

Approfondimenti: attività
didattiche e prove di verifica

NUMERI e ALGORITMI

Elenco delle attività

Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
Matrici e loro applicazioni	Matrici e loro proprietà		30
Numeri complessi, vettori e trasformazioni geometriche del piano	Trasformazioni geometriche	Fisica, Elettronica	35
Affrontiamo l'infinito	Filosofia	Fisica, Filosofia e Arte	47

Matrici e loro applicazioni

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche. Utilizzare strutture più complesse come vettori, liste, matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi. Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi.	Matrici e sistemi di equazioni lineari. Matrici e trasformazioni lineari. Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure Laboratorio di matematica	

Contesto

Matrici e loro proprietà.

Gli studenti conoscono già, in modo informale, il concetto di matrice per aver utilizzato la matrice dei dati rispetto a una rilevazione statistica [Matematica 2003, *Dati e previsioni*, Primo biennio]. Si tratta ora di approfondire la conoscenza delle matrici dal punto di vista della struttura (operazioni con le matrici e proprietà) e di utilizzare le matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi.

Descrizione dell'attività

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti di scrivere una matrice che rappresenti i risultati delle partite giocate in casa da tre squadre di serie A:

$$\begin{bmatrix} 14 & 7 & 3 & 4 \\ 15 & 8 & 7 & 0 \\ 15 & 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

dove gli elementi sulle righe della matrice rappresentano ordinatamente il numero totale di partite giocate in casa, il numero di partite vinte, il numero di partite perse e, infine, il numero di partite pareggiate da ciascuna squadra. Si tratta allora di una matrice con 3 righe (le 3 squadre) e 4 colonne, cioè una matrice 3×4 .

Si può poi proporre di costruire una matrice analoga che rappresenti i risultati delle partite giocate fuori casa dalle tre squadre.

Le due matrici possono essere utilizzate per visualizzare la situazione del totale delle partite giocate dalle tre squadre in casa e fuori casa, in modo da riassumere i risultati. L'insegnante condurrà in tal modo gli studenti a costruire la matrice somma. Tramite discussione coordinata dall'insegnante si può riflettere sull'operazione di somma di matrici e sulle proprietà di questa operazione.

Per ciò che riguarda l'operazione di prodotto matrice-vettore, è possibile proporre una situazione problematica di questo tipo:

Consideriamo un'azienda che immagazzina 3 tipi di merce in 2 magazzini. Le quantità immagazzinate sono descritte da una matrice 2×3 :

	merce 1	merce 2	merce 3
magazzino 1	100	500	600
magazzino 2	120	400	1000

Il valore unitario delle merci è rispettivamente: 80 €, 50 € e 10 €. Qual è il valore complessivo delle merci in ciascun magazzino?

La risoluzione del problema porta ad ottenere:

nel magazzino 1: $100 \cdot 80 + 500 \cdot 50 + 600 \cdot 10 = 39000$ €

nel magazzino 2: $120 \cdot 80 + 400 \cdot 50 + 1000 \cdot 10 = 39600$ €

Le precedenti operazioni possono essere scritte in modo strutturato proprio con il prodotto della

matrice data per il vettore dei costi unitari: $v = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 100 & 500 & 600 \\ 120 & 400 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Riprendendo l'esempio delle partite di calcio, si può utilizzare il prodotto tra una matrice e un vettore se si richiede agli studenti di determinare il punteggio totalizzato da ogni squadra, sapendo che si attribuiscono 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per il pareggio e 0 punti per ogni sconfitta.

Un altro esempio di attività può essere il seguente:

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -100 & 65 & 55 \\ -100 & 60 & 65 \end{bmatrix}$, che rappresenta (per righe) due investimenti con scadenze

0, 1, 2 anni e il vettore $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/1,08 \\ 1/1,08^2 \end{bmatrix}$, che rappresenta i corrispondenti fattori di sconto al tasso 8%,

determinare il prodotto tra la matrice e il vettore.

In questo caso, il prodotto Ax è il vettore le cui componenti sono uguali al VAN (valore attuale netto), al tasso 8%, delle due operazioni finanziarie. Il VAN è uno strumento di valutazione delle operazioni finanziarie: si tratta dell'utile (se positivo) o del costo (se negativo) di una operazione finanziaria, cioè di una sequenza di somme di denaro nel tempo. Ad esempio l'operazione -1000, 520, 550 (ai tempi 0, 1, 2) è un investimento e indica l'acquisto, al prezzo 1000, del diritto a riscuotere 520 tra 1 anno e 550 tra due anni. Qual è l'utile (o il costo) di questa operazione finanziaria? Conviene intraprenderla? La teoria del VAN dice: dipende da qual è il "costo opportunità" del soggetto, cioè il tasso al quale comunemente egli può impiegare il suo denaro. Detto i il tasso al quale può comunemente accedere per i suoi impieghi finanziari, si calcola il valore di oggi dell'intera operazione finanziaria:

$$-1000 + 520/(1+i) + 550/(1+i)^2 = -1000 + 507,32 + 523,50 = 30,81.$$

Intraprendere questa operazione finanziaria è equivalente a trovare oggi per terra un portafoglio pieno di 30,81 euro, cioè il VAN dell'operazione. Essendo il VAN riferito al valutatore, se cambia il valutatore cambia il VAN. La valutazione del VAN è fatta con la funzione della capitalizzazione composta. Si ritiene che il modello migliore di tale funzione sia quello esponenziale (che in effetti è

quello più spesso, ma non sempre, utilizzato): $f(t) = b^t$ con $b > 1$ (deve essere crescente); così un capitale iniziale C produce, dopo t anni, un montante $M(t) = C \cdot (1+i)^t$. La formula inversa ci dà $C = M(t)/(1+i)^t$.

Per parlare di prodotto matrice-matrice, possiamo introdurre un altro esempio che generalizza i precedenti.

La matrice A elenca, per righe, i flussi di un numero arbitrario di operazioni finanziarie (per esempio 3 operazioni finanziarie a 3 scadenze ciascuna)

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 121 \\ -100 & 110 & 0 \\ -100 & 10 & 110 \end{bmatrix}$$

La matrice B elenca, per colonne, i fattori di sconto calcolati ad un numero arbitrario di tassi differenti (per esempio i due tassi 0,06 e 0,08)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/1,06 & 1/1,08 \\ 1/1,06^2 & 1/1,08^2 \end{bmatrix}$$

Il prodotto delle due matrici dà il VAN delle tre operazioni finanziarie valutato al tasso 6% (nella prima colonna) e il VAN delle tre operazioni finanziarie valutato al tasso dell'8% (nella seconda colonna).

Seconda fase

Il calcolo matriciale è particolarmente utile per lo studio delle trasformazioni geometriche dal punto di vista analitico.

Le matrici si possono introdurre, una prima volta, quando si parla della traslazione dando le componenti del vettore traslazione sotto forma di matrice a una colonna. Poi si possono considerare, limitatamente alle affinità del piano con l'origine punto unito, matrici quadrate 2×2 .

Anche le operazioni tra matrici possono essere interpretate alla luce delle trasformazioni. L'insegnante può illustrare agli studenti le corrispondenze riportate nello schema seguente.

Al prodotto di trasformazioni corrisponde il prodotto di matrici

Matrici	Trasformazioni
Prodotto non commutativo	Prodotto non commutativo
matrice identica	identità
matrice inversa	trasformazione inversa

L'insegnante può richiamare le conoscenze relative ai vettori e, in particolare, mostrare come ad ogni punto del piano si possa associare un vettore, detto *vettore posizione*. Inoltre può ricordare che il generico vettore posizione si esprime come combinazione lineare dei *vettori base*:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Questo permette di passare dalla notazione analitica, già nota agli studenti, a quella matriciale, facendo notare che tale scrittura evidenzia la matrice che opera la trasformazione. In particolare all'affinità con l'origine punto unito possiamo associare una matrice quadrata 2×2 .

Ecco come tale matrice opera sui vettori base:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Risulta che le componenti dei trasformati dei vettori base sono le colonne della matrice della trasformazione. Quindi si può scrivere subito la matrice di una trasformazione se si sa come opera sui vettori base!

L'insegnante invita gli studenti a scrivere, come verifica di questa scoperta, le matrici delle trasformazioni di cui già conoscono le equazioni.

Si possono considerare, in particolare, i seguenti esempi.

Matrice associata alla simmetria S_b di asse la retta $y = x$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice associata alla simmetria S_x di asse la retta $y = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrice associata alla rotazione di 90° R_{90}

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si verifica che $S_b \cdot S_x = R_{90}$.

L'attività può proseguire lungo due diverse direzioni: a) ritrovare le equazioni di trasformazioni già note (simmetrie assiali, simmetria centrale, rotazioni in casi particolari, omotetie di centro l'origine); b) trovare equazioni di trasformazioni non conosciute (isometrie nel caso generale, similitudini, affinità).

Il collegamento con le trasformazioni può servire anche per determinare la matrice inversa. Questo porta ad esaminare il significato geometrico del determinante di una matrice.

È quindi evidente l'utilità delle matrici nella risoluzione di problemi legati alle trasformazioni. Si può riconoscere facilmente di che trasformazione si tratta, vedere subito se e come cambia l'area, determinare i punti uniti. Inoltre, quando si applica una trasformazione geometrica a una curva, è necessario invertire il relativo sistema: a tal fine è molto utile applicare la matrice inversa.

Infine l'utilizzo in geometria analitica delle trasformazioni offre l'opportunità di svolgere esercizi non banali, in particolare sulle coniche. Infatti permette di trovare equazioni di coniche non in forma normale e di riflettere sulle loro proprietà affini.

Possibili sviluppi

A riprova della versatilità dello strumento "matrice" vogliamo citare un'applicazione relativa al calcolo delle probabilità, e all'uso delle matrici di transizione.

Consideriamo una comunità divisa in occupati (O) e disoccupati (D). Da un'analisi statistica conosciamo le probabilità che, di settimana in settimana, un individuo passi da una classe all'altra, oppure resti nella stessa classe. Queste probabilità (in tutto sono 4: $O \rightarrow O$, $O \rightarrow D$, $D \rightarrow O$, $D \rightarrow D$) sono descritte da un oggetto solo, una matrice 2×2 , per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{bmatrix}$$

i cui elementi hanno il seguente significato:

- a_{11} : il 90% degli occupati al tempo 0 resta occupato al tempo 1
- a_{21} : il 10% degli occupati al tempo 0 diventa disoccupato al tempo 1
- a_{12} : il 15% dei disoccupati al tempo 0 diventa occupato al tempo 1
- a_{22} : il 85% dei disoccupati al tempo 0 resta disoccupato al tempo 1

Una matrice come questa, in cui la somma degli elementi su ciascun vettore colonna è 1, si dice *matrice di probabilità*, o *matrice stocastica*. Descrive un insieme chiuso, in cui un individuo non può uscire né entrare.

Supponiamo ora che al tempo 0 la suddivisione nella comunità analizzata sia di 900 occupati e 100 disoccupati, cioè che il *vettore di stato* al tempo 1 sia

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 900 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Allora il prodotto tra la matrice di probabilità e il vettore di stato

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 900 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 825 \\ 175 \end{bmatrix}$$

fornisce la situazione al tempo 1: 825 occupati e 175 disoccupati. Se la matrice di probabilità resta costante nel tempo allora possiamo costruire una successione di vettori di stato, definita dalla relazione

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n.$$

Problemi associati:

1) Se al tempo n il vettore di stato è $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 800 \\ 200 \end{bmatrix}$, qual era il vettore di stato al tempo $n - 1$?

2) Data la matrice di transizione A , a quale vettore di stato evolve il sistema?

3) Se consideriamo ogni settimana nuove entrate nella popolazione, descritte dal vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 55 \\ 45 \end{bmatrix}$

allora il modello cambia nel seguente modo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{b}.$$

A quale vettore di stato evolve il sistema?

Numeri complessi, vettori e trasformazioni geometriche del piano

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche.</p> <p>Utilizzare strutture più complesse come vettori, liste, matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi.</p> <p>Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate.</p>	<p>La struttura dei numeri complessi e il teorema fondamentale dell'algebra.</p> <p>Matrici e sistemi di equazioni lineari.</p> <p>Matrici e trasformazioni lineari.</p> <p>Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano.</p>	<p><u>Numeri e algoritmi</u></p> <p>Spazio e figure</p> <p>Argomentare, congetturare e dimostrare</p>	<p>Fisica</p> <p>Elettrotecnica</p>

Contesto

Trasformazioni geometriche.

Il contesto dell'attività è lo studio dei numeri complessi come ponte tra l'algebra e la geometria, in particolare per quanto riguarda il legame delle operazioni con i numeri complessi e le trasformazioni geometriche del piano.

Descrizione dell'attività

Questa attività di approfondimento può essere proposta come collegamento tra vari temi sviluppati negli anni precedenti. Ha come prerequisiti la conoscenza dell'algebra, della geometria analitica e della trigonometria, dei vettori e delle trasformazioni geometriche del piano. Il linguaggio dei numeri complessi è usato nelle applicazioni, ad esempio in elettrotecnica - indicando di solito l'unità immaginaria con j invece che con i , per non confonderla con l'intensità di corrente - e offre un esempio notevole di un tema particolarmente adatto a collegare l'algebra con la geometria.

Nella presentazione dei numeri complessi, oltre che della forma cartesiana, è particolarmente significativo avvalersi dell'uso delle coordinate polari. La presentazione sarà accompagnata da numerose e varie applicazioni; ad esempio le radici dell'unità possono essere collegate con il problema di inscrivere un poligono regolare di n lati in una circonferenza.

Inizialmente si forniranno alla classe alcune informazioni di carattere storico mostrando anche alcune applicazioni dei numeri complessi in matematica e in fisica. Indubbiamente per poter svolgere questo argomento occorre che gli studenti abbiano un'adeguata conoscenza delle funzioni goniometriche e delle funzioni esponenziali oltre che dell'algebra e della geometria analitica. Gli obiettivi specifici da perseguire con questa attività di approfondimento possono essere così schematizzati:

- Conoscere la relazione tra vettori e numeri complessi
- Sapere rappresentare un numero complesso in modo vettoriale
- Saper riconoscere i numeri complessi, e in particolare l'unità immaginaria, come particolari "operatori" nelle trasformazioni geometriche del piano
- Sapere usare le diverse rappresentazioni dei numeri complessi e le relative proprietà.

I contenuti possono essere presentati in classe utilizzando la rappresentazione grafica dei numeri complessi, con strumenti di calcolo - come le calcolatrici grafico-simbolico - oltre a software di geometria e di manipolazione simbolica. Mediante la visualizzazione dei concetti, l'uso delle tecnologie permette un apprendimento più motivante e rafforza negli allievi l'esperienza concreta su questi "oggetti matematici", permettendo in seguito di consolidare una conoscenza più approfondita del significato di questi nuovi numeri. L'utilizzo del software è motivato inoltre dalla necessità che gli allievi affrontino in modo personale e attivo le varie fasi di studio in attività di laboratorio.

Prima fase

La risoluzione di equazioni è una parte fondamentale della matematica anche dal punto di vista storico. Si possono presentare in classe, in modo sintetico, alcuni aspetti della nascita dell'algebra classica che si può collocare nel XVI secolo. All'inizio del Cinquecento in Italia il Rinascimento è in pieno sviluppo e anche la matematica occupa un posto di rilievo in questo emergere di nuove idee. È da ricordare a questo proposito la notevole concentrazione di eminenti matematici italiani e stranieri nell'Università di Bologna, dove, a breve distanza di tempo, insegnarono Luca Pacioli, Scipione Dal Ferro, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli e numerosi altri. La fama di tali maestri attirava centinaia di allievi da olttralpe.

La risoluzione delle equazioni di secondo grado con il metodo di "completamento del quadrato" era nota sin dai tempi dei Babilonesi. In Euclide questi problemi sono affrontati sotto forma geometrica (nel libro II degli *Elementi*). L'equazione cubica, se si eccettuano dei casi particolari, aveva fino ad allora sfidato i matematici. Nella soluzione delle equazioni di terzo grado si erano cimentati molti matematici greci e arabi fin dai tempi di Archimede, ma essi erano arrivati solo a risolvere dei casi particolari, senza riuscire a trovare un metodo generale.

