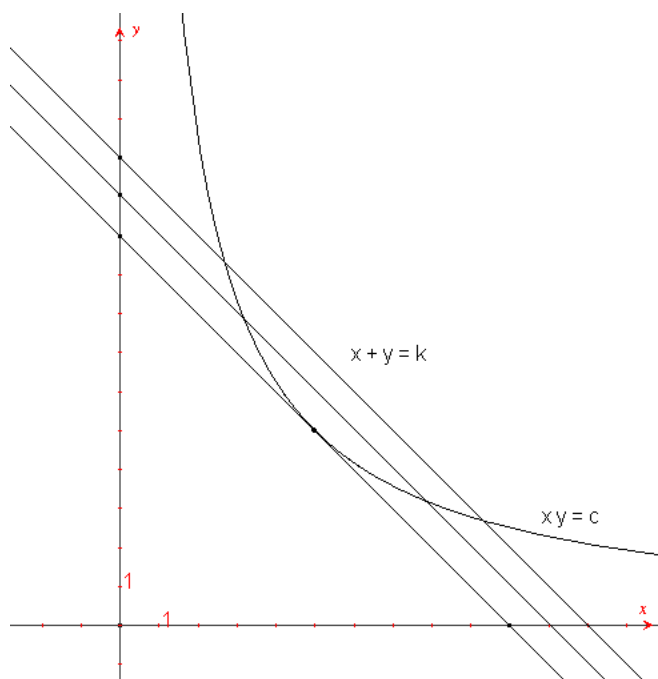


Figura 9

Questo problema porta dunque a concludere che se  $x$  e  $y$  sono due numeri positivi di prodotto costante ( $xy = c$ ), la loro somma è minima quando  $x = y$ .

Con l'uso della geometria analitica, si potrebbe riformulare il problema nel seguente modo. Si ricava  $y = c/x$  e si esamina la curva  $s = x + c/x$ . Questa curva è un'iperbole (figura 10) di asintoti l'asse  $y$  e la retta  $y = x$ . In base a quanto è stato detto in precedenza, il minimo di questa iperbole (con  $x > 0$ ) si ha per  $x = c/x$ , cioè per  $x = \sqrt{c}$  e in questo caso la somma vale  $s = 2\sqrt{c}$ .

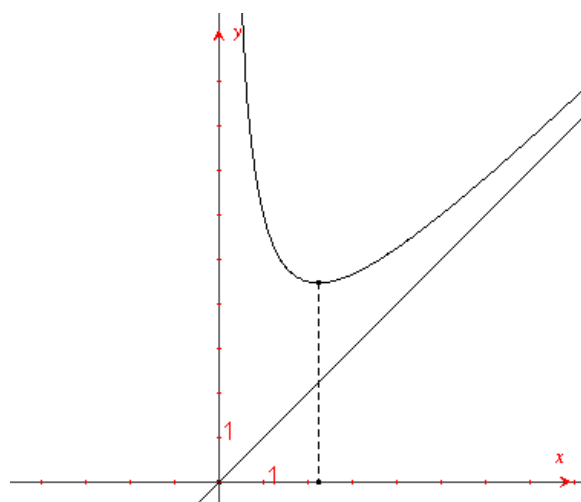


Figura 10

Questo problema si può leggermente ampliare. Supponiamo che  $a$  e  $b$  siano costanti positive. Vogliamo determinare il valore minimo della somma  $s = ax + b/x$ . In questo problema abbiamo due quantità positive che hanno prodotto costante. La somma  $s = ax + b/x$  è minima solo se  $ax = b/x$ , ossia se  $x = \sqrt{b/a}$  e in questo caso la somma vale  $2\sqrt{ab}$ .

#### Quarta fase

Si propone di determinare tra i triangoli rettangoli di data ipotenusa quello che ha area massima. Un triangolo rettangolo si può inscrivere in una semicirconferenza e si può osservare che il problema posto è equivalente a quello di determinare tra i rettangoli di data diagonale quello di area massima (figura 11). E' facile per gli studenti rendersi conto che il rettangolo richiesto è il quadrato con la diagonale uguale all'ipotenusa assegnata. Se  $x$  e  $y$  sono i cateti del triangolo rettangolo e  $c$  l'ipotenusa, che rimane costante, allora  $x^2 + y^2$  è costante al variare di  $x$  e  $y$ . Algebricamente si osserva che prodotto  $xy$  è massimo quando  $x$  e  $y$  sono uguali perché si può scrivere l'identità:

$$xy = \frac{x^2 + y^2 - (x - y)^2}{2}, \text{ ovvero } xy = \frac{c^2 - (x - y)^2}{2}, \text{ che è massimo per } x = y.$$

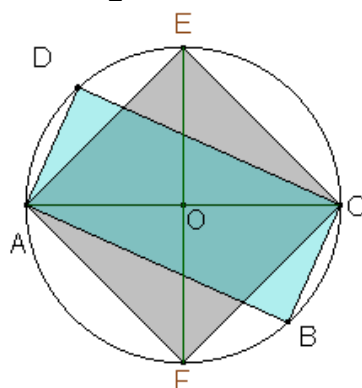


Figura 11

#### Quinta fase

Si propone agli studenti il problema di individuare il rettangolo di area massima tra quelli inscritti in una ellisse (figura 12). Il problema può sembrare complesso, ma la sua risoluzione può divenire più facilmente raggiungibile se si cercano analogie con quanto osservato in precedenza.

Si guidano gli studenti ad osservare che l'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria

$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$  indica che rimane costante la somma dei quadrati di  $x/a$  e di  $y/b$  e quindi, in base

a quanto emerso nella quarta fase, il prodotto tra  $x/a$  e di  $y/b$  è massimo quando i due termini sono uguali tra loro, ovvero quando  $x/a = y/b$  cioè per  $x/y = a/b$ . Facendo riferimento alla figura 11 possiamo concludere che ciò si verifica quando il rettangolo PQRS, inscritto nell'ellisse, è simile al rettangolo ABCD circoscritto (con i lati paralleli agli assi) dell'ellisse.

