Probabilità nel continuo: bersagli e paradossi

Percorso: **Misurare la probabilità**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Calcolare perimetri e aree di poligoni. Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado. Usare disequazioni per rappresentare sottoinsiemi del piano (in particolare, semirette, segmenti, semipiani). Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato della probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale. Semplici distribuzioni di probabilità. Lunghezze e aree dei poligoni. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Il numero π. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Disequazioni di primo grado in due incognite. Sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali.	Dati e previsioni Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare	Italiano Filosofia

Contesto

Probabilità nel continuo.

Il contesto dell'attività è quello della misura della probabilità con riferimento all'approccio classico e a quello frequentista. Motivano la classe alcuni paradossi noti.

Descrizione attività

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:

Consideriamo un bersaglio circolare. Qual è la probabilità di colpire a caso un punto "più vicino al centro" che alla circonferenza?

Il problema non è difficile; non è possibile, però, enumerare i casi possibili e i casi favorevoli perché ci troviamo in uno spazio di eventi che non è finito. Un esempio del genere permette di consolidare le conoscenze relative allo spazio degli eventi che sono state trattate nel primo biennio.
Per il modo in cui il problema è stato enunciato, il colpo va a segno se la sua distanza dal centro è minore della metà del raggio. Considerato ciò, per risolvere il problema occorre tenere presente che i casi possibili possono essere visti come i punti interni alla circonferenza che rappresenta il bersaglio e i casi favorevoli come i punti interni alla circonferenza, concentrica alla precedente, di raggio metà del raggio del bersaglio dato.

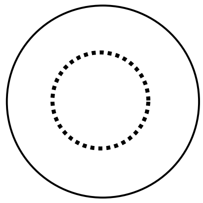


Figura 1

Per calcolare la probabilità è allora sufficiente fare il rapporto tra le aree dei due cerchi:

$$p = \frac{\pi \frac{r^2}{4}}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4}$$

Si può proporre agli allievi di simulare la situazione con il foglio elettronico.
Per l'implementazione delle formule sarà necessario rivedere alcune conoscenze di geometria analitica, in particolare l'equazione di una circonferenza.
Nella predisposizione del foglio Excel è stata scelta la seguente costruzione:
Il cerchio che rappresenta il bersaglio ha raggio uno e centro nel punto di coordinate (1;1). Le coordinate di un punto a caso P(x;y) sono state scelte tramite la funzione Casuale().
L'insegnante invita gli studenti a riflettere sui diversi modi di misurare la probabilità e sui possibili confronti fra di essi. Nell'attività prospettata il fare riferimento al rapporto fra area della "superficie favorevole" e l'area della "superficie ugualmente possibile" richiama immediatamente la definizione classica di misura di probabilità. Con l'attività di simulazione il rapporto tra il numero delle volte in cui l'evento si è verificato ed il numero degli esperimenti fatti dà una misura frequentista di probabilità.
Si possono presentare altri problemi in cui la probabilità si ottiene come rapporto di aree (basterà per esempio considerare bersagli aventi forma di una qualunque figura piana); questi offrono l'opportunità di consolidare anche conoscenze relative al nucleo Spazio e figure. (cfr. Matematica 2003, Argomentare, congetturare, dimostrare, Grissini e triangoli).

<u>Seconda fase</u>
Un altro problema che offre interessanti sviluppi è il seguente:
Qual è la probabilità che un punto scelto a caso nel quadrato (Figura 2) sia interno alla circonferenza inscritta?

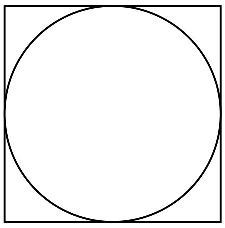


Figura 2

Anche in questo caso la probabilità è misurata dal rapporto delle aree. Se il quadrato ha lato a, il cerchio inscritto ad esso ha raggio $\frac{a}{2}$. Si ha dunque:

$$p = \frac{\pi \frac{a^2}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

Che numero è pi greco?
Può essere questa l'opportunità per consolidare le conoscenze relative ai numeri irrazionali.
Si possono, poi, invitare gli studenti alla seguente riflessione: se, grazie alla simulazione, si riesce a realizzare un esperimento e quindi a calcolare la frequenza relativa, f, di successi si potrà utilizzarla per avere una stima del valore di π.
Infatti dalla relazione precedente segue che $\pi = 4p$; quindi quanto più la frequenza che si ottiene sperimentalmente si avvicina alla probabilità, tanto più si potrà ottenere una approssimazione attendibile per π: basterà moltiplicare per 4 il valore della frequenza:

$$\pi \cong 4f.$$

Si invitano gli studenti a simulare l'esperimento con il foglio elettronico.
Per l'implementazione si può considerare il quadrato unitario posizionato con un vertice nell'origine e il vertice opposto nel punto di coordinate (1;1); la circonferenza inscritta avrà il centro nel punto $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$. I punti interni al quadrato avranno coordinate variabili tra 0 e 1, mentre i punti interni alla circonferenza dovranno soddisfare la disequazione:

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{4} < 0$$

La funzione Casuale() del foglio elettronico che fornisce un numero tra 0 e 1 darà le coordinate dei punti del quadrato.
Il grafico di Figura 3 è stato ottenuto con 3000 prove. Esso mostra che, anche se gli scostamenti dal valore di π rappresentato dalla linea orizzontale in nero vanno diminuendo all'aumentare del numero delle prove, si tratta ancora di un'approssimazione poco attendibile. Infatti, come indica l'etichetta riportata sul grafico, se si cerca la frequenza relativa a 3000 prove si ottiene uno scostamento da π di -0,009593 e quindi un valore di π "esatto" solo alla prima cifra decimale (≅ 3,132000).