Scipione Dal Ferro (1465-1526), professore di matematica a Bologna, riuscì a risolvere le equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ intorno al 1500; egli però non pubblicò il suo metodo risolutivo in quanto in tale periodo le scoperte venivano spesso tenute nascoste per poi sfidare i rivali a risolvere lo stesso problema.

Tale metodo fu rivelato dallo stesso Scipione Dal Ferro, alla fine della sua vita, ad un suo allievo, Antonio Maria Fior. Anche Tartaglia (soprannome di Nicolò Fontana, 1500?-1559), sembra in modo indipendente, aveva trovato un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado del tipo $x^3 + px = q$ e $x^3 + px^2 = q$ con p e q positivi. Nel 1535 fu quindi organizzata una sfida matematica tra Fior e Tartaglia. Ognuno dei contendenti propose 30 problemi che l'avversario doveva risolvere. Tartaglia risolse tutti i trenta problemi proposti da Fior, mentre Fior non riuscì a risolvere nemmeno uno dei trenta posti da Tartaglia. La notizia della brillante vittoria di Tartaglia nella sfida raggiunse Girolamo Cardano (1501-1576). Tartaglia, date le insistenze di Cardano, finì per rivelargli il suo metodo, in cambio della solenne promessa di Cardano di mantenere tale metodo segreto. Nonostante questo impegno Cardano pubblicò la sua versione del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado nella sua opera *Ars Magna* (Norimberga 1545). Lo stile di Cardano è piuttosto oscuro e la sua algebra è ancora allo stato retorico: le equazioni vengono espresse quasi completamente a parole. Tuttavia, scrivendo con il linguaggio di oggi la soluzione che Cardano fornisce dell'equazione cubica del tipo $x^3 + px = q$, si ottiene la formula seguente:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

e quella dell'equazione cubica del tipo $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

Sulla contesa tra Cardano e Tartaglia per la priorità del procedimento si è scritto molto; tuttavia è stato stabilito che il primo a trovare il metodo risolutivo per le equazioni di terzo grado è stato Scipione Dal Ferro nel 1515. In effetti Dal Ferro fu indicato proprio da Cardano nella prima pagina dell'*Ars Magna* come uno degli autori della scoperta.

La formula risolutiva delle equazioni di quarto grado fu scoperta da Ludovico Ferrari (1522-1565). Anche queste formule furono pubblicate nell'*Ars Magna* e Cardano attribuisce a Ferrari il metodo.

Il matematico che riconobbe per primo la necessità di ampliare i numeri allora conosciuti con altri numeri, fu Rafael Bombelli (1526-1573), matematico bolognese (nato a Borgo Panigale).

Bombelli, nella sua opera *L'Algebra*, il cui titolo completo è *L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica* (composta verso il 1560, ma stampata in parte solo nel 1572) raccolse e completò i risultati ottenuti in campo algebrico della prima metà del Cinquecento da diversi matematici; si propose cioè di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso *irriducibile*, cioè quando, nella formula di Cardano, si presenta la radice quadrata di un numero negativo

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Nell'*Algebra*, Bombelli si occupò del calcolo con potenze e con radici e di equazioni algebriche. A lui si deve inoltre l'introduzione degli esponenti per indicare le potenze dell'incognita. Nel libro I dell'*Algebra* Bombelli prese in esame le radici immaginarie delle equazioni, che egli chiama "*quantità silvestri*", e giunse ad operare con i numeri che noi oggi chiamiamo "complessi". Bombelli introdusse i termini *più di meno* e *meno di meno*, per indicare $+i$ e $-i$, che abbreviava nelle scritture *pdm* e *mdm*.

Bombelli stabilì le leggi formali di calcolo dei nuovi numeri, successivamente chiamati *immaginari* da Cartesio, per indicare delle soluzioni considerate fittizie e irreali, né vere né "surde" (negative). Nell'*Algebra* di Bombelli troviamo la corretta trattazione di alcune equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Cardano, Dal Ferro e Tartaglia, portano a radicali doppi coinvolgenti quantità non reali. Ad esempio, viene data la soluzione dell'equazione $x^3 = 15x + 4$ tramite la formula "di Cardano":

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}.$$

Si ottiene la somma di due radicali doppi, con radicando negativo, mentre già si sapeva, per sostituzione diretta, che $x = 4$ era l'unica radice positiva dell'equazione.

Bombelli provò che si può scrivere: $(i \pm 2)^3 = 11i \pm 2$ e quindi si poteva concludere trovando la soluzione (già nota a priori):

$$x = \sqrt[3]{11i + 2} - \sqrt[3]{11i - 2} = i + 2 - (i - 2) = 4.$$

Bombelli ha quindi il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le regole di calcolo con essi, oltre a quello di aver svolto la teoria completa delle equazioni di terzo grado, discutendo e risolvendo tutti i casi che si possono presentare, mentre Cardano e Ferrari non sviluppano una teoria completa.

Dopo Tartaglia e Cardano per quasi due secoli si studiarono le equazioni di 5° grado e di grado superiore, ma tutti i vari tentativi fatti per risolverle in modo analogo a quelle di 2°, 3° e 4° grado non portarono ad alcun risultato. Nel 1799, nella sua tesi di laurea, Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) dette una prima dimostrazione del *teorema fondamentale dell'algebra*:

Ogni equazione algebrica di grado n ha almeno una radice nel campo complesso, sia che i coefficienti siano reali o complessi.

Partendo da questo risultato, utilizzando il teorema di Ruffini, si dimostra che ogni polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi si scompone in un prodotto di n fattori alcuni dei quali sono eventualmente ripetuti:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \dots (z - \alpha_n).$$

Tuttavia, dopo i lavori di Gauss, rimaneva ancora aperta la questione se era possibile risolvere “per radicali” le equazioni algebriche di grado superiore al quarto. La risposta venne data da Paolo Ruffini (1765-1822) e Niels H. Abel (1802-1829) in uno dei più celebri teoremi della matematica (detto di Ruffini-Abel): *per $n > 4$ non si può fornire, in generale, una formula risolutiva per radicali delle equazioni algebriche.*

Sebbene i numeri complessi siano stati originariamente introdotti per risolvere le equazioni algebriche di 3° grado, essi sono stati poi ampiamente utilizzati nelle applicazioni, in particolare in fisica e in ingegneria. Un ingegnere elettrotecnico americano di origine tedesca, Charles P. Steinmetz (1865-1923), alla fine dell'Ottocento sviluppò la teoria delle correnti alternate basandosi sui numeri complessi. Perciò è stato detto che Steinmetz “ha prodotto elettricità tramite i numeri complessi”.

Seconda fase

Nella premessa storica si è accennato al motivo per cui Cartesio ha chiamato questi numeri “immaginari”. Si comprende quindi perché, nell'Ottocento, gli altri numeri sono stati chiamati “reali”. Storicamente, quindi, prima è nato il termine “numeri immaginari” e poi, più di due secoli dopo, quello di “numeri reali”. Nell'insegnamento, tuttavia, lo studio almeno intuitivo dei numeri reali precede quello dei numeri complessi.

Chiediamoci quindi: perché ampliare i numeri reali?

Come sappiamo, l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} , con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione possiede una serie di proprietà che lo rendono un campo, cioè un corpo commutativo; è inoltre dotato di una relazione d'ordine che è compatibile con tale struttura algebrica ed è continuo. Tutte queste proprietà permettono di affrontare e risolvere in \mathbb{R} una vastissima classe di problemi affrontati nella scuola secondaria superiore e oltre. Eppure, nonostante questa grande ricchezza della struttura algebrica (oltre a quella d'ordine e topologica) l'insieme \mathbb{R} può rivelarsi “insufficiente” in alcuni problemi particolari: per esempio, le equazioni:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$e^x + 1 = 0$$

non ammettono alcuna soluzione in \mathbb{R} .

Appare quindi logico tentare un “ampliamento algebrico” di \mathbb{R} , in modo da ottenere, se possibile, un insieme in cui alcuni di questi problemi possano essere risolti; questo insieme esiste e si indica con \mathbb{C} . Storicamente comunque la motivazione essenziale per l'introduzione dei numeri complessi è stata la risoluzione delle equazioni di 3° grado.

La più semplice rappresentazione di un numero complesso è quella algebrica: $z = x + iy$. I due numeri reali x e y sono rispettivamente detti *parte reale* e *coefficiente della parte immaginaria* del numero complesso considerato. Il prodotto iy è detto *parte immaginaria* di $x + iy$; talvolta si indica direttamente il numero reale y come *parte immaginaria* di $x + iy$. Più correttamente, ma in modo formale, un numero complesso deve essere definito come una coppia ordinata di numeri reali

(x, y) . Con tale scrittura, più astratta, occorre dare la definizione di uguaglianza tra due numeri complessi e introdurre l'unità immaginaria i , identificandola con la coppia $(0,1)$.

E' utile definire a questo punto anche il numero complesso coniugato di un numero $z = a + ib$ come quel numero complesso, indicato con \bar{z} , che ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta: $\bar{z} = a - ib$. Si definiscono poi le operazioni di addizione e moltiplicazione. Si rivedono sinteticamente le definizioni e le proprietà delle operazioni.

Addizione in \mathbf{C} (legge di composizione interna a \mathbf{C}):

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Questa operazione ha le seguenti proprietà:

- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro $(0 + i0)$ che si può indicare con il simbolo 0 .
- Ogni elemento $z = a + ib$ ammette in \mathbf{C} un "simmetrico" rispetto all'addizione ($-z = -a - ib$) che si chiama *opposto* di $a + ib$.

Moltiplicazione in \mathbf{C} (legge di composizione interna a \mathbf{C}):

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Questa operazione ha le seguenti proprietà:

- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro $(1 + i0)$ che si può indicare con il simbolo 1 .
- Ogni elemento $z = a + ib$, con a e b non contemporaneamente nulli, ammette in \mathbf{C} un "simmetrico" rispetto alla moltiplicazione, che si chiama *reciproco* di $a + ib$, dato da:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Tra addizione e moltiplicazione esiste una "regola di convivenza", ovvero la *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*: $(u + v) \cdot z = u \cdot z + v \cdot z$.

Con queste operazioni e proprietà l'insieme \mathbf{C} si dice essere un *campo*. La sottrazione in \mathbf{C} è introdotta grazie alla presenza dell'opposto di un numero complesso, ma si tratta di un'operazione poco interessante; la "vera" operazione è l'addizione. Analogo discorso per la divisione in \mathbf{C} . La divisione in \mathbf{C} è introdotta grazie alla presenza del reciproco di un numero complesso (non nullo).

La scrittura $\frac{a + ib}{c + id}$ (con c e d non entrambi nulli) indica il seguente prodotto: $(a + ib) \cdot \frac{1}{c + id}$.

Analogie e differenze tra \mathbf{R} e \mathbf{C} . Con le operazioni di addizione e moltiplicazione \mathbf{R} e \mathbf{C} sono entrambi campi, con le stesse proprietà elencate in precedenza, ma in \mathbf{C} non è possibile definire alcuna relazione di ordine compatibile con la struttura algebrica di \mathbf{C} .

La rappresentazione algebrica dei numeri complessi permette anche di definire la potenza di un numero complesso, ma tale definizione si rivela scomoda per questa operazione e ancor di più se si vuole affrontare il problema di trovare le radici di un numero complesso.

Il piano di Gauss e la rappresentazione cartesiana dei numeri complessi. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi x e y , e un numero complesso $z = x + iy$, i numeri reali x e y si possono interpretare come coordinate cartesiane del punto P , detto "affissa" o "indice" di z rispetto alle rette OU e OV .

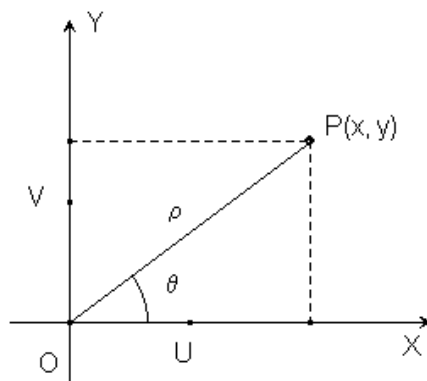


Figura 1

Si osserva che $z = x + iy$. Il piano ottenuto si chiama piano di (Argand-) Gauss. Viene così stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i numeri complessi. L'asse delle ascisse viene anche chiamato asse reale e quello delle ordinate asse immaginario. Dal punto di vista geometrico il modulo $|z|$ di un numero complesso rappresenta la distanza del punto P dall'origine. Il valore assoluto della differenza tra due numeri complessi $|z_1 - z_2|$ rappresenta la distanza dei punti che rappresentano i numeri z_1 e z_2 . Il numero $\bar{z} = x - iy$ è rappresentato geometricamente dal simmetrico di P rispetto all'asse delle x.

Con l'uso della rappresentazione geometrica dei numeri complessi è possibile proporre molti esercizi e problemi che collegano la geometria con i numeri complessi.

Rappresentazione trigonometrica (o polare) dei numeri complessi. Le osservazioni precedenti permettono di scrivere il numero complesso in forma trigonometrica:

$$z = \overline{OP} = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ si chiama *modulo* del numero complesso z e l'angolo θ si chiama *anomalia* o *argomento* del numero complesso. Quindi si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Il modulo ρ è la distanza tra il punto P e l'origine degli assi e l'anomalia θ è l'angolo formato tra il segmento OP e l'asse delle ascisse. Mentre il numero ρ è univocamente determinato, l'argomento θ è determinato a meno di un multiplo (intero) di 2π .

La moltiplicazione di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica diventa particolarmente significativa. Si ha: $z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

che fornisce: $z = \rho_1 \rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$. Quindi i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

Analogamente, il risultato della divisione tra due numeri complessi ($z_2 \neq 0$) espressi in forma trigonometrica, diviene:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Si deve fare dunque il quoziente tra i moduli e la sottrazione tra gli argomenti. Quindi i moduli hanno una struttura moltiplicativa e gli argomenti una struttura additiva.

Sfruttando la formula della moltiplicazione, si può dimostrare per induzione la formula per calcolare la potenza con esponente intero di un numero complesso, detta *formula di De Moivre* (Abraham De Moivre, 1667-1754). Se $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$, la potenza è data da

$$w = z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)].$$

Quest'ultima formula permette di determinare la potenza di un numero complesso in modo più facile rispetto al calcolo della potenza in forma algebrica.

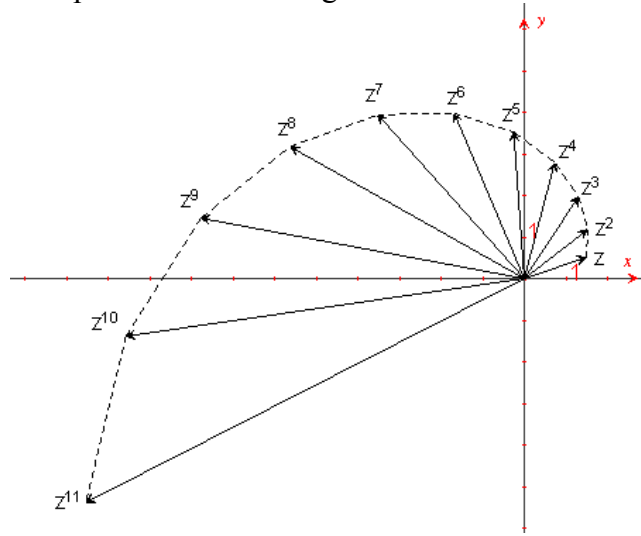


Figura 2

Utilizzando la formula di De Moivre si può dimostrare che ogni numero complesso non nullo z e per ogni numero naturale n , esistono n radici n -esime di z , ovvero esistono n numeri complessi w tali che $w^n = z$. Se $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$, allora si dimostra che le radici n -esime di z sono date dalla formula seguente:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Se rappresentiamo tali radici nel piano complesso si ottengono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di centro l'origine degli assi O e raggio $\sqrt[n]{\rho}$. Ad esempio le radici quinte del numero -32 sono rappresentate dai vertici del pentagono regolare della figura seguente.