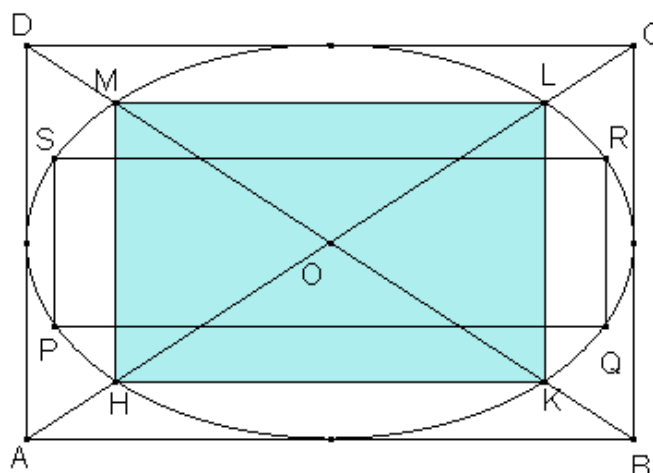


Figura 12

### Sesta fase

Si propone il problema di individuare tra i rettangoli di dato perimetro quello di diagonale minima. Nel caso in cui vengono considerati rettangoli di perimetro assegnato si può fare una costruzione simile a quella vista nella prima fase, per poi considerare la diagonale del rettangolo ADB'E (figure 13 e 14). Facendo variare il punto D sul segmento AB si può notare che il segmento AB' è minimo quando coincide con AH, ovvero quando è perpendicolare a BH. Questa conclusione deriva dall'analisi del triangolo rettangolo AHB'. Ciò avviene quando il punto D coincide con C e questo comporta che il rettangolo ADB'E diventi il quadrato con il lato uguale alla metà del segmento AB.

Questo problema traduce geometricamente l'identità  $x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}$ . Essendo

$x + y = p$ , si ottiene  $d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{p^2 + (x-y)^2}{2}}$ , che è minima soltanto se  $x = y$ .

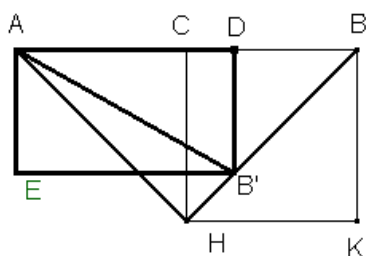


Figura 13

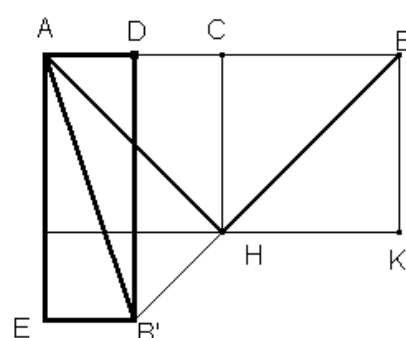


Figura 14

Nelle attività descritte sono stati proposti alcuni problemi di massimo e minimo di origine geometrica tra gli innumerevoli che si potevano presentare. Altri problemi, nei quali si usano metodi geometrici unitamente all'algebra e allo studio di funzioni elementari, sono quelli relativi ai problemi di scelta (Ricerca operativa) e dei problemi di programmazione lineare. Questi problemi potrebbero rappresentare un'ulteriore occasione per consolidare conoscenze e abilità apprese nei primi due bienni.

## Biglietto della corriera

*Percorso:* **Pendenza di una retta e variazione di una funzione**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (variazione di una grandezza in funzione di un'altra, semplici successioni,...) Avere familiarità con crescita, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Leggere in un grafico le proprietà di crescita e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi.	Funzioni lineari, quadratiche, costanti a tratti, lineari a tratti.  Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzioni polinomiali, funzioni definite a tratti.	Relazioni e funzioni          Laboratorio di matematica	Economia

### Contesto

Modello economico.

Una situazione di contesto economico viene descritta con una funzione lineare a tratti. Una semplificazione del modello risulta possibile passando ad una funzione polinomiale di secondo grado che coincide con la precedente in alcuni punti. L'attività si propone di determinare la funzione quadratica e di valutare l'errore commesso all'interno degli intervalli.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

È proposto il seguente problema:

Una scuola stipula una convenzione con l'azienda cittadina dei trasporti per le gite scolastiche. La convenzione stabilisce che verrà applicata una tariffa di € 30 per ogni studente fino a 20 studenti. Se vi saranno più studenti si applicherà uno sconto che, partendo dal 10% dopo i primi 20 studenti, aumenta ancora del 10% per fasce successive di 20 studenti. Ad esempio per un numero di studenti che va da 21 a 40 si applica lo sconto del 10%, da 41 a 60 del 20% e così di seguito. Quale sarà il costo complessivo per la scuola?

Evidentemente fino a 20 studenti il costo è proporzionale al loro numero, dato che la quota unitaria è costante. Il calcolo del costo viene poi fatto per accumulo: lo sconto maturato è applicato solo alla fascia di competenza. Dunque, al costo maturato fino ad una certa fascia di studenti, si aggiunge per l'intera fascia successiva il costo calcolato con il corrispondente sconto. Dopo alcuni esempi, risulterà opportuno costruire una tabella (ci si può eventualmente avvalere di un foglio elettronico o di una calcolatrice) che contenga in colonna: il numero di studenti per fasce di 20, lo sconto applicato alla fascia, il costo complessivo. Conviene anche tabulare alcuni valori opportuni che consentano da una parte di facilitare il calcolo per le fasce successive, dall'altra di tracciare un grafico dell'andamento dei costi. Per una successiva formalizzazione, indicato con  $x$  il numero degli studenti che partecipa alla gita scolastica, sono utili le seguenti notazioni:  $p = [(x-1)/20]$  (quoziente intero della divisione di  $x-1$  per 20; il “-1” serve ad evitare che per  $x = 20$  si passi alla fascia di sconto successiva),  $r = x - 20p$  (resto della divisione di  $x-1$  per 20).