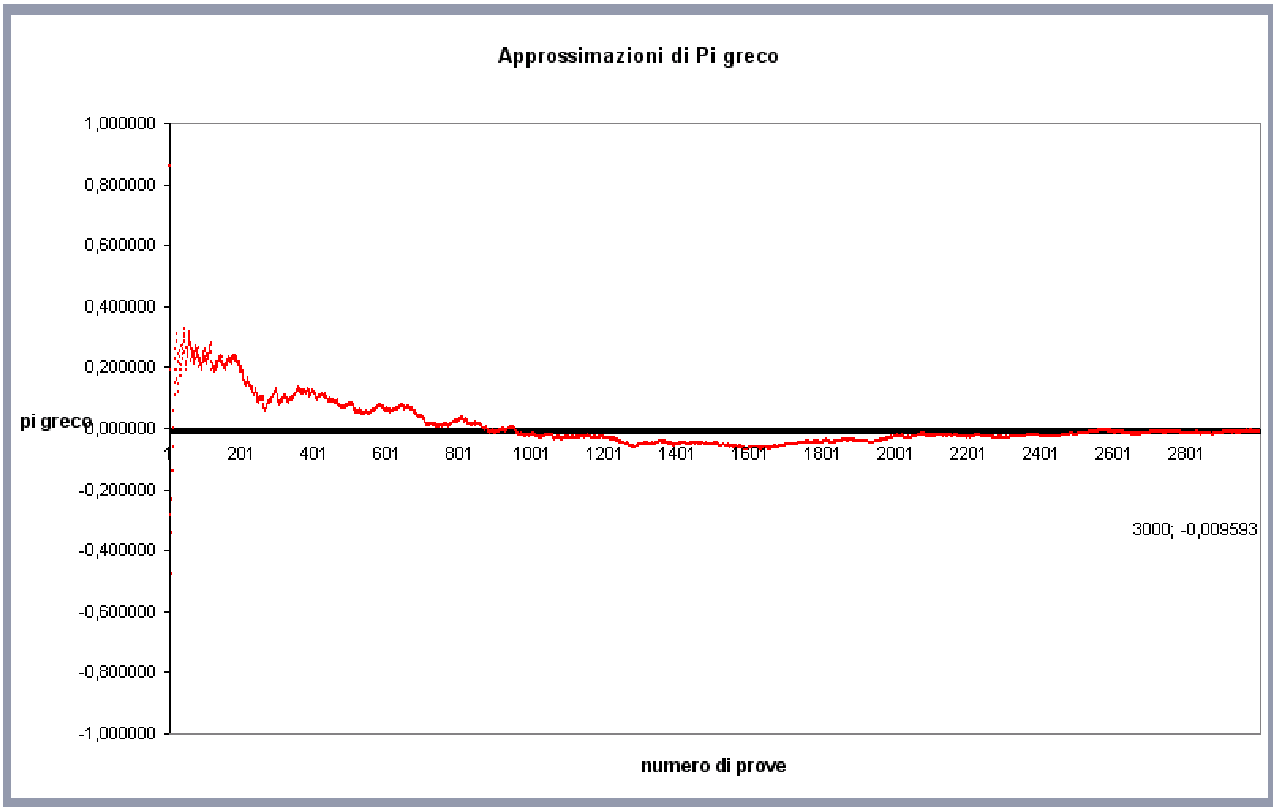
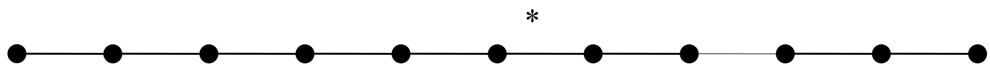


Figura 3

Il docente osserverà che, generalmente, quanto più è alto il numero delle prove, tanto più è probabile che il valore delle frequenze relative di un evento sia vicino alla probabilità dell'evento stesso (ovvero la *legge dei grandi numeri*).
E questo fatto accade naturalmente nel processo che abbiamo visto di approssimazione di π ? (cfr. Matematica 2003, Misurare, Un numero misterioso: π).

<u>Terza fase</u>
Si possono portare altri esempi in cui si tratta di spazi di eventi rappresentabili nel continuo.
Si propone il seguente problema:
Consideriamo un segmento AB e prendiamo un punto a caso su di esso. Qual è la probabilità che questo punto sia il punto medio del segmento?
Il docente inviterà gli studenti a discutere su cosa significhi prendere un punto "a caso".
Un segmento contiene un'infinità di punti. Basta osservare che tra due punti di un segmento ce n'è sempre un terzo, se non altro il punto medio del sottosegmento definito dai due punti; questo procedimento si può ripetere all'infinito.
Il caso favorevole è uno, i casi possibili sono infiniti; quanto vale la probabilità in questo caso?
Per rispondere, si procede per gradi.
Supponiamo di dividere il segmento AB in 10 parti uguali; un punto scelto a caso su AB avrà la stessa probabilità di trovarsi in uno qualsiasi dei 10 intervalli, per esempio la probabilità di trovarsi nell'intervallo contrassegnato dall'asterisco in Figura 4 è $\frac{1}{10}$:



A B

Figura 4

Se avessimo diviso il segmento AB in 100 parti la probabilità che il punto si trovi in una qualsiasi di quelle parti sarebbe stata $\frac{1}{100}$. Il procedimento si può generalizzare, per cui si può concludere che la probabilità che un punto, preso a caso su un segmento di lunghezza *L*, cada su un sottosegmento di lunghezza $l = \frac{L}{n}$ (con n uguale al numero delle parti) è:

$$p = \frac{l}{L} = \frac{1}{n}$$

L'insegnante porta gli studenti a riflettere sul fatto che dati due segmenti di lunghezza l e L, il primo contenuto nel secondo, la probabilità di scegliere un punto a caso nel primo è dato da $\frac{l}{L}$.
Tornando al problema da cui si è partiti, si cerca ora di calcolare la probabilità che il punto scelto a caso sia proprio il punto medio M. Dimostreremo come non sia possibile attribuire a tale probabilità un valore diverso da zero.
Supponiamo, infatti, per fissare le idee che il nostro segmento abbia lunghezza L = 100 (misurato ad es. in cm) e che la probabilità cercata abbia valore $h \neq 0$; nel nostro segmento AB potremmo sempre isolare un intervallo di lunghezza *h* che contenga M.
Perché un punto scelto a caso su AB sia M occorre innanzitutto che si trovi nell'intervallo di lunghezza *h*, evento che ha probabilità $\frac{h}{100}$.
M è un punto qualsiasi del segmento: la probabilità che il punto scelto sia proprio M risulta minore, pertanto, della probabilità di scegliere tutto il segmento. Si ha allora:

$$h \leq \frac{h}{100} ;$$

relazione che è verificata solo se $h=0$.
Peraltro è intuitivamente lecito pensare che un punto sia un segmento di lunghezza zero; quindi potremo anche "giustificare" questo risultato con la definizione classica. Dunque la probabilità cercata è:

$$p = \frac{0}{L} = 0 .$$

Eppure non possiamo dire che scegliere a caso il punto medio di un segmento sia (un evento) impossibile!
La discussione sul fatto che esistano eventi possibili di probabilità nulla, porterà a riflettere su alcune situazioni concrete vicine alla realtà degli studenti: per esempio la probabilità di vincere acquistando un biglietto della lotteria è un numero molto vicino allo zero, ma ciò non vuol dire che nessuno vinca!
Questa discussione, peraltro, può aprire la strada per parlare del problema dell'infinito in Matematica e di alcuni paradossi legati al concetto di infinito, argomento che affascina sempre gli studenti e che si presta a collegamenti interdisciplinari con la Filosofia e con la Letteratura.

<u>Quarta fase</u>
Un problema di probabilità che offre un esempio di paradosso è il problema di Bertrand. Joseph Bertrand, matematico francese del 1800, ha posto il seguente problema e ne ha dato tre diverse

soluzioni, tutte ugualmente accettabili. Il paradosso consiste nel fatto che le tre soluzioni conducono a valutazioni diverse della probabilità.
La formulazione del problema è:
Presa a caso una corda in un cerchio, qual è la probabilità che sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto?
Una volta proposto il problema si invitano gli studenti a dividersi in tre gruppi e si consegna ad ogni gruppo una scheda che guida ad una delle tre strategie risolutive indicate da Bertrand.

I gruppo
Sia P un'estremità della corda, l'altra estremità (Q) è scelta a caso sulla circonferenza (v. *Figura 5*)

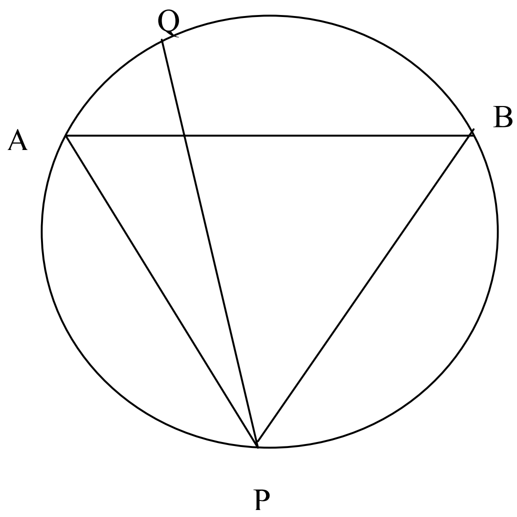


Figura 5

Il triangolo ABP è equilatero. Come sono gli archi AB, BP, PA ?
……………………………………………………………………..
Se Q è nell'arco AB quanto misura la corda?
………………………………………………………………………
Calcolate la probabilità che una corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto.

II gruppo
Per motivi di simmetria si può scegliere arbitrariamente la direzione della corda. Scegliete quindi la direzione della corda in modo che il suo punto medio sia un punto del diametro PQ (Figura 6).

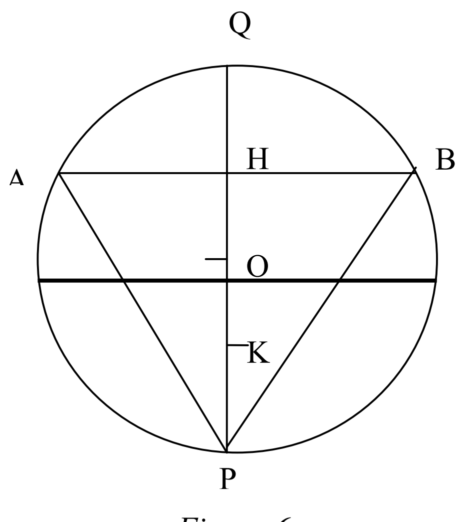


Figura 6

Il triangolo ABP è equilatero. Come sono i quattro segmenti $\overline{PK}, \overline{KO}, \overline{OH}, \overline{HQ}$?