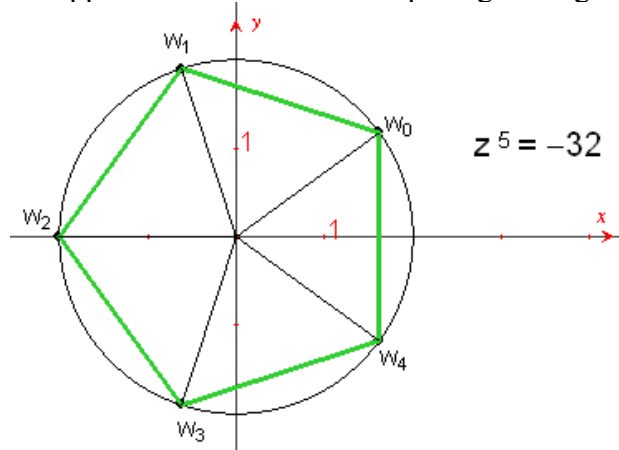


Figura 3

Quindi possiamo concludere che: *ogni numero complesso $z \neq 0$ ammette n radici n -esime distinte.* Nel caso particolare in cui $z=1$, si ottengono le radici n -esime dell'unità:

$$\varepsilon_{k,n} = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Esse hanno tutte modulo 1 e argomento che è un multiplo di $2\pi/n$ e le loro immagini nel piano di Argand-Gauss sono date dai vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine degli assi e di raggio 1.

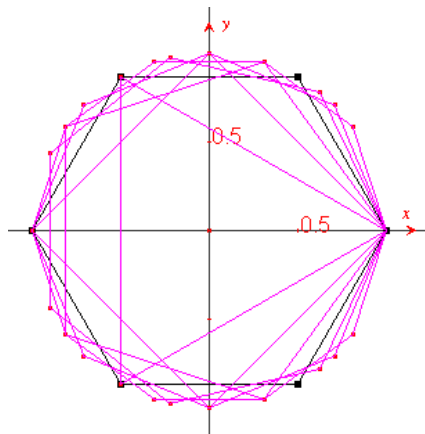


Figura 4

Una delle radici n -esime è 1 (per ogni n); tutte le altre si ottengono da una potenza della radice (ottenuta per $k=1$):

$$\varepsilon_{1,n} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Le usuali regole per il calcolo dei radicali devono essere riviste nel campo complesso. Ad esempio vale la seguente regola $(\sqrt[n]{z})^n = z$, ma non vale nell'ordine inverso; si può soltanto scrivere, nel senso della teoria degli insiemi, $z \in \{\sqrt[n]{z^n}\}$.

Terza fase

Un altro modo di rappresentare i numeri complessi, che può essere proposto in questa attività di approfondimento, è quello vettoriale. In questa rappresentazione dei numeri complessi si considerano i vettori applicati nell'origine del piano. Si fissa nel piano l'usuale verso antiorario come verso positivo delle rotazioni. Si fissa anche un vettore unitario di riferimento. Possiamo chiamare *piano complesso* un piano in cui sono fissati:

- 1) un punto origine O ;
- 2) un vettore non nullo \overrightarrow{OU} (vettore unitario);
- 3) il verso positivo delle rotazioni attorno al punto O (origine).

Se si moltiplica un qualunque vettore \overrightarrow{OA} per un numero reale non negativo ρ , e si ruota il vettore \overrightarrow{OP} ottenuto attorno all'origine O di un angolo orientato θ (in radianti), si ottiene il vettore \overrightarrow{OB} .

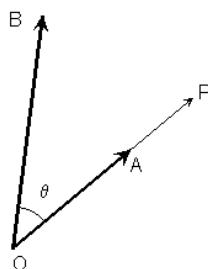


Figura 5

Possiamo quindi identificare un numero complesso, di modulo ρ e argomento θ , con un operatore che ad ogni vettore applicato nell'origine \overrightarrow{OA} associa il vettore \overrightarrow{OB} ottenuto nel modo detto. Un numero complesso z è dunque un operatore nel piano complesso che a ogni vettore \overrightarrow{OA} fa corrispondere un vettore \overrightarrow{OB} :

$$\begin{aligned} z: C &\longrightarrow C \\ z: \overrightarrow{OA} &\longrightarrow \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

Possiamo scrivere che $\overrightarrow{OB} = z \cdot \overrightarrow{OA}$.

Un numero complesso è quindi costituito da una coppia di elementi, così formata:

- il primo elemento è un numero reale non negativo ρ che indica la “dilatazione” (o “contrazione”) del modulo del vettore a cui è applicato z ; il numero ρ determina una omotetia di centro l'origine O ;
- il secondo è un numero reale qualunque θ che indica il verso e la misura (in radianti) della rotazione che il vettore iniziale deve effettuare attorno all'origine degli assi O .

In sostanza, questa definizione identifica il prodotto per un numero complesso con una *roto-omotetia*, ovvero con la composizione di un'omotetia di rapporto ρ e centro O (origine degli assi) e di una rotazione attorno all'origine di un angolo θ . Tale definizione è del tutto equivalente a quella polare di un numero complesso.

In coerenza con quanto detto in precedenza, due numeri complessi si diranno uguali se hanno moduli uguali e argomenti che differiscono per un multiplo intero di 2π . In questa interpretazione, il modulo di un numero complesso è la lunghezza del vettore \overrightarrow{OP} che rappresenta il numero complesso z .

Si può poi procedere ridefinendo la somma di due numeri complessi, il prodotto, la potenza e il quoziente. L'addizione, in particolare, coincide con la “regola del parallelogramma” per determinare la somma di due vettori.

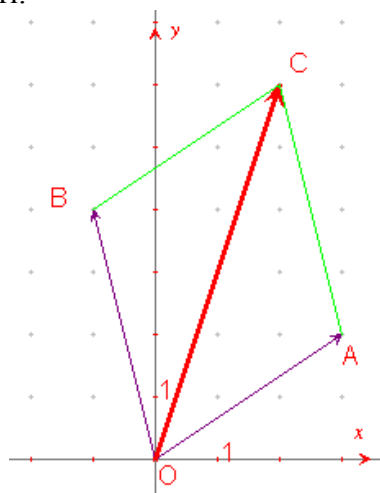


Figura 6

Fissato un numero complesso $z_0 = a + ib$, allora la somma di z_0 con un numero complesso $z = x + iy$ equivale a traslare il punto $P(x, y)$ di un vettore \overrightarrow{OP} di componenti (a, b) . Sinteticamente possiamo dire che la trasformazione $T: z \longrightarrow z_0 + z$ è una traslazione del piano.

Per il prodotto si ottiene la regola già vista in precedenza: il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli e l'argomento è uguale alla somma degli argomenti. Si noti però che i vettori devono sempre essere applicati all'origine.

Se $\rho = 1$, un numero complesso u è rappresentato da un vettore unitario applicato nell'origine degli assi. In questo caso il numero complesso può essere scritto nel seguente modo:

$$u = \cos \theta + i \cdot \sin \theta.$$

Il prodotto di un generico numero complesso z per u determina una rotazione di angolo θ di centro l'origine O . Quindi la trasformazione $R: z \longrightarrow z \cdot u$ è una rotazione del piano di centro O .

Il numero complesso z_1 , ridotto soltanto alla sua parte reale può essere scritto nel seguente modo:

$$z_1 = \rho.$$

Il prodotto di un generico numero complesso z per z_1 determina un'omotetia di centro l'origine O e di rapporto ρ . Quindi la trasformazione $H: z \longrightarrow \rho \cdot z$ è un'omotetia del piano di centro O .

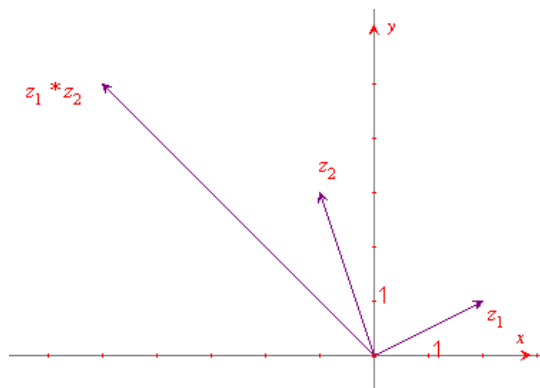


Figura 7

In questa rappresentazione è particolarmente interessante il ruolo dell'unità immaginaria i , che può essere interpretata come una rotazione in senso antiorario di un angolo retto attorno all'origine.

Questa interpretazione dei numeri complessi stabilisce un legame molto interessante tra numeri complessi e le trasformazioni geometriche del piano ed ha molte applicazioni in matematica oltre che in fisica e nell'elettrotecnica, in particolare nell'analisi dei circuiti elettrici in corrente alternata.

Trasformazione del piano	Numero complesso che definisce la trasformazione	Applicazione di \mathbb{C} in \mathbb{C}
Traslazione	$z_0 = a + ib$	$T: z \longrightarrow z + z_0$
Rotazione di centro O	$u = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$	$R: z \longrightarrow z \cdot u$
Omotetia di centro O	$w = \rho, \rho \in \mathbb{R}_0^+$	$H: z \longrightarrow \rho \cdot z$
Roto-omotetia di centro O	$w = \rho(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$	$W: z \longrightarrow z \cdot w$
Simmetria assiale di asse x		$S: z \longrightarrow \bar{z}$
Simmetria centrale rispetto a O	$w = -1$	$S: z \longrightarrow -z$
Rotazione di 90° di centro O con verso antiorario	$w = i$	$S: z \longrightarrow i \cdot z$

Sarà tuttavia importante far notare agli studenti che vi è un limite alla rappresentazione dei numeri complessi come vettori applicati nell'origine. Mentre l'addizione ha una perfetta analogia con la somma di vettori (applicati in O), la moltiplicazione non possiede analogie con il prodotto scalare e il prodotto vettoriale. La moltiplicazione di numeri complessi è un'operazione che restituisce un numero complesso; è quindi un'operazione che si chiama "interna" in quanto si ottiene un elemento che è ancora un numero complesso. Nell'insieme dei vettori è invece definito il prodotto scalare, che non è un'operazione interna: il prodotto scalare di due vettori è un numero e non un vettore. Nell'insieme dei vettori del piano è anche definito il prodotto vettoriale di due vettori, che è un vettore, ma tale vettore non appartiene al piano.

Quarta fase

I numeri complessi si possono rappresentare anche in forma esponenziale e questo tipo di rappresentazione è una delle più interessanti dal punto di vista applicativo, ma non semplice da introdurre nella scuola secondaria superiore. In questa rappresentazione si sfruttano le proprietà della funzione esponenziale per rendere più veloci i calcoli con i numeri complessi. La rappresentazione è basata sulla seguente definizione (ricavata dallo sviluppo in serie delle funzioni seno e coseno) valida per un numero complesso di modulo unitario:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Generalizzando si definisce:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Queste idee e notazioni sono state introdotte da Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783). Si possono ricordare inoltre le formule di Eulero:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

che introducono un legame inaspettato tra le funzioni trigonometriche e quelle esponenziali nel campo complesso. In questo contesto è opportuno ricordare la “più bella equazione della matematica”, trovata anch’essa da Eulero, che stabilisce una relazione tra le cinque più importanti costanti della matematica (0, 1, π , e , i):

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Dato un numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$, possiamo dare una interpretazione geometrica al prodotto $ze^{i\alpha}$. Si ottiene: $ze^{i\alpha} = \rho e^{i\theta} e^{i\alpha} = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$. La figura seguente suggerisce che tale moltiplicazione determina una rotazione del vettore \overrightarrow{OA} che rappresenta il numero z , di un angolo α in senso antiorario (se $\alpha > 0$).

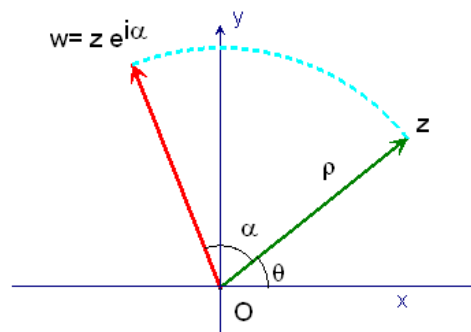


Figura 8

Si può dunque pensare al numero complesso $e^{i\theta}$ come un *operatore* che determina una rotazione attorno all’origine di un angolo α . Questo significato della moltiplicazione per un numero complesso di modulo unitario è particolarmente utile in tutte le applicazioni dei numeri complessi. Con questa interpretazione dei numeri complessi è facile allora spiegare l’equazione $e^{i\pi} + 1 = 0$. Il numero complesso $e^{i\pi} = -1$ perché rappresenta la rotazione del vettore 1 di un angolo π . Si ottiene dunque il numero complesso -1 .

Elementi di prove di verifica

1. I vertici A, B e C di un triangolo sono rappresentati dai numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$ e $z_3 = 1 + 6i$. Dimostrare che il triangolo ABC è isoscele e determinare il perimetro e l'area.
2. Descrivere e rappresentare i luoghi geometrici dei punti del piano rappresentati dalle seguenti equazioni e disequazioni:
(a) $|z| = 2$ (b) $|z - i| = 1$ (c) $|z - 2| + |z + 2| = 6$ (d) $|z| \leq 1$ (e) $|z - 1| \geq 3$.
3. Disegnare le figure del piano rappresentate dalle seguenti equazioni:
(a) $z \cdot \bar{z} = 9$ (b) $z + \bar{z} = 6$ (c) $\bar{z} = z + 6i$.
4. Risolvere l'equazione: $4z^2 - 2(1 + i)z + i = 0$.
5. Risolvere l'equazione $z^3 + 27 = 0$ e rappresentare le soluzioni nel piano complesso.
6. Determinare tutte le radici complesse dell'equazione $z^4 + z^2 + 1 = 0$ e rappresentarle nel piano complesso.
7. Calcolare le radici nel campo complesso della seguente equazione: $z^6 + i = 0$. Rappresentare nel piano complesso le soluzioni. Trovare l'area e il perimetro del poligono ottenuto ed il raggio della circonferenza circoscritta.
8. Si consideri il numero complesso $z = 1 - i$. Calcolare z^5 e rappresentare nel piano le potenze z , z^2 , z^3 , z^4 , z^5 .

Affrontiamo l'infinito

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche. Stabilire se una divisione (frazione) dà luogo a un numero decimale periodico o non periodico. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. In casi semplici, determinare il limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 (finito o infinito). Possedere il senso intuitivo di "limite di una successione". Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre.	Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Approfondimento del concetto di limite.	<u>Numeri e algoritmi</u> Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Laboratorio di matematica	Fisica Filosofia Arte

Contesto

Filosofia.

Questa attività si colloca nel contesto delle problematiche filosofiche, di particolare rilevanza storica, che costituiscono un punto di partenza per un approccio all'infinito.

L'attività, introdotta in una quinta classe, ha lo scopo di introdurre le problematiche relative all'infinito, richiamando vari concetti già affrontati negli anni precedenti.

Il punto di partenza è costituito dal classico paradosso di Achille e la tartaruga, presentato tramite la lettura di un testo di storia della filosofia che illustri il pensiero di Zenone, seguita da una proposta di lavoro che, attraverso l'analisi delle somme parziali, conduca a comprendere come la somma di infiniti termini possa essere finita.

Descrizione dell'attività

L'attività consente di richiamare alcune conoscenze di filosofia e di matematica (successioni) apprese negli anni precedenti e di approfondirle con un approccio intuitivo al concetto di limite.