FASCIA	$p = \left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor$	SCONTO	FORMULA CHE ESPRIME IL COSTO	VALORI DI $x$	COSTO $f(x)$	COSTO PER STUDENTE
$1 \leq x \leq 20$	0	0%	$30x$	0	0	-
				20	$f(20) = 600$	30
$21 \leq x \leq 40$	1	10% di €30: €3	$f(20) + r(1 - p/10)30 = 600 + 27(x-20)$	40	1140	$1140/40 = 28,5$
$41 \leq x \leq 60$	2	20% di €30: €6	$1140 + 24(x-40)$	60	1620	27
$61 \leq x \leq 80$	3	30%: €9	$1620 + 21(x-60)$	80	2040	25,5
$81 \leq x \leq 100$	4	40%: €12	$2040 + 18(x-80)$	100	2400	24
$101 \leq x \leq 120$	5	50%: €15	$2400 + 15(x-100)$	120	2700	22,5
$121 \leq x \leq 140$	6	60%: €18	$2700 + 12(x-120)$	140	2940	21
$141 \leq x \leq 160$	7	70%: €21	$2940 + 9(x-140)$	160	3120	19,5
$161 \leq x \leq 180$	8	80%: €24	$3120 + 6(x-160)$	180	3240	18
$181 \leq x \leq 200$	9	90%: €27	$3240 + 3(x-180)$	200	3300	16,5
$201 \leq x \leq 220$	10	100%: €30	$3300 + 0(x-200)$	220	3300	15
$221 \leq x \leq 240$	11	110%: €33	$3300 - 3(x-220)$	240	3240	13,5

Si può tracciare un grafico riportando in ascissa i valori della colonna 5 della tabella (numero di studenti), e in ordinata quelli della colonna 6 (costo). Può essere opportuno mostrare, in un paio di casi, la retta corrispondente all'equazione della colonna 4.

La Figura 1 mostra il grafico della funzione continua che corrisponde alla funzione discreta della tabella, costruito con una calcolatrice grafica.

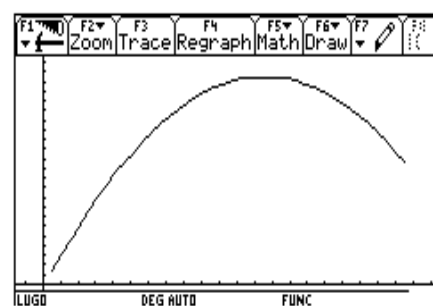


Figura 1

La pendenza del grafico esprime la variazione del costo della corriera. Per come è formulata la proposta, il costo unitario è costante (30 euro) fino a 20 studenti; successivamente diminuisce progressivamente di 3 euro per studente (sconto del 10%) per ogni fascia successiva di 20 studenti. Il grafico, quindi, è lineare fino a 20 e successivamente è costituito da segmenti che hanno sempre la proiezione sulle ascisse pari a 20 e una pendenza che via via diminuisce. La variazione di pendenza tra due segmenti consecutivi è troppo piccola perché sia apprezzata sullo schermo della calcolatrice anche ingrandendo il grafico.

Il grafico e la tabella mostrano che ad un certo punto, aumentando il numero di studenti, diminuisce il costo complessivo del viaggio, contro ogni logica commerciale. Evidentemente chi ha formulato la proposta si aspetta che ci sia un numero massimo di utenti possibili.

### Seconda fase

Ci proponiamo di esprimere la relazione tra il numero di studenti ed il costo complessivo con una funzione. Una funzione  $f(x)$ , che calcoli il costo del viaggio per un numero qualsiasi di studenti, può essere definita in modo ricorsivo, prendendo spunto dalla precedente tabella. Come prima, poniamo  $p = [(x-1)/20]$  e  $r = x - 20p$ . allora si ha  $f(x) = f(20p) + r \cdot (1 - p/10)30$ .

Il grafico visto in precedenza suggerisce però di approssimare la funzione con una parabola.

Per trovare l'equazione della parabola candidata a descrivere la nostra relazione, ne scegliamo alcuni punti. A questo scopo scorriamo le due colonne 5 e 6 della tabella.

Scegliamo il punto  $(0; 0)$  e i due punti  $(200; 3300)$  e  $(220; 3300)$  che saranno simmetrici rispetto all'asse della parabola  $y = ax^2 + bx + c$ . Risolvendo il sistema, che si ottiene imponendo alla parabola di passare per questi tre punti, si ricavano i coefficienti della funzione polinomiale  $g(x)$  cercata, come indicato a fianco.

L'uso di una calcolatrice sarà naturalmente utile. Si può in tal caso tabulare la funzione  $g(x)$  per alcuni dei valori presenti nella colonna 5.

Si verifica che il grafico di  $g(x)$  si sovrappone, almeno nella scala che lo produce globalmente, a quello della tabella.

Possiamo anche verificare che, per i valori delle colonne 5 e 6, la funzione  $g(x)$  coincide con i corrispondenti elementi della funzione  $f(x)$ , sopra definita.

La parabola passa per i punti della tabella a cominciare da quello di ascissa 0, ma naturalmente non darà il costo esatto del viaggio per un numero qualsiasi di studenti: il calcolo secondo la convenzione è infatti lineare all'interno delle fasce di sconto. Vogliamo evidenziare l'errore che verrebbe commesso calcolando il costo del viaggio con la  $g(x)$ .