…………………………………………………………………..

Come è la lunghezza della corda rispetto al lato del triangolo se il suo punto medio si trova nel segmento $\overline{HK}$?

……………………………………………………………………

Calcolate la probabilità che una corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto.

III gruppo

Una corda in un cerchio è completamente determinata se si conosce il suo punto medio M.
Infatti una corda è perpendicolare ………………………….

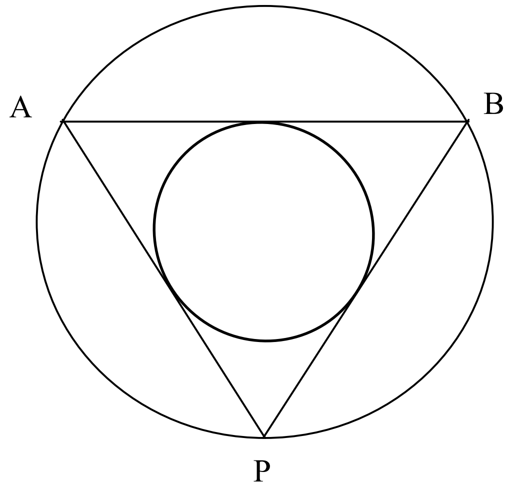


Figura 7

Considerate il cerchio inscritto nel triangolo equilatero. Qual è il raggio di questo cerchio?

…………………………………………………………………..

Come è la lunghezza della corda se il suo punto medio M è all’interno del cerchio piccolo?

……………………………………………………………………

Calcolate la probabilità che una corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto.

Quando i tre gruppi si confrontano si accorgono di essere arrivati alle seguenti conclusioni:

per il primo gruppo la probabilità cercata è $\frac{1}{3}$

per il secondo gruppo la probabilità cercata è $\frac{1}{2}$

per il terzo gruppo la probabilità cercata è $\frac{1}{4}$.

A questo punto si avvierà la discussione se esiste una soluzione “giusta” ed, eventualmente, quale delle soluzioni trovate sia quella “giusta”.
Dalla discussione emergerà che le tre soluzioni si riferiscono a tre strategie diverse per la scelta *a caso* di una corda; infatti, anche se abbiamo usato sempre la dizione “a caso” ci accorgiamo che esse corrispondono a tre esperimenti diversi i quali, a loro volta, portano a tre diversi spazi degli eventi.
Ma che significa allora prendere *a caso* una corda in un cerchio?
L’enunciato del problema non è abbastanza esplicito a questo riguardo. Anzi potremmo dire che è assai carente in quanto a chiarezza.

Quante sono le corde in un cerchio? In quanti modi si possono tracciare?
Una corda in un cerchio può essere ottenuta dall'intersezione di una retta con la circonferenza e quindi dipende dal variare di due parametri. Nell'attività del primo gruppo, tenendo fisso un estremo della corda, si fa variare la direzione (è come se avessimo considerato un fascio proprio di rette); nell'attività del secondo gruppo, tenendo fissa la direzione della corda, si fa variare il suo punto medio (è come se avessimo considerato un fascio improprio di rette). E nell'attività del terzo gruppo ci troviamo di nuovo di fronte al problema dell'infinito: un'infinità di corde.
Le tre variabili che abbiamo preso in considerazione sembrano tutte egualmente plausibili per individuare la corda, ma abbiamo visto che esse danno luogo a modelli diversi a seconda della variabile alla quale si assegna la distribuzione uniforme.

Per il docente:

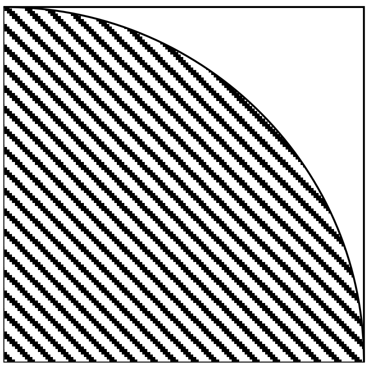
1) Si possono pensare esperimenti di tipo fisico che danno luogo a diverse modellizzazioni, anche oltre quelle individuate. Ad es. si può pensare di lanciare una moneta su un tavolo rigato e considerare la corda ottenuta dall'intersezione della moneta con una delle righe del tavolo; oppure si può attaccare un ago in un punto della circonferenza e farla oscillare fino a che non si ferma; oppure si può far rotolare un tronco (d'albero) su una circonferenza e considerare la corda dove si ferma (tangenzialmente) l'albero; oppure si può costruire una canalina sulla circonferenza e lanciare, in tempi diversi, due palline nella canalina e considerare i punti di impatto delle palline;......

2) Le tre soluzioni non sono esaustive. Sul libro di E. Parzen se ne elencano 2, una delle quali diversa dalle 3 precedenti; in un articolo di Czuber (professore a Vienna nel 1900) se ne elencano 6; infine in un articolo di A. Moro se ne dimostra l'esistenza di ....infinite.