Prima fase

Si propone agli studenti la lettura del seguente brano:

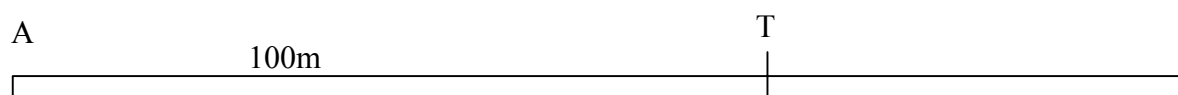
Zenone di Elea, allievo di Parmenide vissuto tra la fine del VI e l'inizio del V secolo, ci viene presentato dalla tradizione come un pugnace difensore delle idee del maestro. La teoria parmenidea dell'immutabilità, unità e indivisibilità dell'essere veniva attaccata in nome del "senso comune" che attesta invece la realtà del divenire, della molteplicità e della divisibilità. Zenone si propone di difendere la dottrina del maestro, dimostrando

che se si assumono tesi contrarie a quelle eleatiche, da esse derivano conseguenze assurde.

Zenone avrebbe ideato quaranta paradossi - argomenti logicamente validi, le cui conclusioni vanno contro (parà) l'opinione comune (doxa) - a sostegno della teoria dell'unità e indivisibilità dell'essere, e quattro contro il movimento. Questi paradossi utilizzano una forma di dimostrazione, quella per assurdo, che consiste nell'assumere provvisoriamente un'ipotesi, nello svolgerla logicamente, fino a dedurne una contraddizione, un assurdo appunto. La conclusione, che è necessariamente falsa, prova che la stessa ipotesi iniziale deve essere tale, e permette così di stabilire la validità dell'opinione contraria. Per il ricorso a questo tipo di argomentazione, Zenone fu definito "inventore della dialettica", intesa come "arte della confutazione".

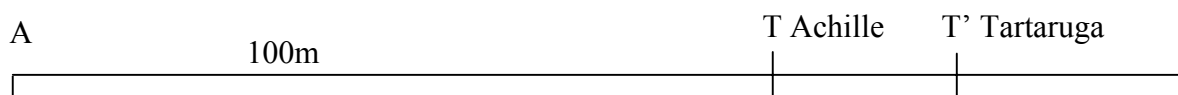
Seconda fase

Dopo la lettura del brano l'insegnante propone agli studenti il paradosso di Achille e la tartaruga. Achille e la Tartaruga si sfidano ad una gara di corsa lungo un percorso rettilineo da A verso destra.



Achille è ben noto come Piè Veloce, mentre la Tartaruga ha come peculiarità la lentezza. Entrambi stabiliscono, perciò che la Tartaruga parta da T con un vantaggio di 100 m; al via entrambi i concorrenti partono; Achille vincerà la gara se riuscirà a raggiungere la Tartaruga.

Achille corre 10 volte più veloce della Tartaruga e quindi in breve tempo giungerà da A (punto di partenza di Achille) in T (punto di partenza della Tartaruga); ma in quel periodo di tempo, per quanto lentamente, la Tartaruga avrà compiuto un tratto di strada da T a T' pari a 10 m



Achille non si ferma e prosegue la corsa, "volando" oltre T verso T'; in un battibaleno giunge in T', ma in quel periodo di tempo che è servito ad Achille a compiere lo spostamento TT', la Tartaruga avrà compiuto il tragitto T'T", pari a 1 m.

La corsa prosegue; ad ogni percorso rapidamente effettuato da Achille, la Tartaruga compie un percorso che è sì la decima parte di quello di Achille, ma che tuttavia è pur sempre maggiore di zero.

Achille dunque raggiungerà la Tartaruga?

Per risolvere il paradosso l'insegnante invita gli studenti a svolgere la seguente attività, eventualmente utilizzando una calcolatrice grafico-simbolica:

1. Costruire un'espressione che permetta di esprimere la distanza percorsa da Achille.
2. Calcolare le prime quattro somme finite parziali S_1 , S_2 , S_3 e S_4 e la somma dei primi n termini S_n .
3. Tracciare il grafico della successione S_n . Che andamento presenta?
4. Calcolare la somma S_∞ degli infiniti termini.

L'insegnante sollecita una discussione tra gli studenti per cercare di capire quando una somma di infiniti termini possa dare un risultato finito.

Per raggiungere la tartaruga Achille deve percorrere infiniti tratti rettilinei, la cui lunghezza in metri è:

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots = 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots \right)$$

Costruiamo la successione che rappresenta le somme parziali dell'espressione indicata in parentesi:

$$S_1 = 1$$

1° termine

$$S_2 = 1 + \frac{1}{10}$$

somma del 1° e 2° termine

$$S_3 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$$

somma del 1°, 2° e 3° termine

$$S_4 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$$

somma del 1°, 2°, 3° e 4° termine

·
·

$$S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \quad \text{somma del 1°, 2°, 3°, 4°, \dots ed n-esimo termine.}$$

Moltiplicando la S_n per $\frac{1}{10}$ si ottiene:

$$\frac{1}{10} S_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n}$$

e sottraendo il risultato a S_n si ha:

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{10} S_n &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} \right) \\ \left(1 - \frac{1}{10} \right) S_n &= 1 - \frac{1}{10^n} \\ S_n &= \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto l'espressione che permette di calcolare il valore della somma dei primi n termini della successione (al variare di n appartenente all'insieme dei numeri naturali positivi).

Come diventa S_n se n “*tende all'infinito*”? L'espressione $\frac{1}{10^n}$ diventa sempre più piccola, cioè “*tende a zero*” e quindi si può ritenere che S_n “*tenda a* $\frac{10}{9}$ ”.

Possiamo concludere che Achille raggiungerà la tartaruga quando avrà percorso $100 \cdot \frac{10}{9}$ metri, cioè $111, \bar{1}$ metri. La somma di infiniti termini può essere finita!

Terza fase

Le problematiche relative all'infinito possono essere ulteriormente approfondite con lo studio di una delle possibili approssimazioni di π scoperte da Eulero.

L'insegnante avrà l'opportunità di collocare storicamente Leonhard Euler (1707-1783), uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.

Eulero scoprì la seguente formula:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

da cui si ottiene:

$$\pi = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots}$$

Anche in questo caso si tratta di una somma di infiniti termini che dà come risultato un numero finito.

L'insegnante propone agli studenti di calcolare i primi valori di tale approssimazione, evidenziando che la convergenza è comunque molto lenta.

Quarta fase

In collegamento con la storia dell'arte, dall'osservazione di alcuni quadri di M. C. Escher (1898-1972) [famoso grafico olandese del Novecento] si possono trarre ulteriori considerazioni relative all'infinito. In particolare l'insegnante propone agli studenti di osservare l'opera dal titolo "Limite del quadrato" dello stesso autore considerandone la struttura geometrica. Ogni lato del quadrato di partenza è sostituito con due quadrati di lato metà. Questa procedura viene successivamente iterata e permette all'artista di ripetere il motivo pittorico mantenendo le medesime proporzioni (si tratta infatti di una similitudine).

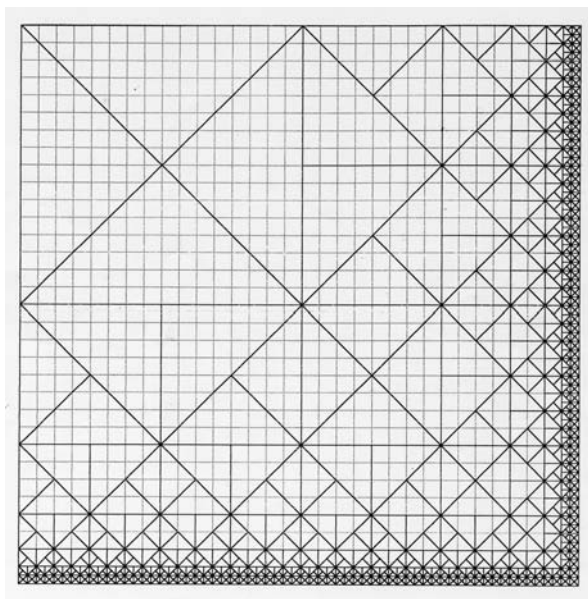


Figura 1

L'analisi della struttura darà l'opportunità di discutere sulle procedure utilizzate nell'opera e di illustrare, in collaborazione con il docente di storia dell'arte, la figura del pittore e la sua capacità di anticipare alcuni aspetti matematici che saranno scoperti solo in seguito. È il caso, per esempio, dei frattali, enti geometrici che possono essere definiti utilizzando procedure ricorsive.

Possibili sviluppi

La questione delle problematiche legate all'infinito si può approfondire presentando altri paradossi, che sono motivanti per gli studenti e ricchi di implicazioni epistemologiche e di opportunità di collegamenti interdisciplinari.

Un altro possibile sviluppo è quello della sistemazione degli insiemi numerici e dell'analisi della loro cardinalità. È opportuno affrontare tali questioni anche dal punto di vista storico mostrando le diverse tappe dell'evoluzione del concetto di infinito dai Greci a Cantor (cfr. *Probabilità nel continuo*, percorso di consolidamento Vari tipi di probabilità).

Elementi di prove di verifica

1. Cosa significa il termine paradosso?
2. In cosa consiste il paradosso di Zenone?

3. Spiega il significato della seguente scrittura:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{3}{2}$$

4. Calcola $\frac{1}{3} \cdot 3$ e $0,\bar{3} \cdot 3$. I risultati sono uguali? Giustifica la risposta.

Riferimenti bibliografici

Bussagli, M., (2004), *Escher*, Giunti, Firenze.

Cioffi, F.; Gallo, F.; Luppi, G.; Vigorelli, A.; Zanette, E., (1998), *Il testo filosofico. Storia della filosofia: autori, opere, problemi*, Bruno Mondadori, Milano.

Delahaye, J. P., (2003), *L'affascinante numero π* , Ghisetti e Corvi, Milano.

Lombardo-Radice, G.; Mancini-Proia, L. (1979), *Il metodo matematico*, vol.3, Principato, Milano.

Impedovo, M., (2005), *Matematica generale con il calcolatore*. Springer Verlag Italia, Milano.

SPAZIO e FIGURE

Elenco delle attività

Titolo	Contesto	Collegamenti esterni	Pagina
Dalla geometria alle geometrie	Modelli	Filosofia Fisica Disegno Storia dell'arte	56
Qual è la distanza tra Roma e New York?	Geometria della sfera	Geografia	65
Ombre, stiramenti, equazioni	Trasformazioni geometriche	Disegno Storia dell'arte	71

Dalla geometria alle geometrie

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi. Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate. Analizzare le caratteristiche del V postulato di Euclide e conoscere la nascita delle geometrie non euclidee; conoscere nelle loro linee essenziali i modelli di geometria non euclidea (Beltrami-Klein, Poincaré, Riemann).	Geometria del cilindro e del cono. Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine). L'assioma della parallela nel sistema assiomatico di Euclide; i primi elementi delle geometrie non euclidee attraverso modelli.	<u>Spazio e figure</u>	Filosofia Fisica Storia dell'arte Disegno

Contesto

Modelli.

Il contesto è quello dei piani “non euclidei”. L'attività, realizzata attraverso metodologie esplorative, propone un tema rilevante nello sviluppo della matematica e può anche essere utilizzato per approfondire la nozione di sistema ipotetico-deduttivo e di modello matematico.

Descrizione dell'attività

Gli strumenti di cui avvalersi come supporto all'attività didattica sono i software di geometria.

Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata della geometria euclidea, delle isometrie e delle similitudini.

Prima fase

Dopo aver presentato una sintesi degli *Elementi* di Euclide, sul suo contenuto e sulla struttura assiomatica, si rivisitano alcuni teoremi riguardanti la similitudine nel piano, in particolare quelli sulle tangenti e le secanti a una circonferenza, come introduzione allo studio dell'inversione circolare. Riportiamo l'enunciato di questi teoremi.

Teorema (della secante e della tangente). *Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante, il segmento di tangente è medio proporzionale fra i due segmenti di secante compresi tra quel punto e le sue intersezioni con la circonferenza.*

Teorema (delle secanti). (a) *Se due corde in una circonferenza si intersecano, i loro segmenti sono in proporzione* (essendo estremi e medi della proporzione, rispettivamente, segmenti della stessa corda).

(b) *Se da un punto esterno si conducono due secanti ad una circonferenza, i segmenti di esse compresi fra codesto punto e le intersezioni con la circonferenza sono in proporzione* (essendo rispettivamente i medi e gli estremi della proporzione i segmenti appartenenti ad una stessa secante).

Si passa quindi allo studio elementare dell'inversione circolare con l'ausilio di un software di geometria, che mette a disposizione, accanto alle altre trasformazioni geometriche del piano, anche l'inversione circolare. Lo studio dell'inversione circolare è utile come introduzione al modello (del "disco") di piano iperbolico di Poincaré.

L'inversione circolare fornisce un interessante esempio di trasformazione geometrica che, almeno in generale, non trasforma rette in rette. Gli studenti conoscono già le isometrie, le similitudini e le affinità, sia dal punto di vista sintetico che analitico. L'inversione circolare del piano rispetto ad una circonferenza possiede alcune proprietà che hanno una qualche analogia con la simmetria assiale rispetto ad una retta nel piano. Le simmetrie assiali possono essere chiamate "inversioni" del piano rispetto ad una retta, così come le inversioni circolari si possono pensare, in prima approssimazione, come corrispondenze che a ogni punto esterno P a una circonferenza di centro O fanno corrispondere un punto P' ad essa interno - e viceversa - in modo che $OP \cdot OP' = R^2$, dove R è il raggio della circonferenza ω (Figura 1).

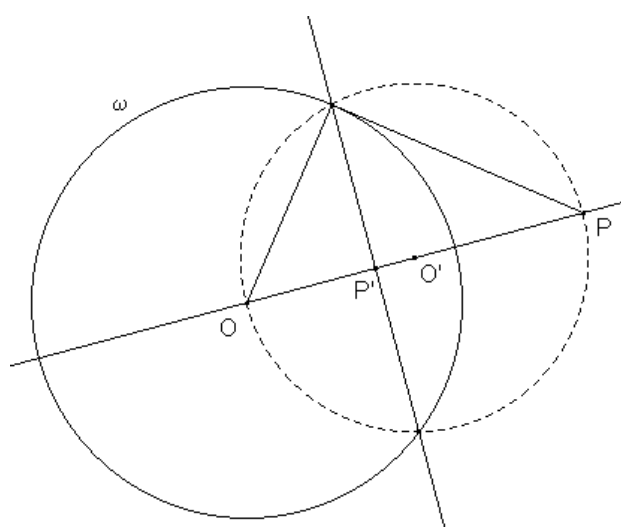


Figura 1

Con l'aiuto di un software di geometria si possono studiare in modo dinamico e interattivo le proprietà dell'inversione circolare. Tra le più importanti proprietà si possono ricordare le seguenti:

- i punti di ω si trasformano in se stessi
- le rette passanti per O si trasformano in se stesse
- le rette non passanti per O si trasformano in circonferenze per O e viceversa
- le circonferenze non passanti per O si trasformano in circonferenze.

Si può inoltre scoprire che l'inversione circolare, analogamente a quello che succede in una riflessione rispetto ad una retta nel piano, è una trasformazione che inverte l'ordinamento su una data curva chiusa. Usando un'animazione si vede ad esempio (Figura 2) che mentre P descrive una circonferenza con verso antiorario, il punto P' descrive la circonferenza immagine con verso orario.

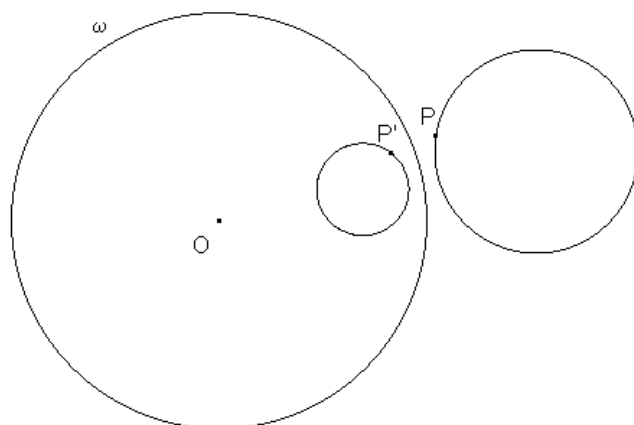


Figura 2

Si introduce ora la nozione di circonferenze ortogonali: *due circonferenze si dicono ortogonali se nei loro punti di intersezione le rette tangenti ad esse sono perpendicolari.*

Data una circonferenza c e due punti A, B interni ad essa, si presenta agli studenti la costruzione della circonferenza ortogonale a c passante per i due punti dati:

- inversione circolare del punto A rispetto alla circonferenza ω : si ottiene il punto A'
- asse del segmento AA' e asse del segmento AB ; intersecando i due assi si ottiene il punto O' ;
- si traccia la circonferenza γ di centro O' e passante per A e B .