L'errore commesso viene calcolato come

$$g(x) - f(x) = \text{err}(x)$$

Il grafico di  $\text{err}(x)$  riportato nella Figura 2, mostra una forma all'apparenza periodica di periodo 20, con un errore relativamente contenuto rispetto ai valori della funzione  $f(x)$ . Variando l'intervallo di rappresentazione della funzione  $\text{err}(x)$ , si può osservare la stessa regolarità anche per i valori seguenti di  $x$ .

$$c = 0$$

$$3300 = a(200)^2 + b(200)$$

$$3300 = a(220)^2 + b(220)$$

$$a = \frac{-b}{420}; \quad b = 31,5; \quad a = \frac{-3}{40}$$

parabola :

$$g(x) = \frac{-3}{40}x^2 + 31,5x$$

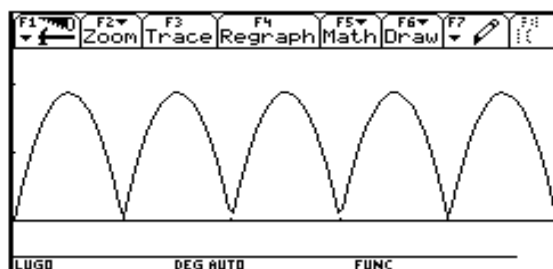


Figura 2

**Possibili sviluppi**

- Si può indagare sul significato del coefficiente  $-\frac{3}{40}$  del termine in  $x^2$  della parabola che approssima la funzione del costo. Ci si può chiedere, ad esempio, come deve cambiare l'aliquota di sconto se si riduce l'ampiezza della fascia di applicazione e si vogliono mantenere gli stessi valori di costo complessivo. Ad esempio, se si dimezza la fascia si dimezza anche lo sconto? Quanto vale lo sconto quando la fascia è costituita da un solo studente?
- Nella Figura 2 il grafico è costituito da archi di parabole, dato che si tratta di una differenza tra un polinomio di secondo grado (la parabola) ed uno di primo (la retta secante). Come sono le parabole 'differenza' quando la retta secante proietta sull'asse delle ascisse segmenti di lunghezza costante?

## Crescita e decadimento

*Percorso: Potenze, successioni, funzioni esponenziali e logaritmiche*

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>In situazioni problematiche individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura.</p> <p>Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, la notazione con freccia, il diagramma ad albero, il grafico.</p> <p>Leggere in un grafico le proprietà di crescita e decrescenza.</p> <p>Costruire modelli sia discreti che continui di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale.</p> <p>Possedere il senso intuitivo di “limite di una successione”.</p>	<p>Relazioni d'ordine.</p> <p>Esempi di funzioni e dei loro grafici.</p> <p>La funzione esponenziale;</p> <p>la funzione logaritmica.</p> <p>Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Il numero <math>e</math>.</p> <p>Incrementi a passo costante.</p>	<p>Relazioni e funzioni</p>	Scienze
<p>Stimare l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico.</p>	<p>I numeri decimali e il calcolo approssimato.</p> <p>L'insieme dei numeri reali.</p>	<p>Numeri e algoritmi</p>	
<p>Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate.</p>		<p>Argomentare, congetturare, dimostrare</p>	
<p>Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni.</p>		<p>Misurare</p>	
<p>Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni e fenomeni matematici e non per affrontare problemi.</p>		<p>Risolvere e porsi problemi</p>	

### Contesto

Decadimento radioattivo.

Il contesto dell'attività è quello dei fenomeni di crescita e decrescita, che si traducono in funzioni esponenziali. Il punto di partenza è fornito dal decadimento radioattivo.

### Descrizione dell'attività

L'attività si struttura in fasi di difficoltà crescente. I fenomeni di decadimento radioattivo vengono prima schematizzati, poi interpretati in termini di successioni geometriche per arrivare poi a funzioni esponenziali, prima in base  $1/2$  e successivamente in base  $e$ . Parallelamente a questa evoluzione varia la possibilità di risolvere equazioni di tipo esponenziale, prima in via approssimata e poi in modo più esatto.

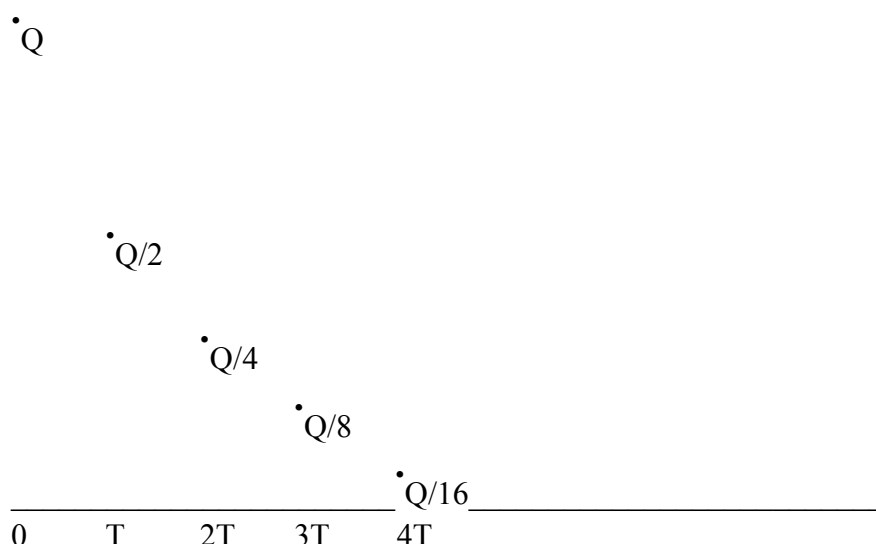
#### Prima fase

Si inizia con la definizione di *decadimento radioattivo* e di *tempo di dimezzamento*. Per tempo di dimezzamento  $T$  di un materiale radioattivo si intende il periodo passato il quale la metà del materiale è decaduta (cioè si è trasformata). Tali valori sono generalmente riportati in tavole e possono essere molto diversi per i vari materiali radioattivi. Ad esempio il tempo di dimezzamento dell'azoto è di 10 minuti, il tempo di dimezzamento del Carbonio è di 5570 anni (cfr. Matematica 2003, Misurare, Crescite veloci e crescite lente).

L'insegnante propone allora il primo problema:

Data una certa quantità iniziale  $Q(0)$  di azoto, dopo quanti tempi di dimezzamento (e quindi dopo quanto tempo) la quantità di sostanza radioattiva si riduce a meno di  $1/4$ , a meno di  $1/100$ , a meno di un millesimo della quantità iniziale?