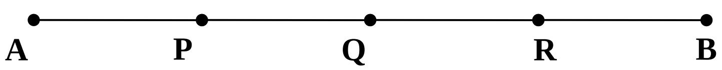
3) Infine si può osservare come il rigore e la esattezza tipica del matematico "non applicato" considera una sola di queste soluzioni "accettabili" ovvero quella che lascia invariata, per trasformazione di coordinate, la distribuzione (uniforme) di probabilità (vedi ad es. M. G. Kendall and P. Moran).

Elementi di prove di verifica

1. Qual è la probabilità, colpendo a caso un punto dentro il quadrato di lato unitario che si cada nella zona tratteggiata?



2. Un segmento *AB* è suddiviso come in figura:



La probabilità di colpire un punto del segmento PQ, supponendo di sapere con certezza che verrà colpito un punto appartenente ad AB, è:

a) $\frac{1}{4}$
b) 0
c) $\frac{1}{5}$

La probabilità di colpire il punto Q, supponendo di sapere con certezza che verrà colpito un punto appartenente ad AB, è:

d) $\frac{1}{4}$
e) 0
f) $\frac{1}{5}$

Giustifica l'eventuale discordanza fra i due casi.

3. Una moneta di diametro d è lasciata cadere su una scacchiera. Qual è la probabilità che cada all'interno di una casella di lato l, con $l > d$?

4. Un insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Se ne deduce che:
a) l'insieme è numerabile
b) l'insieme ha la potenza del continuo
c) l'insieme è finito
d) l'insieme è infinito

5. Carlo e Diana hanno fissato un appuntamento in Piazza Duomo dalle 16.00 alle 17.00. Sapendo che nessuno dei 2 è disposto ad aspettare l'altro per più di 15 minuti, qual è la probabilità che i due si incontrino effettivamente?

Griglia di correzione

1. $\frac{\pi}{4}$

2. a; e

3. $\frac{(l-d)^2}{l^2}$

4. d

5. 7/16.

Ripetenti promossi ed ottimi respinti

Percorso: **Lettura probabilistica di una distribuzione doppia**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in contesti problematici diversi. Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo due caratteri e riconoscere in essa i diversi elementi individuabili. Utilizzare la formula di Bayes. Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, ecc.) per descrivere e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime in campo matematico e in altri ambiti riferibili a discipline scolastiche oppure ad altre esperienze culturali.	Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. Valori medi e misure di variabilità, definizioni e proprietà . Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. L'evento certo e l'evento impossibile. Significato della probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale. Distribuzione doppia di frequenze e tabella a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali. Formula di Bayes e suo significato. Semplici distribuzioni di probabilità.	Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi	Italiano Società civile

Contesto
Sociale: istruzione.

Il contesto dell'attività riguarda dati sugli studenti che sono per gli stessi di particolare interresse. Si tratta infatti dei loro giudizi di ingresso e dei loro esiti finali. Questi dati consentono di motivare gli studenti a trattare un argomento che non è semplice e agevolano la lettura e l'interpretazione dei risultati ottenuti.

Descrizione dell'attività
Con il seguente esempio si vuole consolidare il concetto di probabilità (definizione classica) partendo da una situazione reale e lavorando su dati che riguardano gli studenti delle classi prime di un certo anno scolastico e per una determinata scuola.
Per ogni studente sono state rilevate contemporaneamente le caratteristiche qualitative X = giudizio di ingresso (le cui modalità sono: ripetente, sufficiente, buono, distinto, ottimo) e Y = esito finale (con modalità: promosso, respinto).
La classificazione congiunta fornisce i dati riportati nella Tabella 1.

X Giudizio di ingresso	Y Esito finale		Totale
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	
x_1 Ripetente	20	4	24
x_2 Sufficiente	32	41	73
x_3 Buono	79	5	84
x_4 Distinto	66	1	67
x_5 Ottimo	45	1	46
Totale	242	52	294

Tabella 1

L'insegnante, al fine di riprendere alcuni concetti di statistica descrittiva, chiede agli studenti il significato di alcuni numeri riportati in tabella: ad esempio il 79, l'84, il 52. I numeri richiamano i concetti di frequenza congiunta e frequenza marginale.
L'insegnante propone un quesito. Se si pensasse di scegliere uno qualsiasi fra i 294 studenti, quali situazioni potrebbero evidenziarsi? Si potrebbe verificare una situazione che chiamiamo A ={è un allievo ripetente promosso} oppure la situazione F ={è un allievo con giudizio di ingresso buono che è stato respinto}e tante altre. L'insegnante definisce l'insieme delle possibili scelte, che viene indicato con Ω, ed è costituito dall'insieme dei 294 studenti. Esso è denominato spazio fondamentale o campionario associato all'esperimento "scelta di uno studente". Le situazioni sopra indicate con A ed F rappresentano due suoi sottoinsiemi. Ciascuna situazione possibile si chiama "evento casuale" in quanto si tratta di un esito il cui verificarsi non è a priori certo.
N.B.. Alcune delle scelte si possono ripetere: ad es., 20 studenti ripetenti sono stati promossi; 5 hanno avuto giudizio di ingresso buono e sono stati respinti; ecc.