Dimostriamo che γ è ortogonale alla circonferenza ω (Figura 3). Chiamiamo R il raggio della circonferenza ω ed r il raggio della circonferenza γ . Poiché A e A' sono inversi rispetto a ω , si ottiene:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2.$$

Analogamente si ha:

$$\overline{OC} \cdot \overline{OD} = (\overline{OO'} + r) \cdot (\overline{OO'} - r) = R^2.$$

Si ottiene pertanto:

$$\overline{OO'}^2 - r^2 = R^2.$$

Osservando che $\overline{OT} = R$, si ottiene, $\overline{OO'}^2 - \overline{OT}^2 = R^2$, ovvero $\overline{OO'}^2 = \overline{OT}^2 + R^2$. Quindi il triangolo $OO'T$ (per l'inverso del teorema di Pitagora) è un triangolo rettangolo e OT è perpendicolare $O'T$. La circonferenza ω è pertanto ortogonale alla circonferenza γ .

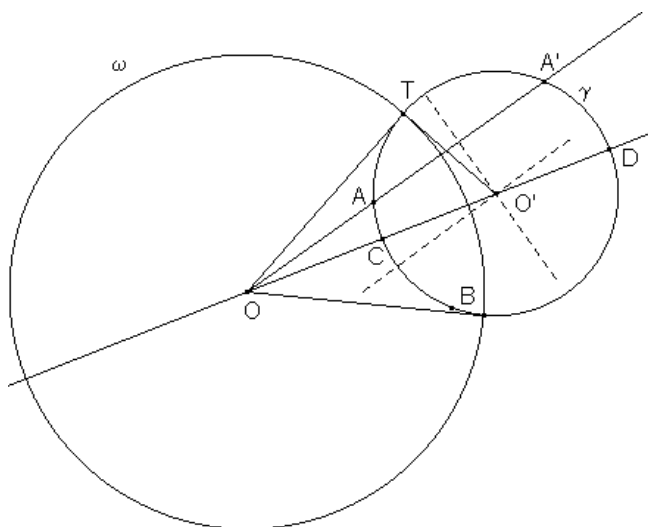


Figura 3

Successivamente si spiega come costruire l'arco di circonferenza ortogonale a c passante per i punti A e B . Quest'ultima costruzione viene trasformata in una macro usando questa caratteristica del software di geometria.

Seconda fase

Dopo lo studio elementare dell'inversione circolare si presenta il modello del “disco di Poincaré”, utilizzando il software di geometria che permette di costruire un menu iperbolico ed effettuare esplorazioni nell'ambiente virtuale che si costruisce.

Supponiamo che il “piano” sia formato dalla regione Ω interna a un'assegnata circonferenza ω , che si dice *orizzonte* (Figura 4). Chiameremo tale regione il *piano di Poincaré* o “piano”. Un punto di Ω è un *punto del piano di Poincaré* in questa nuova geometria. Le costruzioni, utilizzando il software, sono immediate. Si disegna una circonferenza ω , detta *orizzonte*, e si usa il menu iperbolico per disegnare la retta iperbolica per A e B e quella passante per O e A .

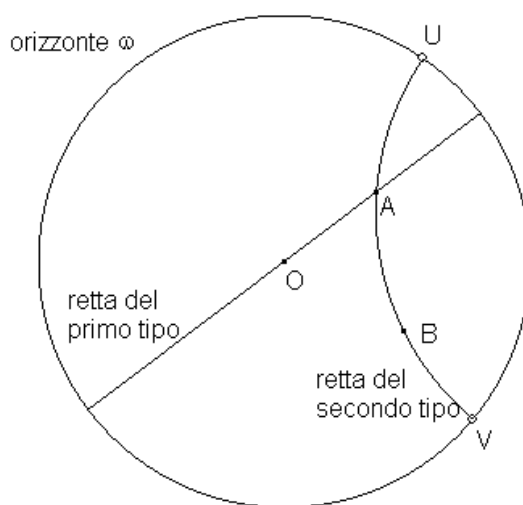


Figura 4

In questa geometria ci sono due tipi di *rette*:

- i diametri del cerchio Ω che vengono dette *rette del primo tipo*;
- gli archi di circonferenza ortogonali a ω , aventi gli estremi su ω , che vengono dette *rette del secondo tipo*.

L'incidenza tra *rette* in questa nuova geometria è definita in modo naturale, come intersezione tra archi ortogonali all'*orizzonte* o tra archi e diametri del cerchio.

I teoremi soliti della geometria euclidea del piano relativi all'incidenza tra rette valgono anche in questa nuova geometria. Poiché per due punti distinti P e Q passa sempre uno ed un solo diametro oppure una ed una sola circonferenza ortogonale all'*orizzonte* ω , possiamo affermare che:

per due “*punti*” distinti del *piano* passa una ed una sola “*retta*”.

Dimostrare questa ultima proprietà può essere particolarmente interessante. Il caso in cui P e Q sono allineati con O è banale perché basta disegnare il diametro della circonferenza ω passante per P e Q .

Nel caso invece in cui P e Q siano due punti interni a ω non allineati con O , si può ricorrere alla costruzione dell'inverso circolare di uno dei due punti, ad esempio di P ; il punto P' ottenuto è allineato con O e P ; pertanto non è allineato con O e Q . Per quanto detto in precedenza a proposito della inversione circolare basta ora costruire la circonferenza γ passante per P , Q e P' (Figura 5). Tale circonferenza è unica e ortogonale a ω .

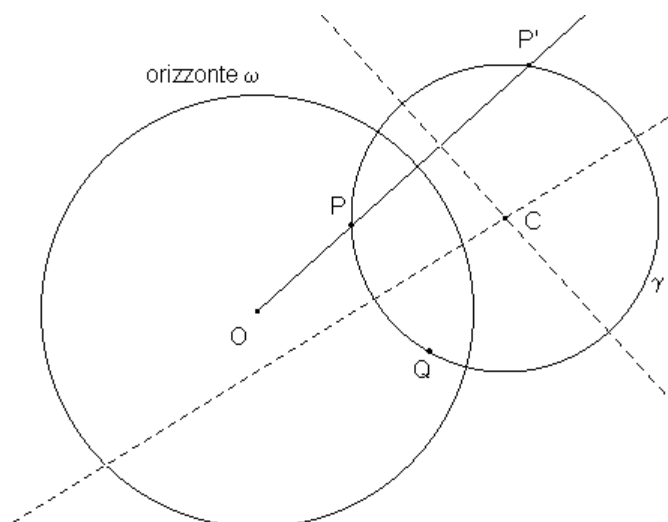


Figura 5

Definiamo l'*angolo* tra due *rette* come l'ordinario angolo della geometria euclidea, misurato nel solito modo, tra le rette tangenti alle due curve nel loro punto di intersezione.

Definiamo *segmento* l'insieme dei punti di una *retta* tra due *punti*. La relazione di "*compreso tra*" è la stessa della geometria euclidea.

Terza fase

Con il "menu iperbolico" messo a disposizione da un software di geometria è particolarmente facile fare esplorazioni sul comportamento delle rette. Si assegna una "retta" AB ed un punto P fuori di essa; si traccia una retta r per P ; variando la posizione di r si osserva che per questo punto P passano infinite rette non incidenti la retta data (Figura 6).

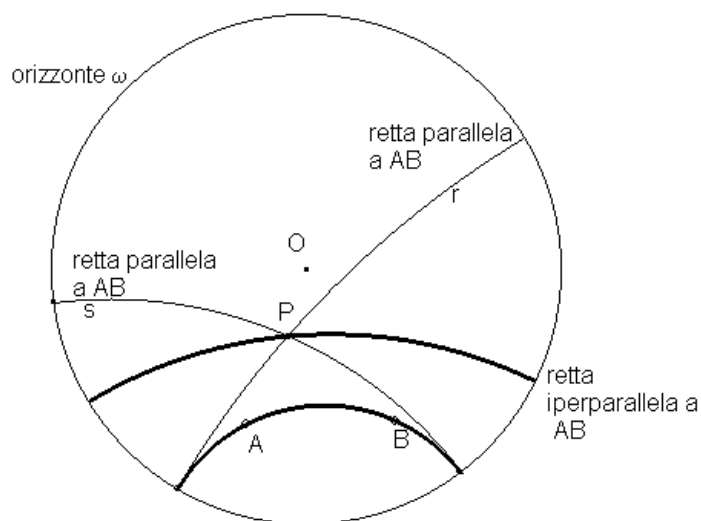


Figura 6

Nel fascio di rette passanti per il punto P , le rette r ed s che incontrano la retta AB sul bordo di Ω separano le rette incidenti alla retta AB da quelle che non intersecano la retta AB . Le rette r ed s sono definite *parallele* alla retta AB . Tra le rette r ed s sono comprese infinite rette che non intersecano la retta AB . Tali rette si dicono *iperparallele* alla retta AB . Quindi per P passano due *rette parallele* ed infinite rette *iperparallele* alla retta AB .

In questo modello di *piano iperbolico* sono quindi validi gli assiomi di Euclide tranne quello delle parallele.

Gli assiomi della geometria iperbolica divengono, in seguito all'interpretazione proposta, proposizioni euclidee dimostrabili perché le “rette” non sono altro, dal punto di vista euclideo, che archi di circonferenza. Per questo, possiamo, ad esempio, esaminare la seguente tabella che stabilisce una corrispondenza tra oggetti del modello di piano iperbolico e oggetti del piano euclideo.

<i>Piano iperbolico (modello di Poincaré)</i>	<i>Piano euclideo</i>
Punto	Punto interno alla circonferenza ω
Retta	Arco di circonferenza ortogonale a ω , oppure diametro di ω
Segmento AB	Arco di circonferenza (ortogonale a ω) compreso tra A e B, oppure parte di un diametro
Assioma. Per due punti passa una ed una sola retta	Teorema. Per due punti interni alla circonferenza ω passa una ed una sola circonferenza ortogonale a ω
...	...

Quarta fase

Con l'ausilio del software si propone un'attività di esplorazione: le altezze di un triangolo sono incidenti come nel caso euclideo? Dopo aver disegnato un triangolo e le altezze relative, si scopre che, modificando la forma del triangolo, sono possibili le seguenti configurazioni: le tre altezze sono incidenti, parallele o iperparallele (Figura 7).

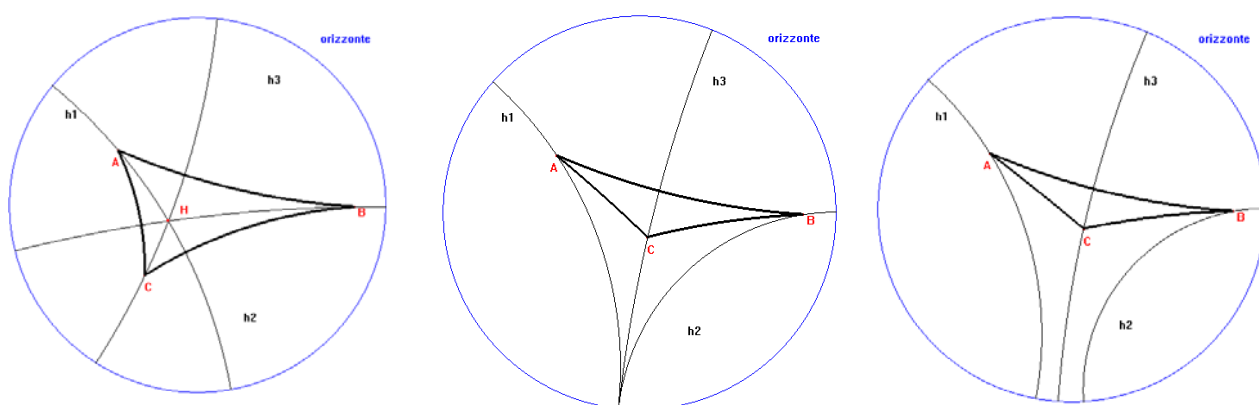


Figura 7

Quello che si osserva può essere validato formalmente? L'impossibilità dell'incidenza delle tre altezze è legata alla possibilità di costruire nel piano euclideo circonferenze non incidenti? Perché si possono avere solo i tre casi prima illustrati?

Quinta fase

Si analizza il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento. Con l'aiuto del menu iperbolico si disegna la seguente figura:

dati i punti P e Q si costruiscono le circonferenze rispettivamente di centri P e Q e di ugual raggio. Si determinano i punti intersezione R ed S.

Questi punti, per come sono costruiti, sono equidistanti da P e Q. Al variare del raggio delle due circonferenze si determina il luogo s (Figura 8).

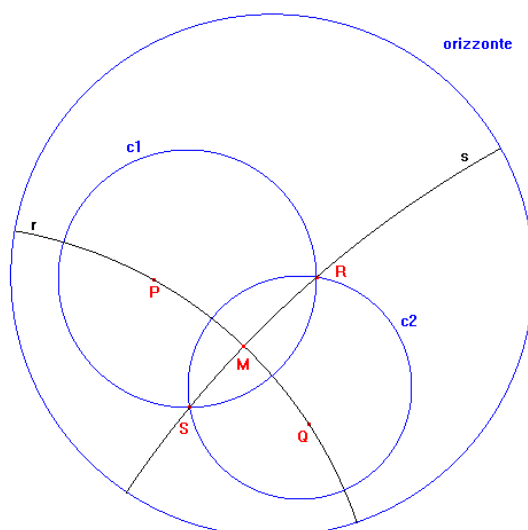


Figura 8

E' una retta del modello? Il punto M è il punto medio del segmento PQ ? Le rette r ed s sono perpendicolari? Sul modello queste proprietà sembrano essere verificate; si propone la dimostrazione di quanto osservato e congetturato.

Supponiamo quindi che R sia un punto equidistante da M e Q e mostriamo che $R \in s$. Se $R \in r$, allora $R = M$ e quindi $R \in s$. Se invece $R \notin r$, consideriamo la retta t che biseca l'angolo PRQ e che è incidente rispetto a r : la simmetria di asse t fissa il punto R e scambia fra loro le due rette PR e QR ; di conseguenza, dato che i segmenti RP e RQ hanno la stessa lunghezza, la simmetria di asse t scambia fra loro i due punti P e Q e, quindi, fissa la retta r e il punto medio M del segmento PQ ; ne segue che r è ortogonale a t e che $M \in t$, quindi, t coincide con la perpendicolare a r in M e $R \in s$.

Analogamente può essere dimostrato che un punto R equidistante dai punti P e Q appartiene all'asse del segmento PQ .

Possibili sviluppi

Dopo il modello del “disco di Poincaré” è opportuno presentare alcuni elementi della geometria della sfera come ulteriore modello di geometria non euclidea.

Sulla superficie di una sfera si definiscono gli elementi fondamentali:

- i punti;
- le coppie di punti antipodali;
- le circonferenze massime.

A partire da questi elementi è possibile costruire un modello di piano non euclideo (geometria sferica o ellittica): i *punti* sono formati da coppie di punti della superficie sferica antipodali e le *rette* sono le circonferenze massime.

Assumiamo il raggio della sfera come unitario e misuriamo gli angoli in radianti. I percorsi di minima distanza tra due “punti” sono archi di circonferenza massima minori di π .

Le linee di minima distanza sono anche chiamate *geodetiche*. Le geodetiche del piano sono le rette. Le geodetiche della sfera sono archi di circonferenza massima. Se si riformulano gli assiomi e i teoremi della geometria classica in termini di geodetiche, si ottiene subito un modello tangibile di geometria non euclidea. Sulla sfera due geodetiche si intersecano sempre in due punti, e quindi sulla sfera non esistono geodetiche parallele. Questa semplice riflessione fa vedere sotto una luce nuova lo studio delle proprietà della sfera. È facile constatare che non esistono *rette* parallele, perché due circonferenze massime si incontrano sempre in un *punto*.