Si può schematizzare la situazione con un grafico come quello che segue:



per arrivare poi a trovare la relazione  $Q(n) = Q(0)(1/2)^n$ . Si vede allora che  $Q(n) = Q(0)/4$  per  $n=2$ , quindi dopo due tempi di dimezzamento ossia dopo 20 minuti. Ma il valore di  $n$  per cui  $Q(n) < Q(0)/100$  deve essere approssimato, con le successive potenze di  $(1/2)$ . Si trova che  $(1/2)^7 < 1/100$  (sette tempi di dimezzamento equivalgono a 70 minuti).

#### Seconda fase

Dal momento che una sostanza radioattiva decade con continuità e non a intervalli, l'insegnante propone agli studenti di non considerare solo valori interi dell'esponente, e di riscrivere quindi l'equazione trovata come  $Q = Q(0)(1/2)^x$ . Si può poi porre uguale a 1 (cioè al 100%) la quantità iniziale, e giungere così a  $Q = (1/2)^x$ . Si osserverà che il grafico di quest'ultima curva "contiene" i punti del grafico discreto precedente.

A questo punto l'insegnante può chiedere:

Dopo quanto tempo la quantità di azoto radioattivo si è ridotta ad un centesimo del valore iniziale?

Ora abbiamo un nuovo strumento per la risoluzione dell'equazione esponenziale  $(1/2)^x = 1/100$ : i logaritmi.

Da  $\log (1/2)^x = \log (1/100)$  si ricava  $x = \log(1/100)/\log(1/2) = 6,64$ . Il risultato si può confrontare con quello ottenuto precedentemente per approssimazione, ma la risposta è ora più precisa: 6,64 tempi di dimezzamento equivalgono a 1h 6 min 24 s (anche se è dubbio che si possa calcolare il tempo in modo così esatto per un fenomeno reale).

### Terza fase

Si introduce ora un punto di vista più generale per tutti i fenomeni di crescita e decadimento. Si può infatti ipotizzare che la variazione (aumento o diminuzione) della quantità di sostanza considerata sia proporzionale alla quantità stessa e al tempo trascorso:

$$\Delta y \sim y \cdot \Delta t$$

Introducendo una costante reale  $k$  otteniamo:

$$\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t \quad \text{con} \quad \begin{cases} k < 0 \text{ per decrescita} \\ k = 0 \text{ per stagnazione} \\ k > 0 \text{ per crescita} \end{cases}$$

Questa equazione può essere ulteriormente elaborata sia nel caso discreto che nel continuo.

Caso discreto: se indichiamo con  $y_j$  la quantità di materiale dopo  $j$  intervalli di tempo  $\Delta t$ , dall'equazione alle differenze  $\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t$  segue l'equazione  $y_j - y_{j-1} = k \cdot y_{j-1} \cdot \Delta t$ . Risolvendo rispetto a  $y_j$  si ottiene  $y_j = y_{j-1} \cdot (1 + k\Delta t)$  con valore iniziale  $y_0$ .

Segue  $y_{j-1} = y_{j-2}(1 + k\Delta t)$ , quindi in complesso  $y_j = y_{j-2}(1 + k\Delta t)^2$ . Ripetendo il procedimento si ottiene così:

$$y_j = y_0(1 + k\Delta t)^j \text{ con valore iniziale } y_0.$$

Ritroviamo così che crescita e decrescita sono descritte, nel modello discreto, da successioni geometriche. Nel caso trattato precedentemente si aveva  $\Delta t = 1$  (un tempo di dimezzamento) e  $k = -1/2$ .

Più interessante è l'estensione al caso continuo: immaginiamo l'intervallo  $[0; \Delta t]$  diviso in un numero crescente di intervalli sempre più piccoli. Sia  $n$  il numero di intervalli di tempo. Allora si ha  $t = n \cdot \Delta t$ . Dal modello discreto sappiamo che:

$$y_n = y_0(1 + k\Delta t)^n = y_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n.$$

Come si comporta tale espressione per  $n \rightarrow \infty$ ? Ricordando il numero di Eulero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \text{ possiamo trovare che } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n = e^{kt}.$$

Ne segue, per il processo nel caso continuo, che  $y_n = y_0 \cdot e^{kt}$ , con valore iniziale  $y_0$ .

### Quarta fase

Torniamo ora al problema di partenza: ponendo  $y_0 = 1$ , abbiamo che il decadimento di una sostanza radioattiva può essere espresso dalla funzione  $y = e^{kt}$ . Per determinare  $k$  usiamo i dati a nostra disposizione: per  $t = 10$  min si ha  $y = 1/2$ . Quindi  $e^{10k} = 1/2$ . Risolvendo ancora con l'aiuto dei logaritmi otteniamo  $k = -0,0693147$ .

Come è possibile che lo stesso problema si formalizzi sia con un'equazione del tipo  $y = (1/2)^x$  sia con l'equazione  $y = e^{-0,069t}$ ?

Verifichiamo che le due equazioni sono equivalenti. Si tratta innanzi tutto di ricordare che le due equazioni usano unità di misura diverse: la prima ha come unità di misura il tempo di decadimento  $T = 10$  min, la seconda ha come unità di misura 1 minuto. Quindi dobbiamo porre  $t = 10x$ . Segue che:  $e^{-0,069t} = e^{-0,069(10x)} = (e^{-0,69})^x = (0,501)^x$ . Dunque, con ottima approssimazione,  $e^{-0,069t} = (1/2)^x$ .

### **Possibili sviluppi**

Al momento in cui si introducono le derivate, l'equazione  $y = e^{-0,069t}$  si può ritrovare come soluzione di un problema in cui è noto il tasso di decrescita (rispettivamente di crescita) di una certa quantità  $y$ , ovvero come soluzione di una semplice equazione differenziale del tipo  $dy/dx = -0,069 y$ .

## Una scatola da costruire

*Percorso: Equazioni e disequazioni*

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni e disequazioni.	Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione “modulo”, funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	Relazioni e funzioni	
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali.	Numeri e algoritmi  Laboratorio di matematica	

### Contesto

Soluzione approssimata di equazioni.