Gli eventi casuali distinti dello spazio campionario Ω sono indicati nella tabella 2

X Giudizio di ingresso	Y Esito finale	
	y_1 Promosso	y_2 Respinto
x_1 Ripetente	A	B
x_2 Sufficiente	C	D
x_3 Buono	E	F
x_4 Distinto	G	H
x_5 Ottimo	I	L

Tabella 2

dove i sottoinsiemi rappresentano gli eventi congiunti:

A	Ripetente e Promosso (x_1,y_1)
B	Ripetente e Respinto (x_1,y_2)
C	Sufficiente e Promosso (x_2,y_1)
D	Sufficiente e Respinto (x_2,y_2)
E	Buono e Promosso (x_3,y_1)
F	Buono e Respinto (x_3,y_2)
G	Distinto e Promosso (x_4,y_1)
H	Distinto e Respinto (x_4,y_2)
I	Ottimo e Promosso (x_5,y_1)
L	Ottimo e Respinto (x_5,y_2)

L'insegnante propone i seguenti quesiti.
Qual è la probabilità di scegliere a caso uno studente promosso? Qual è la probabilità di scegliere a caso uno studente con giudizio Distinto che è stato Respinto? Fra gli studenti con giudizio Sufficiente qual è la probabilità di scegliere a caso un Promosso? Se lo studente è stato Promosso, qual è la probabilità che avesse un giudizio di ingresso Buono?
L'insegnante richiama la definizione classica di probabilità del verificarsi di un evento T:

$$\mathrm{P}(T) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli\ a\ T}{numero\ di\ casi\ possibili}$$

Se nella precedente Tabella 1 calcoliamo le frequenze relative rispetto al totale generale, esse possono essere interpretate come la probabilità congiunta dei due eventi "giudizio d'ingresso" (X) ed "esito finale" (Y).
Ogni evento congiunto è dato dall'osservazione simultanea di due modalità dei caratteri osservati, ad esempio (Ripetente e Promosso)=(x_1,y_1) , (Buono e Respinto)=(x_3,y_2), ecc. e, nel caso analizzato, ci sono (5x2) eventi distinti.

X Giudizio di ingresso	Y Esito finale		$p_1(x_i)$
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	
x_1 Ripetente	0,068	0,014	0,082
x_2 Sufficiente	0,109	0,139	0,248
x_3 Buono	0,269	0,017	0,286
x_4 Distinto	0,224	0,003	0,228
x_5 Ottimo	0,153	0,003	0,156
$p_2(y_j)$	0,823	0,177	1,000

Tabella 3

I due eventi congiunti considerati precedentemente: (Ripetente e Promosso) = (x_1,y_1) e (Buono e Respinto) = (x_3,y_2), che nello spazio Ω sono indicati con A ed F, hanno rispettivamente probabilità 0,068 e 0,017 di verificarsi. Infatti, A rappresenta l'intersezione fra i due eventi: Ripetente e Promosso; F rappresenta l'intersezione fra i due eventi: Buono e Respinto.
L'insegnante chiede: qual è la probabilità di trovare a caso un alunno Promosso? Qual è la probabilità di scegliere a caso uno studente con giudizio Distinto?
Le risposte a queste due domande si trovano rispettivamente nell'ultima colonna e nell'ultima riga della Tabella 3. Queste ultime contengono, infatti, le probabilità marginali, indicate rispettivamente con $p_1(x_i)$ e $p_2(y_j)$, che si possono intendere anche come somma di riga o di colonna delle probabilità congiunte.
Indicando con x_i la generica modalità del carattere X = "giudizio di ingresso" e con y_j quella del carattere Y = "esito finale", che in questo contesto definiscono degli eventi, le due probabilità precedenti possono intendersi come:

$p_1(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$ probabilità di trovare, rispettivamente, un x_1 = Ripetente, x_2 = Sufficiente, x_3 = Buono, x_4 = Distinto, x_5 = Ottimo.

$p_2(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$ probabilità di trovare, rispettivamente, un y_1 = Promosso, un y_2 = Respinto.

L'insegnante pone un'altra domanda: scelto a caso uno studente y_1=Promosso, qual è la probabilità che egli abbia un giudizio x_2=Sufficiente nella scuola media?
A questa domanda si risponde utilizzando la seguente la Tabella 4 che riporta le frequenze relative rispetto ai totali di colonna.

X Giudizio di ingresso	*Y* Esito finale		$p_1(x_i)$
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	
x_1 Ripetente	0,083	0,077	0,082
x_2 Sufficiente	0,132	0,788	0,248
x_3 Buono	0,326	0,096	0,286
x_4 Distinto	0,273	0,019	0,228
x_5 Ottimo	0,186	0,019	0,156
Totale $p_2(y_j)$	1,000	1,000	1,000

Tabella 4

L'insegnante guida alla ricerca del valore 0,132 come di quello che risponde alla domanda posta.
I valori della Tabella 4 potevano anche essere calcolati a partire dalla Tabella 3 nel modo seguente: $p(x_2 / y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p_2(y_1)}$ dove $p_2(y_1)$ è la probabilità di scegliere a caso uno studente Promosso calcolato con la formula: $p_2(y_1) = \sum_i p(x_i, y_1)$. L'insegnante fa notare che il numeratore è un addendo della somma a denominatore.
La scrittura $p(x/y)$, che si legge probabilità di x condizionata a (oppure: dato) y, è denominata probabilità condizionata.
E se la domanda fosse: scelto a caso uno studente con giudizio x_2 = Sufficiente qual è la probabilità che sia stato y_1 = Promosso?
A questa domanda risponde la seguente Tabella 5 che riporta le frequenze relative rispetto ai totali di riga.