Anche in questo tipo di piano continua a valere la disuguaglianza triangolare. Introdotta la nozione di triangolo sferico ABC , avente per lati archi di circonferenza massima di ampiezza non superiore a π , risulta che la somma degli angoli interni del triangolo è maggiore di un angolo piatto.

Per presentare il modello di geometria non euclidea sferica è utile avvalersi di software di geometria che mettono a disposizione strumenti in grado di facilitarne la costruzione e la conseguente esplorazione (Figura 9).

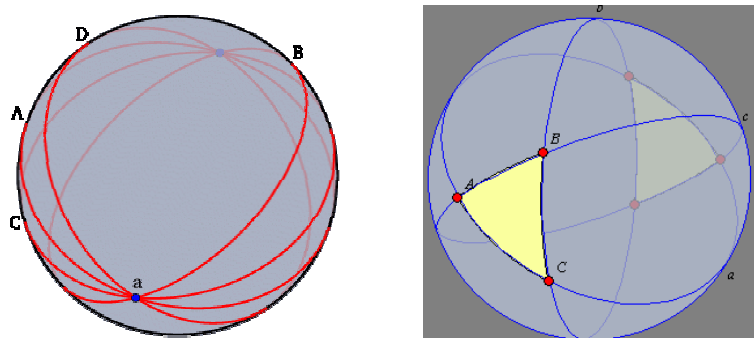


Figura 9

Cerchiamo dunque di evidenziare analogie e differenze fra la geometria del piano e quella della sfera. Nel piano euclideo sussiste il teorema: la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto. Ecco una dimostrazione particolarmente intuitiva di tale teorema. Immaginiamo di percorrere il perimetro del triangolo in uno dei due versi possibili; in ciascuno dei tre vertici si deve fare una brusca “svoltata” di ampiezza pari all’angolo esterno del triangolo in quel vertice. Poiché alla fine del percorso si è fatto un giro completo, la somma degli angoli esterni del triangolo ammonta precisamente ad un angolo giro. D’altra parte, in ogni vertice l’ampiezza dell’angolo interno sommata a quella del corrispondente angolo esterno ammonta ad un angolo piatto. Per differenza fra la somma dei tre angoli piatti e l’angolo giro, ne segue che la somma dei soli angoli interni ammonta ad un angolo piatto. Il teorema è così dimostrato.

Questa stessa dimostrazione vale (o sembra valere) anche nel caso dei triangoli sferici (gli angoli formati da due archi di cerchio sono per definizione gli angoli formati dai corrispondenti vettori tangenti). Ciò è però contraddetto dal fatto ben noto (e direttamente verificabile su triangoli aventi per lati archi di meridiani e paralleli) che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è maggiore di un angolo piatto (eccesso sferico). Dov’è nascosto l’errore nella dimostrazione ora richiamata? La spiegazione sta nella nozione di “trasporto parallelo”. Sia nel piano che sulla sfera, si immagini di percorrere un tratto di geodetica trasportando un’asta “orizzontale” col vincolo di mantenere costante l’ampiezza dell’angolo fra la geodetica e l’asta (Figura 10, Figura 11). Ad ogni vertice si riprenda il cammino lungo il successivo tratto di geodetica, senza modificare la direzione dell’asta.

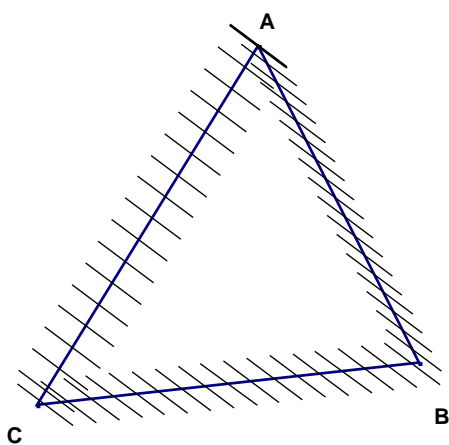


Figura 10

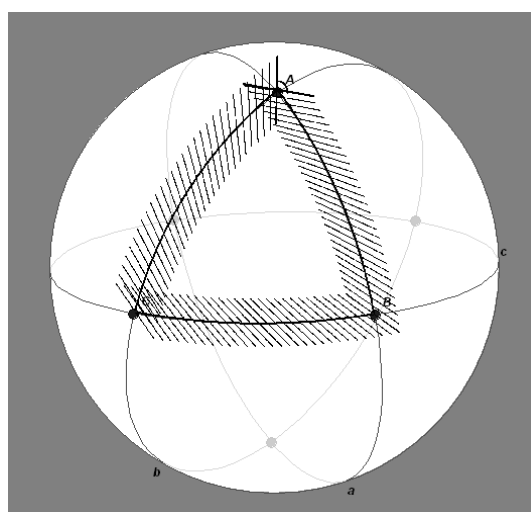


Figura 11

Si constata che nel caso del triangolo piano si ritorna al punto di partenza con l'asta nella posizione di partenza, mentre nel caso del triangolo sferico si ritorna con l'asta in una posizione diversa. Chi preferisce vedere questa anomalia con l'ausilio di un modello tridimensionale prenda un pallone e ci disegni sopra un triangolo sferico. Tornando al teorema sulla somma degli angoli interni, il passaggio errato nella dimostrazione sta nell'aver dato per scontato che un giro completo, frutto di un cammino con tre "svoltate" in tre punti diversi, equivalga ad un angolo giro intorno ad uno stesso punto. Ciò è vero nel piano, in quanto i tre angoli esterni, traslati in uno stesso vertice formano effettivamente un angolo giro. Non è più vero sulla sfera, dove il trasporto parallelo degli angoli esterni in uno stesso vertice dà luogo ad un angolo minore di un angolo giro!

Per completare il quadro dei modelli di geometrie non euclidee si può analizzare quello di Beltrami-Klein. (Figura 12)

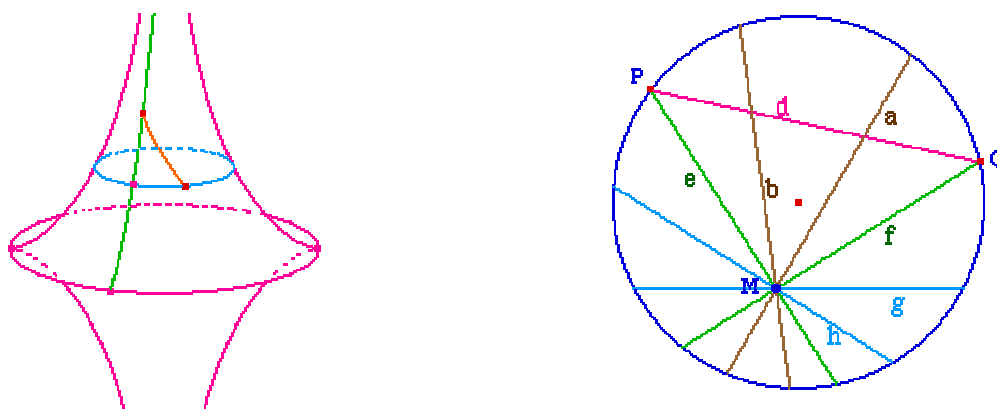


Figura 12

Qual è la distanza tra Roma e New York?

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare i vettori e il prodotto scalare nello studio di problemi del piano e dello spazio. Risolvere analiticamente problemi su sfera, piani e rette e interpretarne le soluzioni. Utilizzare i primi elementi della geometria della sfera in altri ambiti (geografia, fisica, astronomia).	Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine).	<u>Spazio e figure</u>	Geografia

Contesto

Geometria della sfera.

Il contesto dell'attività è lo studio delle rotte di navigazione aerea con l'utilizzo della geometria sulla sfera.

Descrizione dell'attività

Prima fase

L'insegnante pone agli studenti il problema di come sia possibile descrivere la rotta aerea tra due città molto lontane, come ad esempio Roma e New York. Per aiutarli a visualizzare il problema ci si può avvalere dell'ausilio di un mappamondo, di un planisfero, di fili e di righe graduate. Gli studenti in gruppo provano a individuare i percorsi sul mappamondo e sul planisfero e a confrontarli.

Attraverso una discussione guidata si fanno emergere le considerazioni dei vari gruppi.

Gli alunni probabilmente considereranno come percorso ottimale solo quello riconducibile ad un "segmento".

In effetti, una delle proprietà di un segmento è di essere la linea più breve tra due punti: volendo attraversare una piazza, risulta conveniente muoversi in linea retta piuttosto che seguire un qualsiasi altro cammino. Per andare da Roma a New York non si potrà seguire una linea retta, dal momento che la Terra è rotonda e sulla sua superficie non ci sono linee rette.

Seconda fase

Il docente evidenzia come il problema richieda nuove conoscenze relative al modello geometrico più idoneo per rappresentare il caso in questione. Tale modello è costituito, in prima approssimazione, dalla superficie di una sfera.

La geometria della sfera rappresenta un tema importante della matematica sin dall'antichità, strumento essenziale per l'astronomia, la navigazione, la geografia, la stesura dei calendari e l'indicazione dell'ora.

Al fine di individuare in modo univoco la posizione delle due città sulla superficie della sfera è necessario stabilire su di essa un sistema di riferimento. L'insegnante fa osservare come in un mappamondo siano già presenti alcune linee che consentono di individuare le diverse posizioni dei luoghi sulla Terra. Analizzando in dettaglio queste linee si noterà che quelle passanti per i Poli sono circonferenze tutte uguali tra loro, mentre quelle parallele all'equatore si presentano "parallele" e

diverse; in particolare le prime sono i meridiani e le seconde i paralleli. Ogni punto della superficie terrestre, tranne i poli, può pertanto essere univocamente associato a una coppia di queste linee (meridiano, parallelo).

L'insegnante può sottolineare come la particolare scelta dei meridiani e dei paralleli presenti un'analogia con quanto già studiato sul piano cartesiano. In particolare, è conservata la perpendicolarità; infatti, un cerchio avente come circonferenza un meridiano giace in un piano che è ortogonale al piano di un cerchio avente come circonferenza un parallelo.

Per stabilire un sistema di riferimento è necessario fissare due assi orientati. Sulla sfera terrestre si adottano come “assi” due opportune circonferenze massime tra loro ortogonali: il meridiano di Greenwich (scelto come fondamentale; Greenwich è una località nei pressi di Londra con un osservatorio astronomico) e l'equatore (circonferenza massima). Il loro punto di intersezione, utilizzato come origine O del sistema di riferimento sferico, è un punto al largo della costa occidentale dell'Africa, nel Golfo di Guinea. L'altro punto di intersezione tra la circonferenza che contiene il meridiano di Greenwich e l'equatore è in pieno Oceano Pacifico, e appartiene al meridiano del “cambiamento di data”.

Un punto sulla superficie sferica terrestre è solitamente individuato da due angoli, dalla sua longitudine (distanza angolare dal meridiano di Greenwich, positiva ad Est e negativa ad Ovest, rappresentata dall'angolo $\widehat{ROP'}$ nella Figura 1) e dalla sua latitudine (distanza angolare dall'equatore, positiva a Nord e negativa a Sud, rappresentata dall'angolo $\widehat{POP'}$ nella Figura 2). Nelle Figure 1 e 2 G indica Greenwich ed R e P' dei meridiani per G e P con l'equatore.

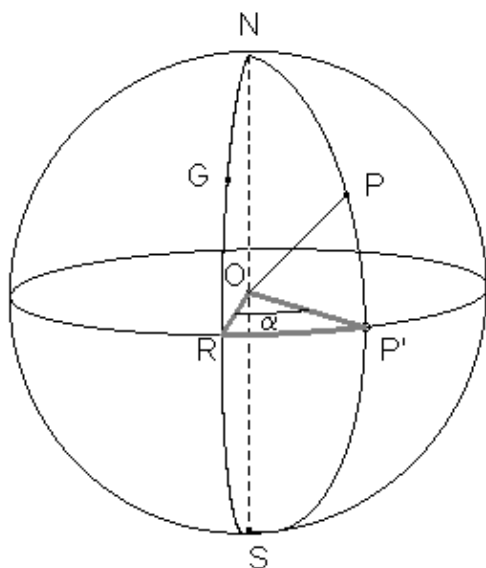


Figura 1

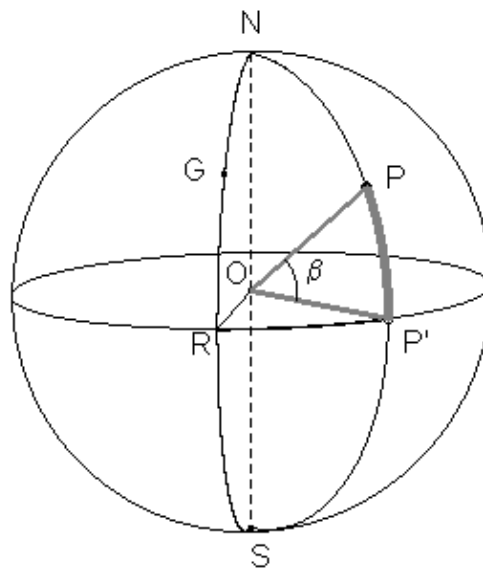


Figura 2

L'insegnante propone agli studenti la lettura della posizione di alcune città, prestando attenzione che nella scelta ricadano città presenti nei vari “quadranti” rispetto all'equatore e al meridiano di Greenwich. Le longitudini precedute dal segno + si leggono anche “Est”, quelle precedute dal segno meno “Ovest”. Le latitudini con il segno + si dicono “Nord” e quelle con il segno – “Sud”.

	Longitudine	Latitudine
Roma	+12° 27'	+41° 55'
Milano	+09° 11'	+45° 29'
New York	-70° 15'	+40° 45'
Buenos Aires	-70° 40'	-33° 30'
Sydney	+151° 10'	-33° 55'

Un punto sull'equatore ha latitudine zero, un punto sul meridiano di Greenwich ha longitudine zero. In particolare si sceglie come unità di misura delle distanze il raggio terrestre equatoriale (circa $6378 \text{ km} = 1 \text{ RT}$, che corrisponde all'angolo di 1 radiante).

Considerando la Terra una sfera liscia, senza rilievi (l'altezza di volo di un aereo di linea è circa 10 km , una distanza trascurabile rispetto al raggio terrestre). Con le convenzioni adottate possiamo ora stabilire un sistema di riferimento sulla superficie sferica.

Sia P un punto sulla superficie sferica (Figura 3); esso è univocamente individuato dalla coppia di misure angolari, in gradi sessagesimali, (α, β) , dove α è la longitudine e β è la latitudine, con le seguenti limitazioni:

$$-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$$

$$-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ.$$

Se escludiamo i due poli (che hanno latitudine rispettivamente $+90^\circ$ e -90° e longitudine qualsiasi) tale sistema di riferimento stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie sferica e le coppie di angoli (α, β) .