Il punto di partenza dell'attività è costituito dalla constatazione del fatto che, data un'equazione polinomiale di grado  $n$  a coefficienti reali, al di là di quanto afferma il teorema fondamentale dell'algebra (l'equazione ha certamente  $n$  soluzioni complesse, ognuna contata con la rispettiva molteplicità), non esiste alcun teorema che stabilisca quante di tali soluzioni siano reali. Nella modellizzazione di un problema può capitare di ottenere un'equazione risolvente di terzo grado o di grado ancora superiore: diventa allora importante avere a disposizione metodi efficienti e non eccessivamente complicati per stabilire se tale equazione ammette soluzioni reali, valutare il numero di tali soluzioni e riuscire a darne un'approssimazione accettabile per i propri scopi. D'altronde in analisi matematica uno degli aspetti salienti delle funzioni polinomiali è che esse sono definite in tutto l'insieme dei numeri reali e che sono ovunque continue. E' intuitivo dal punto di vista grafico comprendere che, se in corrispondenza dei valori distinti  $x_1$  e  $x_2$  della variabile indipendente  $x$ , una funzione polinomiale  $f$  assume valori di segno diverso, allora nell'intervallo di estremi i suddetti punti  $x_1$  e  $x_2$ ,  $f$  ammette almeno uno zero, ovvero esiste almeno un punto  $c$  tale che  $f(c) = 0$ . Questa proprietà è espressa a livello teorico dal teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue: *se una funzione  $y = f(x)$  è continua in un intervallo chiuso e limitato di estremi*



*a e b e se  $f(a)$  e  $f(b)$  sono valori di segno opposto, allora esiste almeno un valore  $c$  interno all'intervallo  $(a, b)$  per il quale  $f(c) = 0$ .* Questo teorema permette allora di individuare opportuni intervalli all'interno dei quali ricercare gli eventuali zeri di una funzione. Uno strumento di cui ci si può servire per tale ricerca è il metodo grafico, che evita il ricorso alle formule esplicite che forniscono le soluzioni delle equazioni polinomiali di terzo e quarto grado, poco pratiche da utilizzare, benché storicamente molto significative: ricordiamo che, generalmente, non esistono neppure formule esplicite per una generica equazione polinomiale di grado superiore al quarto.

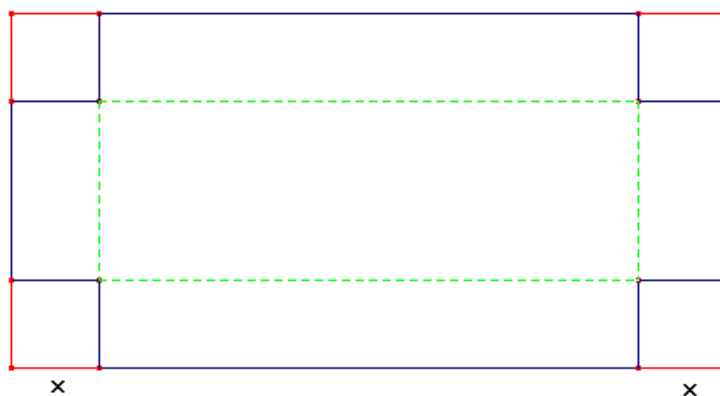
### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

La prima fase dell'attività consiste nel proporre agli studenti un semplice problema che può essere formalizzato proprio con un'equazione di terzo grado.

**Problema:** Considera un foglio di cartoncino rettangolare i cui lati hanno una lunghezza di 8 cm e di 4 cm, rispettivamente. Stabilisci come ritagliare in corrispondenza di ciascuno dei quattro angoli del foglio un quadrato, in modo da ottenere, piegando le parti laterali del cartoncino così realizzate, una scatola di volume  $10 \text{ cm}^3$ .

Partendo dalla rappresentazione del foglio rettangolare, dal quale si ritagliano quattro quadrati laterali di lato  $x$ , in primo luogo si deve definire l'insieme di variabilità dell'incognita  $x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) affinché il problema abbia senso, stabilendo una limitazione che accompagna l'intero processo di risoluzione; si verifica quindi che il volume (in  $\text{cm}^3$ ) della scatola che si può costruire secondo le istruzioni assegnate è espresso dalla formula  $x(8-2x)(4-2x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$ . Si giunge così all'equazione che risolve il problema:  $4x^3 - 24x^2 + 32x = 10$ , riconducibile a  $2x^3 - 12x^2 + 16x - 5 = 0$ .



*Dal cartoncino si ritagliano alle estremità i quattro quadrati uguali in modo da ottenere una figura con 12 lati che, piegata lungo le quattro linee tratteggiate, genera una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo.*

Figura 1

### Seconda fase

Si propone a questo punto agli studenti di verificare che, per l'equazione ricavata, non si trovano soluzioni elementari, né intere, né frazionarie, secondo quanto previsto dall'algebra elementare (le eventuali soluzioni intere o frazionarie sarebbero infatti  $\pm 1$ ,  $\pm 5$ ,  $\pm \frac{1}{2}$ ,  $\pm \frac{5}{2}$ ).

Una possibile strategia da suggerire agli studenti per affrontare il problema è la trasformazione dell'equazione in un sistema di due equazioni interpretabili graficamente nel piano cartesiano, servendosi della variabile ausiliaria  $y$ .

Si può scrivere: 
$$\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 12x^2 - 16x + 5 \end{cases}$$

Rappresentando nel piano cartesiano i grafici delle due funzioni ottenute, immediatamente si percepisce il numero dei punti di intersezione dei due grafici, che corrispondono al numero delle soluzioni del sistema e dell'equazione iniziale ad esso associata.