X Giudizio di ingresso	*Y* Esito finale		Totale $p_1(x_i)$
	y_1 Promosso	y_2 Respinto	
x_1 Ripetente	0,833	0,167	1,000
x_2 Sufficiente	0,438	0,562	1,000
x_3 Buono	0,940	0,060	1,000
x_4 Distinto	0,985	0,015	1,000
x_5 Ottimo	0,978	0,022	1,000
$p_2(y_j)$	0,823	0,177	1,000

Tabella 5

Il valore 0,438 è la risposta alla domanda.
I risultati della Tabella 5 potevano anche essere calcolati a partire dalla Tabella 3 nel modo seguente:

$p(y_1 / x_2) = \frac{p(x_2, y_1)}{p_1(x_2)}$ dove $p_1(x_2)$ è la probabilità di scegliere a caso uno studente respinto.

L'insegnante fa riflettere su alcuni importanti concetti emersi dai "calcoli" precedenti.

Da un punto di vista algebrico le due probabilità condizionate sono determinate con un procedimento analogo. Il significato probabilistico è però sostanzialmente diverso se si pensa al significato degli eventi presi in considerazione.
I giudizi di ingresso sono infatti degli eventi iniziali che possono essere interpretabili come “cause”; gli esiti, invece, sono degli eventi che si manifestano successivamente ai primi e ne individuano un possibile “effetto”; il manifestarsi di questi ultimi può essere collegato ai primi.
Quando si parla di eventi condizionati ad esempio y_1/x_2 (studente Promosso che aveva avuto giudizio di ingresso Sufficiente), l’informazione dell’evento condizionante, nel nostro caso Sufficiente come giudizio di ingresso, modifica la realizzazione dell’evento “Allievo Promosso”. E’ come avere un nuovo esperimento il cui spazio fondamentale è costituito dai soli studenti che hanno avuto giudizio Sufficiente in ingresso e in esso si considera l’evento studente Promosso di cui si vuole calcolare la probabilità. Secondo la definizione classica, la probabilità risulta pari a:

$$\mathrm{P}(\mathit{Promosso} / \mathit{Sufficiente}) = \frac{\textit{numero di studenti promossi presenti tra i sufficienti}}{\textit{numero di studenti con giudizio di ingresso sufficiente}}$$

L’insegnante chiede alla classe di rileggere i dati della Tabella 4 secondo questa nuova interpretazione e guida la classe a comprendere che i valori riportati nella Tabella 4, $p(x/y)$ danno la probabilità di risalire alla causa noto l’effetto. Che cosa si può dire della Tabella 5? Essa riporta i valori di $p(y/x)$ che si riferiscono al succedersi logico di due eventi: ad esempio la probabilità che uno studente con giudizio di ingresso Ottimo sia Promosso (effetto nota la causa).
L’esperimento sopra riportato può essere simulato come l’estrazione da un’urna composta da 294 palline tutte dello stesso colore, ciascuna contenente un bigliettino con l’esito finale e il giudizio di ingresso di un allievo secondo le specifiche della Tabella 1.
Supponendo di estrarre una pallina:

a) qual è la probabilità di estrarre un Promosso?
b) qual è la probabilità di estrarre un Promosso con giudizio di ingresso Buono?
c) qual è la probabilità di estrarre uno studente con giudizio di ingresso Buono?
d) sapendo che si è estratto un Promosso, qual è la probabilità che sia Ripetente?
e) qual è la probabilità di avere un Promosso, sapendo che si è estratto uno studente con giudizio di ingresso Ottimo?

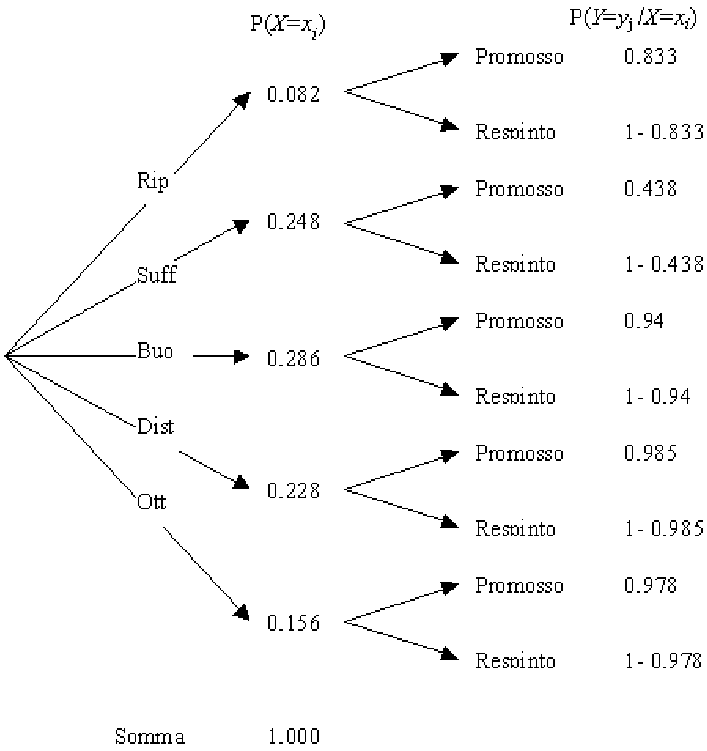


Figura 1

Ad alcune delle richieste è facile rispondere come alla c) o alla e); per le altre non è immediata la risposta. Essa può venire agevolata dalla rappresentazione grafica dell'esperimento attraverso un diagramma ad albero che mostra la sequenza logica del manifestarsi degli eventi che in esso si possono realizzare. E' formato da rami e nodi sui quali si inseriscono le probabilità dei rispettivi eventi.