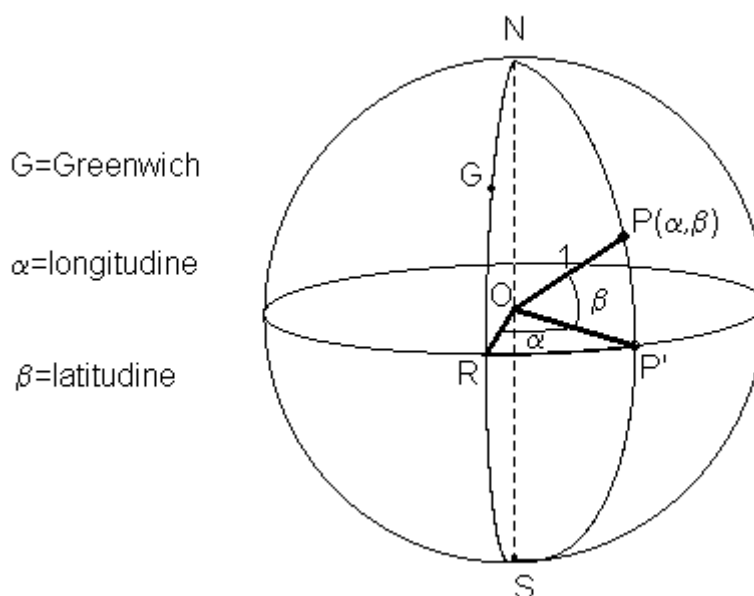


Figura 3

A differenza di quanto accade nel piano, sulla superficie sferica non esistono rette parallele: tutte le *rette* in questa geometria, cioè le circonferenze massime, si intersecano in due punti antipodali. Ne consegue una differenza sostanziale tra la geometria del piano e quella della sfera: sul piano le coordinate (x, y) di un punto P rappresentano le distanze, con segno, di P rispettivamente dall'asse y e dall'asse x . Sulla sfera, invece, solo la seconda coordinata (la latitudine) rappresenta la “distanza” dall'equatore; la prima coordinata (la longitudine) non è uguale alla distanza dal meridiano di Greenwich, tranne nel caso in cui P stia sull'equatore; la distanza di P dal meridiano di Greenwich diminuisce con l'aumentare della latitudine, fino ad annullarsi per i poli.

In altri termini: i *meridiani* (luoghi dei punti aventi una data longitudine) sono semicirconferenze massime (che possiamo quindi chiamare “*rette*” sulla sfera), i *paralleli* (luoghi dei punti aventi data latitudine) non sono circonferenze massime, tranne nel caso dell'equatore.

A differenza di quanto accade nel piano, la distanza tra due punti non è invariante per *traslazioni*: tali trasformazioni non sono, sulla sfera cartesiana, delle isometrie.

Terza fase

Il docente procede in analogia con quanto già svolto nell'introduzione al piano cartesiano ed evidenzia che la strategia risolutiva migliore consiste nel porre la sfera in un sistema di riferimento ortogonale xyz con l'origine nel centro O della sfera (Figura 4). L'origine del piano xy , che giace nel piano dell'equatore, corrisponde nel sistema di riferimento sferico al punto R di coordinate $(0,0,1)$, l'asse z passa per i due poli ed è ortogonale al piano xy . In tal modo è possibile associare ad ogni punto $P(\alpha, \beta)$ della sfera il vettore $\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$ e utilizzare le operazioni in \mathbf{R}^3 .

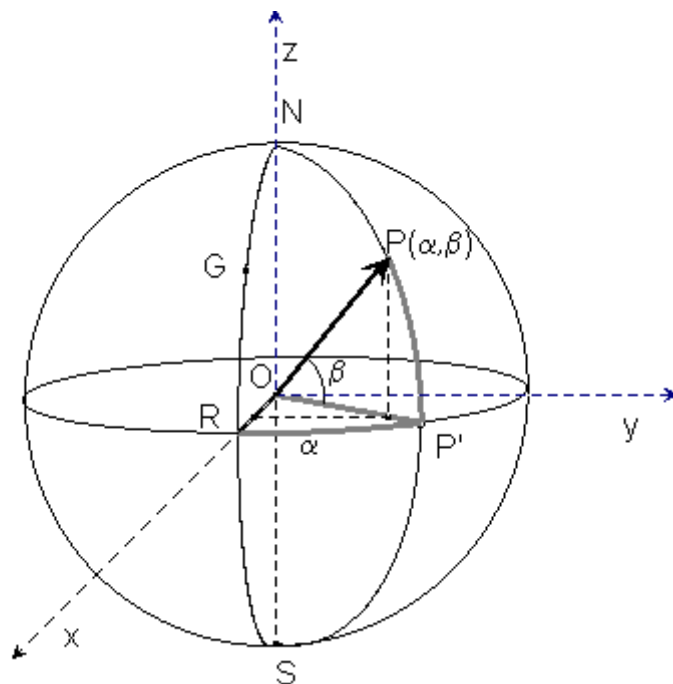


Figura 4

Sia dato un punto $P(\alpha, \beta)$ sulla superficie sferica. Ragionando sui triangoli rettangoli presenti in Figura 5 si possono ottenere per via trigonometrica le componenti in \mathbf{R}^3 del vettore \overrightarrow{OP} .

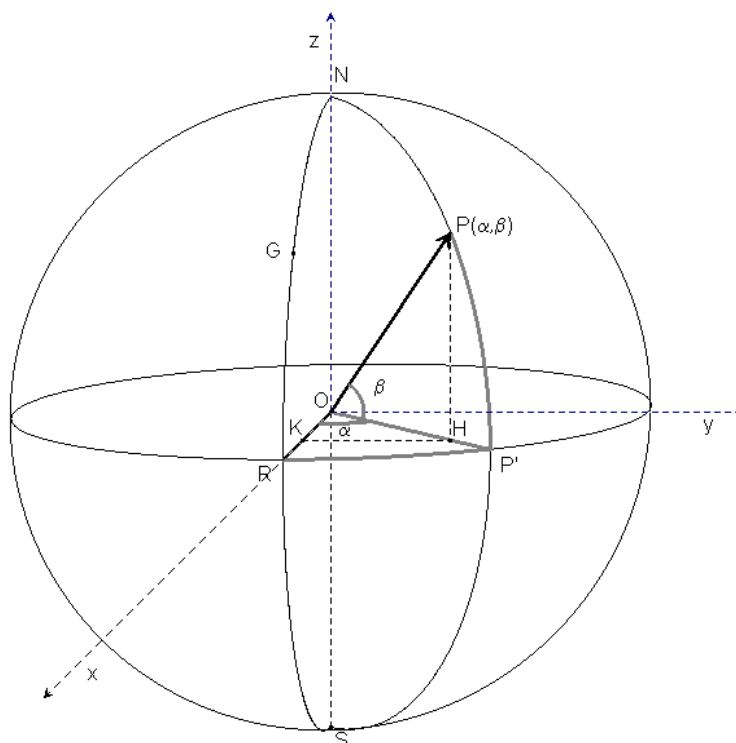


Figura 5

Si ottiene (considerato il raggio terrestre come unità di misura):

$$\begin{cases} x = OK = \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y = KH = \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ z = HP = \sin \beta \end{cases}$$

Quindi si ha che il vettore \overrightarrow{OP} ha per componenti cartesiane:

$$\overrightarrow{OP} = [\cos \alpha \cdot \cos \beta, \sin \alpha \cdot \cos \beta, \sin \beta].$$

Il docente propone agli studenti di verificare che in ogni caso $\|\overrightarrow{OP}\| = 1$.

Si procederà con l'introduzione del prodotto scalare tra due vettori in \mathbf{R}^3 .

In uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è possibile quindi definire l'angolo compreso tra due vettori.

Siano $P(\alpha_1, \beta_1)$ e $Q(\alpha_2, \beta_2)$ due punti della superficie sferica. La loro distanza è la lunghezza dell'arco di circonferenza massima di estremi P, Q e coincide con la misura (in radianti) dell'angolo \widehat{POQ} .

Con il prodotto scalare si procede al calcolo della distanza PQ.

Poiché:

$$\overrightarrow{OP} = [\cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1, \sin \alpha_1 \cdot \cos \beta_1, \sin \beta_1]$$

$$\overrightarrow{OQ} = [\cos \alpha_2 \cdot \cos \beta_2, \sin \alpha_2 \cdot \cos \beta_2, \sin \beta_2]$$

risulta:

$$\cos(\widehat{POQ}) = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{\|\overrightarrow{OP}\| \cdot \|\overrightarrow{OQ}\|}$$



Figura 6

Calcoliamo prima di tutto il prodotto scalare dei due vettori:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = [\cos \beta_1 \cdot \cos \alpha_1, \cos \beta_1 \cdot \sin \alpha_1, \sin \beta_1] [\cos \beta_2 \cdot \cos \alpha_2, \cos \beta_2 \cdot \sin \alpha_2, \sin \beta_2].$$

da cui:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2$$

e quindi:

$$d(P, Q) = \arccos(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2).$$

La misura, in radianti, di $d(P, Q)$ rappresenta, in raggi terrestri, la distanza tra i due punti.

Si giunge quindi alla risposta al problema iniziale: $d(\text{Roma}, \text{New York}) = 1,041 \text{ RT}$.

Tale distanza di 1,041 radianti corrisponde a circa 6640 km (Figura 6).

Si conclude perciò che sulla superficie sferica, se si vuole risparmiare carburante, anziché lungo percorsi rettilinei occorre muoversi con delle traiettorie curve. Tali curve, contenute nelle circonferenze massime e dette *geodetiche*, consentono di utilizzare il percorso più breve che collega due località.

Possibili approfondimenti

- Triangoli sulla sfera e loro proprietà.
- Problemi di cartografia.
- Studio delle “geodetiche” su alcune superfici (cilindro, cono) e sulla sfera.

Elementi di prove di verifica

1. Sulla base di quanto visto in precedenza si calcoli la distanza tra Roma e Sidney.

2. In Italia il capoluogo di provincia di massima latitudine è Bolzano ($11^\circ 21'$, $46^\circ 30'$) e quello di minima latitudine è Ragusa ($14^\circ 45'$, $36^\circ 56'$); la loro distanza è 0,173 radianti, pari a circa 1100 km: questo numero rappresenta la lunghezza *in linea d'aria*. Determinare la lunghezza della rotta aerea più breve e commentare il risultato ottenuto.

Ombre, stiramenti, equazioni

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi. Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate.	Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi	Disegno Storia dell'arte Scienze

Contesto

Trasformazioni geometriche

Questa attività viene proposta nel quinto anno; amplia un tema fondamentale, di particolare valenza per il curriculum di matematica e coinvolge trasversalmente le abilità e le conoscenze acquisite nel corso degli studi.

Descrizione dell'attività

Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle isometrie e delle similitudini del piano oltre ad alcune nozioni sui vettori e sulle matrici 2×2 . Gli strumenti di cui avvalersi sono un software di geometria e uno di manipolazione simbolica come supporto all'apprendimento.

Analogamente al percorso seguito per le similitudini del piano, in cui sono state utilizzate le omotetie, composte con le isometrie per generare il gruppo delle similitudini, si introduce, a partire dalle proiezioni nello spazio, l'affinità omologica. Si possono anche presentare le proprietà di questa trasformazione "generalizzando" la definizione di simmetria assiale nel piano. L'affinità omologica ha molte applicazioni, per esempio nei cambiamenti di scala, nella rappresentazione dello spazio (cerchio trasformato in ellisse, quadrato in parallelogramma), nelle rappresentazioni del disegno in assonometria,

Le omologie, tra le affinità, svolgono lo stesso ruolo che hanno le omotetie tra le similitudini e permettono, composte con una generica isometria, di generare tutte le affinità del piano. A partire da questo approccio sintetico, sviluppato con l'ausilio di un software di geometria, è possibile giungere alla determinazione delle equazioni delle affinità in modo costruttivo e motivato, sottolineando in particolare gli invarianti delle affinità, sia dal punto di vista sintetico che analitico.

Prima fase

Si analizza una situazione reale che ha molta valenza didattica: le ombre di un rettangolo esposto al sole (raggi paralleli provenienti da una sorgente posta "all'infinito"). Si studia la situazione concreta alla ricerca delle proprietà geometriche invarianti, per formalizzare - in un secondo momento - da un punto di vista matematico le proprietà che caratterizzano questo tipo di trasformazione dello spazio.

Si può schematizzare ciò che si osserva nella realtà con la “proiezione parallela” generata dai “raggi” di luce di un piano α su un piano β (Figura 1). In questo caso rette parallele hanno come ombra rette parallele, segmenti divisi in parti uguali si trasformano in segmenti divisi in parti uguali.

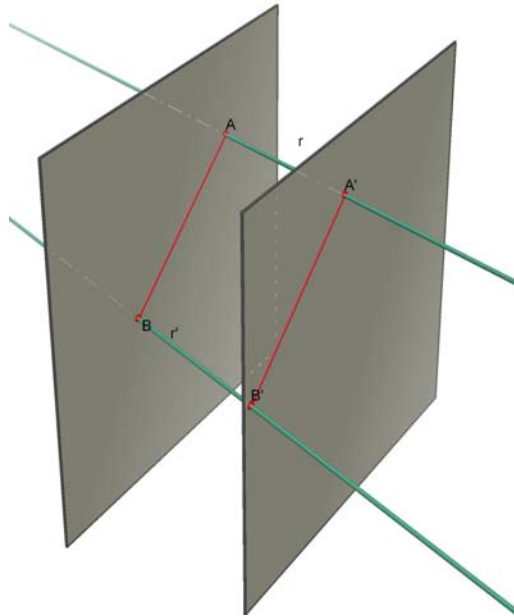


Figura 1

Dopo questa prima esperienza, usando un software di geometria, si può simulare la situazione osservata in precedenza; si può far variare la posizione dei due piani α e β ponendoli tra loro paralleli, in questo caso si osserva che la trasformazione conserva le distanze, ovvero è un’isometria; in particolare se facciamo coincidere i due piani paralleli otteniamo una traslazione. Nella Figura 2 è rappresentata una proiezione parallela del piano α sul piano β .

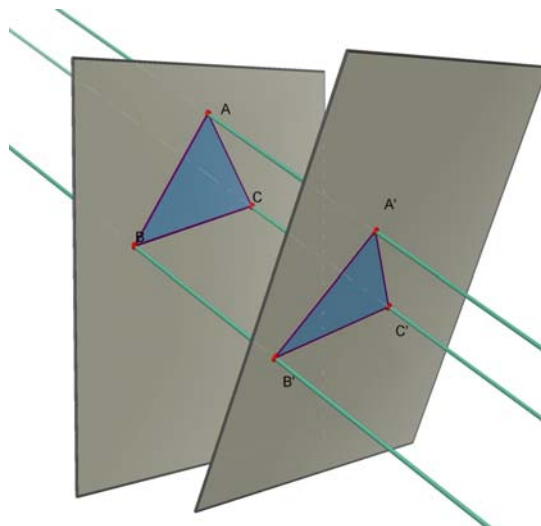


Figura 2

Il ruolo dei due piani può essere rovesciato. La trasformazione inversa di una proiezione parallela è ancora una proiezione parallela. L’unica condizione da rispettare è che la direzione dei “raggi” non sia parallela né ad α e né a β . Se i piani α e β sono paralleli, allora ogni proiezione parallela (di direzione non parallela ai piani stessi) stabilisce una isometria tra i due piani α e β .

Se i due piani non sono paralleli, allora saranno incidenti lungo una retta r (Figura 3). Si realizza in questo modo una nuova trasformazione dello spazio di particolare interesse.

Nei casi osservati in precedenza possiamo notare che rette si trasformano in rette, la retta di intersezione dei due piani si trasforma in se stessa. Si introduce la definizione di rapporto semplice

di tre punti allineati A, B e C : $(ABC) = \frac{AC}{BC}$.

Si scoprono le seguenti proprietà della proiezione parallela:

- conserva l'ordine;
- mantiene il rapporto semplice di tre punti allineati;
- trasforma un parallelogramma in un parallelogramma.

Si può arrivare alla seguente definizione: diremo affinità ogni trasformazione biunivoca tra due piani che muta rette in rette, rette parallele in rette parallele e conserva il rapporto semplice di tre punti allineati.

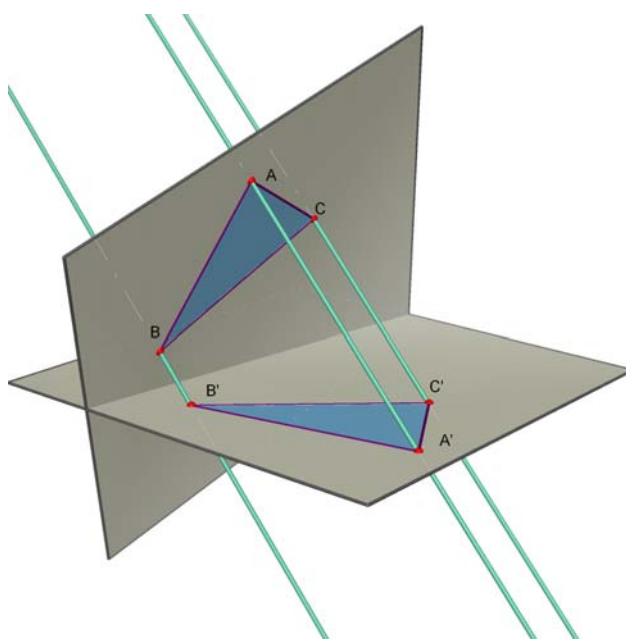


Figura 3

Immaginando di far ruotare il piano α in senso orario e in modo che si sovrapponga al piano β , si opera una identificazione dei due piani: Si ottiene una trasformazione del piano in sé, detta *omologia affine*, con una retta unita (*asse di omologia*).