Figura 2

Si vede subito che le ascisse dei due punti di intersezione dei due grafici che si trovano nell'intervallo selezionato  $[0 ; 2]$  sono costituite da un valore compreso tra 0,4 e 0,5 ed un valore compreso tra 1,2 e 1,3. Il punto chiave, dal punto di vista teorico, è verificare che in tali intervalli la differenza tra i valori delle due funzioni considerate cambia segno. In effetti denominando  $y_1$  l'ordinata della prima funzione (cubica) e  $y_2$  l'ordinata della seconda funzione (quadratica), il segno di  $y_1 - y_2$  corrisponde proprio al segno della funzione di partenza. Servendosi di un'opportuna tabulazione dei valori delle due funzioni con un software tipo foglio elettronico, gli studenti possono agevolmente trovare le soluzioni con l'approssimazione desiderata, svolgendo in tal modo un esercizio di codifica di istruzioni finalizzate alla verifica di una specifica proprietà numerica. Si può ricavare ad esempio, in prima approssimazione, la seguente tabella relativa alla ricerca della prima radice, adottando un passo di discretizzazione pari a 0,1 durante la tabulazione dei dati. Sono riportati solo alcuni dei valori delle tabulazioni effettuate.

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_1 - y_2$	$dx$
				0,1
0,1	0,002	3,52	-3,518	
0,3	0,054	1,28	-1,226	
0,4	0,128	0,52	-0,392	
0,5	0,25	0	0,25	
0,6	0,432	-0,28	0,712	
0,7	0,686	-0,32	1,006	

Tabella 1

La tabella conferma l'esistenza di una soluzione tra 0,4 e 0,5. Raffinando l'indagine, portando il passo a 0,01, si ottiene immediatamente:

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_1 - y_2$	$dx$
0,4				0,01
0,41	0,137842	0,4572	-0,319358	
0,44	0,170368	0,2832	-0,112832	
0,45	0,18225	0,23	-0,04775	
0,46	0,194672	0,1792	0,01547	
0,47	0,207646	0,1308	0,07685	
0,48	0,221184	0,0848	0,13638	

Tabella 2

Miglioriamo dunque il risultato con una soluzione compresa tra 0,45 e 0,46. Ripetiamo tale operazione per la seconda radice:

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_1 - y_2$	$dx$
1,2				0,01
1,21	3,543122	3,2092	0,33392	
1,24	3,813248	3,6112	0,20205	
1,27	4,096766	4,0348	0,06197	
1,28	4,194304	4,1808	0,0135	
1,29	4,293378	4,3292	-0,035822	
1,3	4,394	4,48	-0,086	
1,31	4,496182	4,6332	-0,137018	

Tabella 3

Analizzando le due tabelle di valori si può subito dedurre che le soluzioni cercate sono espresse da valori compresi rispettivamente negli intervalli  $(0,45; 0,46)$  e  $(1,28; 1,29)$ . E' evidente che modificando il punto iniziale della tabulazione ed il relativo passo si possono valutare le soluzioni dell'equazione iniziale con una precisione crescente.

### Possibili sviluppi

L'attività offre a questo punto numerosi altri spunti didattici, che sono comunque adattabili senza eccessiva difficoltà alla situazione scolastica nella quale si opera.

In effetti, un altro interessante aspetto di calcolo, collegato per di più con l'effettivo percorso che storicamente è stato compiuto dagli algebristi del cinquecento (Cardano, Dal Ferro, Tartaglia) per giungere alle formule esatte per la risoluzione di una generica equazione polinomiale di terzo grado completa, consiste nell'osservare che una tale equazione può essere riportata mediante una sostituzione lineare opportuna ad un'equazione incompleta del tipo  $ax^3 + bx + c = 0$ , mancante cioè del termine di secondo grado. Si osserva che trovare quale sostituzione lineare consente di passare ad un'equazione di terzo grado ridotta, partendo da un'equazione completa, è già di per sé un esercizio significativo, dal momento che richiede da parte degli studenti una gestione non pedissequa del calcolo letterale, utilizzato in questo caso per ottenere uno scopo ben preciso, ma può anche diventare un semplice esercizio di verifica nel caso la sostituzione venga direttamente suggerita dall'insegnante.

Data allora un'equazione polinomiale generica di terzo grado, della forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , mediante la sostituzione lineare  $X = x + \frac{b}{3a}$ , la si può ricondurre alla forma incompleta

$aX^3 + CX + D = 0$ . Nel nostro caso si ha:  $X = x - 2$ , il che conduce all'equazione ridotta  $2x^3 - 8x - 5 = 0$ . Ovviamente, operando la sostituzione che porta alla nuova variabile  $X$ , cambia l'intervallo di ammissibilità per i valori di  $X$ , che diventa nel caso considerato l'intervallo  $(-2 ; 0)$ . Con questa nuova versione dell'equazione è possibile servirsi dello stesso grafico della funzione di terzo grado già utilizzata, insieme al grafico di una linea retta, ottenendo il sistema  $\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 8x + 5 \end{cases}$ .

La corrispondente rappresentazione grafica, ottenuta con un software geometrico, è la seguente:

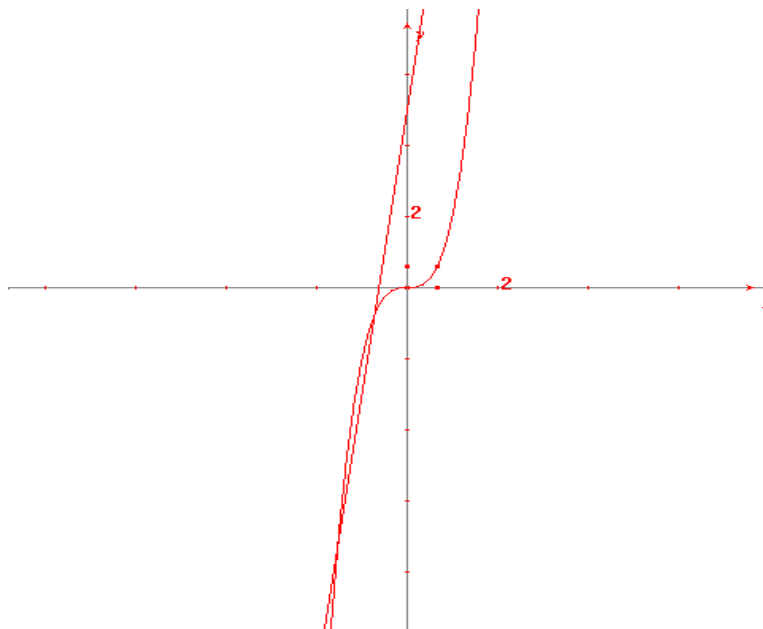


Figura 3

La nuova tabulazione, ottenuta con un software tipo foglio elettronico, è:

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_1-y_2$	$dx$
-2				0,1
-1,9	-13,718	-10,2	-3,518	
-1,6	-8,192	-7,8	-0,392	
-1,5	-6,75	-7	0,25	
-1,4	-5,488	-6,2	0,712	
-1,2	-3,456	-4,6	1,144	
-1	-2	-3	1	
-0,8	-1,024	-1,4	0,376	
-0,7	-0,686	-0,6	-0,086	
-0,6	-0,432	0,2	-0,632	
-0,5	-0,25	1	-1,25	
-0,1	-0,002	4,2	-4,202	

*Tabella 4*

(essendo  $y_1$  la funzione di terzo grado e  $y_2$  la funzione lineare) e mostra che le soluzioni ammissibili per il problema sono negli intervalli  $(-1,6 ; -1,5)$  e  $(-0,8 ; -0,7)$  rispettivamente.

Migliorando l'approssimazione si tabulano, per la prima soluzione, i seguenti valori:

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_1-y_2$	$dx$
-1,6				0,01
-1,59	-8,03936	-7,72	-0,319358	
-1,56	-7,59283	-7,48	-0,112832	
-1,55	-7,44775	-7,4	-0,04775	
-1,54	-7,30453	-7,32	0,01547	
-1,53	-7,16315	-7,24	0,07685	
-1,52	-7,02362	-7,16	0,13638	

*Tabella 5*

Dunque un valore, per la soluzione, cade tra  $-1,55$  e  $-1,54$ .

Per la seconda soluzione si tabulano, invece, i seguenti valori:

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_1-y_2$	$dx$
-0,8				0,01
-0,79	-0,98608	-1,32	-0,33392	
-0,76	-0,87795	-1,08	-0,20205	
-0,73	-0,77803	-0,84	-0,06197	
-0,72	-0,7465	-0,76	-0,0135	
-0,71	-0,71582	-0,68	0,035822	
-0,7	-0,686	-0,6	0,086	
-0,69	-0,65702	-0,52	0,137018	

*Tabella 6*

Questi insiemi di dati riportano come soluzioni per  $x$  due valori compresi rispettivamente tra  $-1,55$  e  $-1,54$  e tra  $-0,72$  e  $-0,71$ , i quali, riferiti all'incognita iniziale, sono traslati nei due intervalli  $(0,45 ; 0,46)$  e  $(1,28 ; 1,29)$ , già individuati. Ancora una volta è possibile continuare a migliorare l'approssimazione della soluzione, tabulando i valori di  $y$  servendosi di incrementi minori per la variabile indipendente  $x$ .

Tornando alla prima rappresentazione grafica, la visualizzazione grafica delle soluzioni del problema con una cubica ed una parabola può servire per valutare qualitativamente e con un certo errore di approssimazione, senza però l'ausilio delle derivate, il valore massimo del volume della scatola che si vuole costruire.

Infatti l'idea consiste nel servirsi di un software che tracci i grafici di funzioni, come ad esempio un software di geometria dinamica, per rappresentare il grafico della famiglia di funzioni  $y = 12x^2 - 16x + \frac{V}{2}$ , ottenuta dopo aver posto uguale a  $V$  il volume della scatola ed aver ottenuto il

sistema parametrico  $\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 12x^2 - 16x + \frac{V}{2} \end{cases}$ , con  $V$  ovviamente parametro positivo. La famiglia di

funzioni di secondo grado che si ricava permette di rivedere in azione il concetto di traslazione come trasformazione geometrica elementare, applicata al grafico di una parabola. La limitazione sulla variabile  $x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) individua una striscia nel piano cartesiano  $xOy$  in cui ricercare un eventuale punto di intersezione tra i due grafici delle funzioni che compongono il sistema. Nel caso della presenza del parametro  $V$ , un software di geometria dinamica offre la possibilità di visualizzare il grafico della parabola corrispondente ad un valore generico del parametro. L'attività che si propone consiste proprio in un'esplorazione diretta della configurazione dinamica che il software realizza: si può così osservare l'esistenza di un valore massimo del parametro  $\frac{V}{2}$  per il

quale si ha effettivamente un'intersezione tra i due grafici con ascissa racchiusa nell'intervallo previsto, di estremi 0 e 2. Si tratta di un'esplorazione a livello qualitativo che può al massimo fornire un valore approssimato del valore massimo del volume della scatola: l'aspetto saliente è che si coglie l'esistenza di un valore massimo per il parametro  $V$ , in corrispondenza di uno specifico valore dell'incognita  $x$ .

### Elementi di prove di verifica

1. I due punti A e B sono le intersezioni di ordinata positiva della parabola  $y = -x^2 + 4x$  con una retta parallela all'asse delle ascisse, mentre C e D sono le loro proiezioni sull'asse delle ascisse. Tra i rettangoli ABCD così individuati, si chiede di calcolare il perimetro di quello di area 6.
2. Per ricercare con un metodo iterativo le soluzioni dell'equazione  $2\log(x+2) - x = 0$ , si vogliono preliminarmente individuare gli intervalli della  $x$  in cui tale ricerca è significativa. Di quali intervalli si tratta?
3. Si verifichi che  $x^3 + 3x - 12 = 0$  ammette una sola radice  $\alpha$  compresa tra 1 e 2. Si usi poi un'approssimazione per determinare un numero  $k$ , espresso alla prima cifra decimale, tale che  $k < \alpha < k + 0,1$ .
4. Si determini, con un metodo grafico, un valore approssimato per la radice di  $f(x) = x + e^x$ .