Seconda fase

Successivamente si affronta un'altra situazione rilevante dal punto di vista didattico: lo “stiramento” di una figura disegnata su una tela elastica. Anche in questo caso l'interesse è rivolto alla ricerca delle proprietà invarianti di questa trasformazione.

Tali esperienze si possono simulare in modo particolarmente significativo utilizzando i software di geometria come mostrato in Figura 4. Il secondo reticolato si ottiene dal primo “stirandolo” lungo l'asse delle ordinate; analogamente si può fare lungo l'asse delle ascisse.

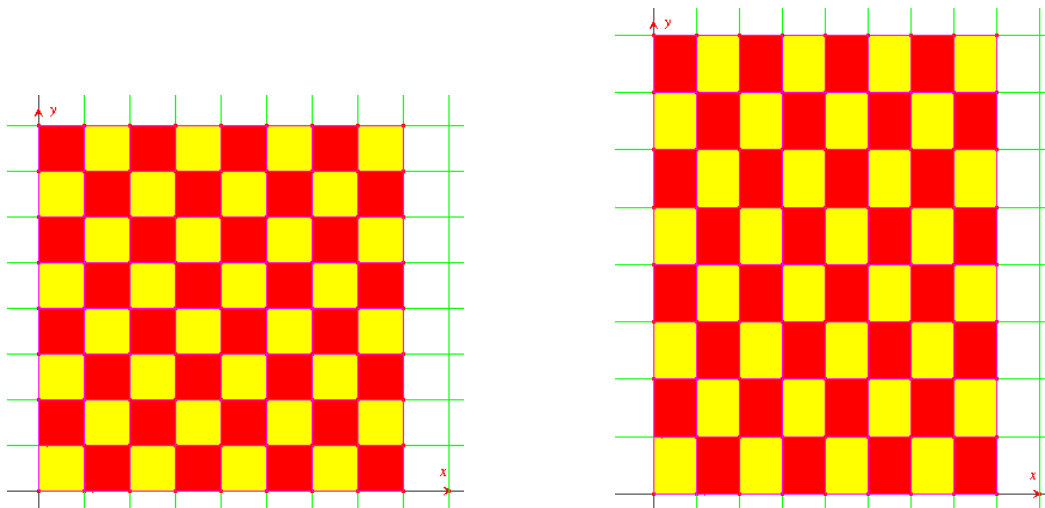


Figura 4

Anche in questo caso osserviamo che rette si trasformano in rette, rette parallele si trasformano in rette parallele, il punto medio di un segmento AB si trasforma nel punto medio del suo trasformato. Associando un sistema di assi cartesiani ortogonali, si può in questo caso arrivare a trovare le equazioni (h e k non nulli): $\begin{cases} x' = h x \\ y' = k y \end{cases}$, la cui matrice è $M = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, con determinante hk . Se

indichiamo con $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le coordinate del punto P e con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le coordinate del punto P' , possiamo

scrivere le equazioni della trasformazione nel seguente modo: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Terza fase

In alternativa si può definire l'affinità omologica a partire dalla simmetria assiale, determinare le proprietà che la caratterizzano in modo costruttivo, realizzando attività di esplorazione con un software di geometria. Le proprietà della simmetria assiale vengono generalizzate, mantenendo però una retta di punti uniti.

Ad esempio nella Figura 5 si assume una retta unita u e si fissa una direzione m e un numero $k \neq 0$. Dato un punto P del piano, il suo corrispondente P' è costruito mandando la parallela al segmento dato per P . Sulla retta si costruisce un vettore $\overline{UP'}$ tale che $\overline{UP'} = k \cdot \overline{UP}$ (Figura 6). Questa costruzione può essere trasformata in una macro, che permette di studiare le proprietà di tale trasformazione, fino ad arrivare alle sue equazioni nel piano cartesiano. Questa definizione può essere vista come la generalizzazione della definizione di simmetria assiale rispetto alla retta u . Infatti una simmetria assiale rispetto alla retta u , si ottiene con la direzione perpendicolare a u e con $k = -1$.

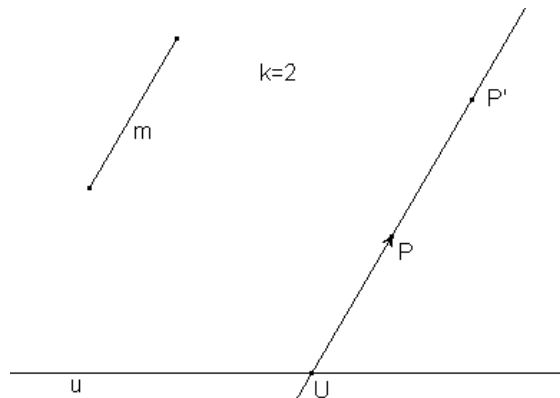


Figura 5

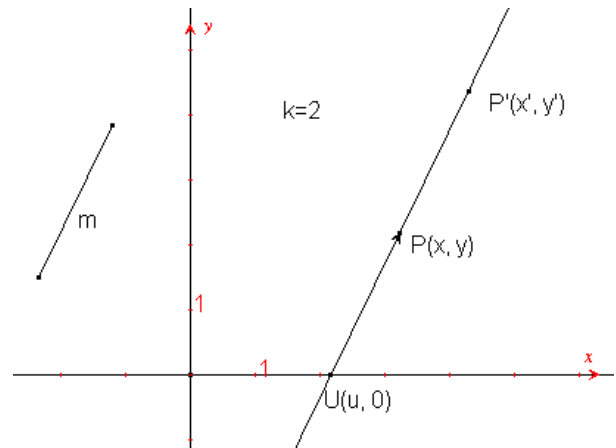


Figura 6

Nella Figura 7 è indicata un'applicazione dell'omologia affine per disegnare un quadrato in assonometria cavaliere. In questo caso l'asse di omologia è l'asse y.

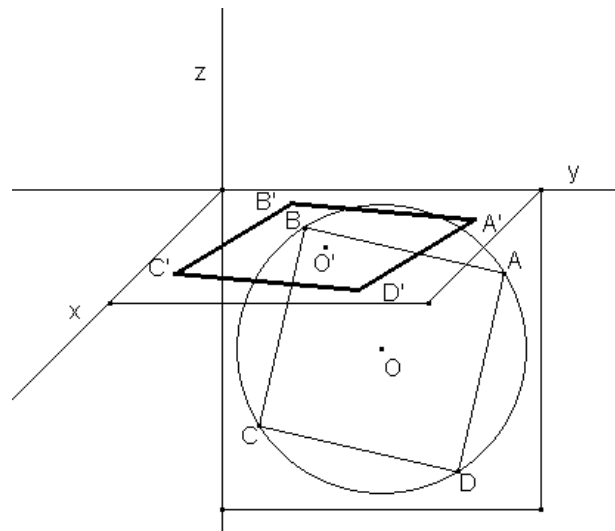


Figura 7

Quarta fase

Si traducono analiticamente alcune particolari trasformazioni, (dilatazione lungo una direzione parallela agli assi, trasformazione di quadrettati, ...) per determinare l'equazione delle affinità omologiche in cui l'asse delle ascisse è l'asse di omologia.

Con riferimento alle figure 5 e 6, poiché deve essere verificata la relazione vettoriale $\overline{UP'} = k \overline{UP}$, la retta UP deve avere pendenza m , ne segue che:

$$(*) \quad \begin{cases} x' - u = k(x - u) \\ y' = k y \end{cases}$$

e anche: $m = \frac{y}{x - u} = \frac{y'}{x' - u}$. Da questa ultima relazione segue $\begin{cases} x' = x + \frac{k-1}{m} y \\ y' = k y \end{cases}$.

La matrice di una affinità omologica avente per asse x e rapporto k ha pertanto per matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k-1}{m} \\ 0 & k \end{pmatrix}. \text{ Per } k = 1 \text{ si ottiene ovviamente l'identità. Il determinante della matrice è:}$$

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{k-1}{m} \\ 0 & k \end{pmatrix} = k.$$

Il significato geometrico del valore assoluto di tale determinante è collegato alle aree di figure corrispondenti. Quindi si può congetturare (e poi dimostrare) che un'affinità omologica moltiplica l'area racchiusa da una figura F per il fattore $|k|$, ovvero:

$$\frac{\text{Area}(F')}{\text{Area}(F)} = |k|.$$

L'affinità omologica ha per punti uniti tutti i punti dell'asse x . Oltre all'asse x , l'affinità omologica possiede due direzioni di rette che rimangono invariate: sono le rette parallele all'asse x (non sono rette unite, tranne l'asse x , ma rimane invariata la loro direzione); rimane inoltre invariata la direzione delle rette aventi per pendenza m ; tali rette sono rette unite, ma non formate da punti uniti. Un caso particolarmente importante di queste affinità si ottiene quando m tende all'infinito. In

questo caso la matrice dell'affinità omologica si riduce a: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = k y \end{cases}$$

Si tratta di un caso particolarmente semplice di affinità: c'è uno "stiramento" di un fattore k nella direzione dell'asse x mentre le ordinate rimangono invariate. Si tratta di un caso particolare delle affinità:

$$\begin{cases} x' = h x \\ y' = k y \end{cases}$$

in cui si ha uno stiramento di un fattore $|h|$ lungo l'asse delle x e di un fattore $|k|$ lungo la direzione dell'asse y .

Affinità omologiche speciali (o "inclinazioni"). Se la direzione m coincide con la direzione della retta u , l'affinità omologica si dice speciale. Si può dare quindi la seguente definizione: data una retta u , un punto A e un punto A' , che viene assunto come corrispondente del punto A sulla retta parallela ad u passante per A , il corrispondente del punto P è il punto P' trovato con la costruzione indicata in Figura 8.

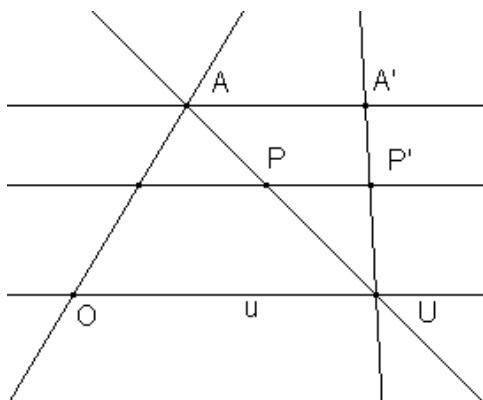


Figura 8

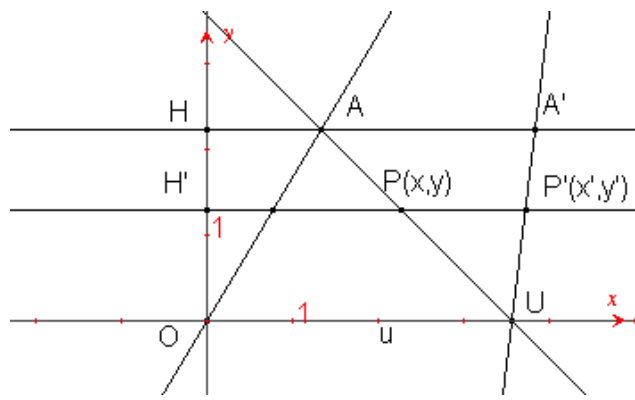


Figura 9

Se l'asse dell'affinità omologica speciale coincide con l'asse x (Figura 9), allora, dato un punto $P(x, y)$, l'ordinata y' non cambia, perché P' si trova sulla parallela passante per P all'asse x . Quindi $y' = y$. Dalla similitudine dei triangoli $AA'U$ e $PP'U$ segue che: $PP' : OH' = AA' : OH$. Detto h il rapporto $AA' : OH$, si ottiene dunque: $\frac{x' - x}{y} = h$, da cui si ricava $x' = x + hy$.

Quindi le equazioni di una affinità omologica speciale di asse x e rapporto h sono:
$$\begin{cases} x' = x + hy \\ y' = y \end{cases}$$

Questa omologia speciale viene anche chiamata una “inclinazione”. La matrice di una affinità omologica speciale di asse x e rapporto h è: $M = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nella Figura 10 si vedono gli effetti di un’inclinazione su una circonferenza e su un triangolo.

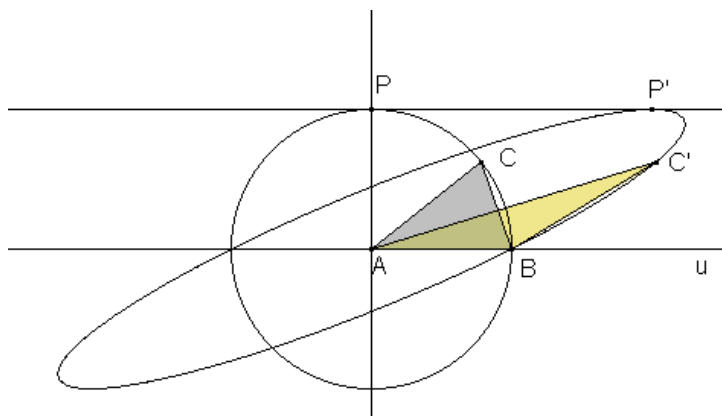


Figura 10

Ripetendo analoghe considerazioni per l’asse y , si possono ricavare le equazioni e la matrice di una affinità omologica speciale di asse y e rapporto k . Quindi le equazioni di una affinità omologica speciale di asse y e rapporto k sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = kx + y \end{cases}$$

La matrice di una affinità omologica speciale di asse y e rapporto k è: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. Le matrici trovate hanno il determinante uguale ad 1; si tratta quindi di affinità *equivalenti* ovvero mantengono le aree.

Quinta fase

Utilizzando il teorema che caratterizza le omologie affini si determinano le equazioni delle omologie affini e della più generale affinità del piano.

La più generale affinità del piano si può ottenere come composizione tra un’affinità omologica e una similitudine del piano.

Si descrivono analiticamente collegando la descrizione analitica ai vettori e alle matrici utilizzando software di manipolazione simbolica. Si esamina il comportamento di queste trasformazioni sui poligoni e sulle coniche e più in generale sul grafico di una funzione.

Possibili sviluppi

Analisi di problemi significativi da risolvere con le trasformazioni geometriche.

Rappresentazione di figure nello spazio e affinità omologica: l’assonometria cavaliera.

Riferimenti bibliografici

- Euclide, (1970), *Gli Elementi*, Utet, Torino.
- Trudeau, R. J.; (1991), *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Agazzi, E.; Palladino, D., (1998), *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia.
- Conti, F.; Giusti, E., (2000), *Oltre il Compasso - la geometria delle curve*, Firenze.
- Freguglia, P., (1995), *La geometria sferica nella tradizione classica*, in Giornate di didattica, storia ed epistemologia della matematica, Università degli Studi di Trieste, Trieste, 29-30 agosto 1995.
- Villani, V., (2003), *Geometria senza software geometrico*, in *CabrIrrsae* IRRE Emilia Romagna, aprile-luglio.
- Impedovo, M., (1998), *Qual è la distanza tra Roma e New York?*, Bollettino degli insegnanti di Matematica del Canton Ticino, n. 36.
- Dedò, M., (1996), *Le trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, Padova.
- Lombardo Radice, L.; Mancini Proia, L., (1979) *Il metodo matematico*, vol. 3°, Principato, Milano.
- Castelnuovo, E.; M. Barra, (2000), *Matematica nella realtà*, Bollati Boringhieri, Torino.