Rispetto alla Figura 1, l'insegnante chiede agli studenti di recuperare, in questa nuova forma di scrittura, gli eventi semplici la cui probabilità è riportata nella colonna dei totali della Tabella 3 e gli eventi condizionati la cui probabilità è riportata nella seconda e terza colonna della Tabella 5.

Il percorso che dalla radice va al primo nodo rappresenta un evento semplice; dal nodo parte un ramo che rappresenta invece un evento condizionato. Il percorso completo individua un evento congiunto.

La probabilità di cui al punto b) ossia, la probabilità dell'evento congiunto Promosso e Buono, è il percorso lungo i rami "Buono e Promosso", ovvero lungo il ramo "Promosso" che segue il ramo "Buono". Essa è calcolabile come prodotto delle probabilità che si incontrano lungo il percorso. Sicché P(Buono∩Promosso) = P(Buono) · P(Promosso/Buono) e vale 0,286 · 0,94 = 0,269.

Le risposte alle altre domande si possono sempre ottenere con l'aiuto del diagramma ad albero applicando procedimenti via via più articolati.

Per rispondere al punto a), ad esempio, si deve seguire il percorso che dall'origine porta alla voce Promosso: si possono percorrere 5 rami e ciascuno evidenzia un evento complesso: (Ripetente∩Promosso)U(Sufficiente∩Promosso) ∪ (Buono∩Promosso) ∪ (Distinto∩Promosso) ∪ (Ottimo∩ Promosso).

Si noti che i 5 rami rappresentano 5 eventi incompatibili, nel senso che arrivare all'evento "Promosso" percorrendo un ramo esclude che se ne sia percorso un altro. Per ottenere la probabilità cercata, si ricorre quindi alla regola delle probabilità totali: "la probabilità del verificarsi di uno o l'altro di più eventi incompatibili si ottiene come somma delle probabilità dei singoli eventi".

Quindi la probabilità cercata è data da:

P(Promosso) = (Ripetente∩Promosso) + (Sufficiente∩Promosso) + (Buono∩Promosso) +
+ (Distinto∩Promosso) + (Ottimo∩ Promosso) =
= P(Ripetente) · P(Promosso/Ripetente) + P(Sufficiente) · P(Promosso/Sufficiente) + P(Buono) · P(Promosso/Buono) + P(Distinto) · P(Promosso/Distinto) + P(Ottimo) · P(Promosso/Ottimo) =
= 0,082*0,833+0,248*0,438+0,286*0,94+0,228*0,985+0,156*0,987 = 0,823.
Essa si può vedere anche come media aritmetica delle probabilità condizionate con pesi dati dalle probabilità degli eventi condizionanti.
L'insegnante conduce gli studenti ad interpretare il risultato ottenuto. Quale fra i giudizi di ingresso porta ad una maggior probabilità di promozione?

Per la risposta alla domanda d) il percorso è più complesso; si semplifica scrivendo la formula della probabilità condizionata di un evento e ricercando, con l'aiuto del diagramma, le probabilità richieste.

$$\mathrm{P}(\mathit{Ripetente/Promosso}) = \frac{\mathrm{P}(\mathit{Ripetente, Promosso})}{\mathrm{P}(\mathit{Promosso})} =$$

$$= \frac{0{,}082 \cdot 0{,}833}{0.082 \cdot 0.833 + 0.248 \cdot 0.438 + 0.286 \cdot 0.94 + 0.228 \cdot 0.985 + 0{,}156 \cdot 0.987} = 0{,}083.$$

Il numeratore è la probabilità dell'evento congiunto (Ripetente∩Promosso) e il denominatore è la probabilità dell'evento Promosso esaminata in risposta alla domanda a).
La probabilità P(*Ripetente/Promosso*) è detta probabilità a posteriori e si calcola applicando la formula di Bayes (vedi ad es. E. Parzen) che valuta la probabilità della causa noto l'effetto.
L'insegnante porta ad analizzare i dati dei giudizi iniziali noti gli esiti finali. A parità di esito finale "Promosso", qual è il giudizio iniziale che ha la probabilità più elevata di esserne "la causa"?

Elementi di prove di verifica

Considerazioni su un test di ingresso.
Si è presa in esame la tabella con alcuni risultati relativi ad un questionario, proposto agli studenti del corso di laurea in Economia della Cooperazione Internazionale e dello sviluppo nelle Università di Roma e Perugia. Tra le domande, nel questionario si chiedeva una autovalutazione della preparazione ricevuta nel corso degli studi preuniversitari (X) e il tipo di scuola di provenienza (Y).
La tabella seguente riporta la classificazione doppia dei 99 studenti che hanno risposto ad entrambe le domande.
La seguente tabella è presa da un articolo di. E. Lombardo. G. Schinaia.

Scuola di provenienza	Autovalutazione della propria preparazione				Totale
	Buona	Mediocre	Scarsa	Non so giudicare	
Liceo Scientifico	15	10	3	3	31
Liceo Classico	6	17	15	1	39
Altri Istituti	7	8	10	4	29
Totale	28	35	28	8	99

Tabella 6
Distribuzione di frequenza per scuola di provenienza e autovalutazione della preparazione.

1) Quante persone provengono dal Liceo Scientifico?
2) Quante persone provenienti dal Liceo Classico considerano buona la propria preparazione?
3) Quante persone considerano mediocre la propria preparazione?
4) Quante persone che considerano scarsa la propria preparazione provengono da Altri istituti?
5) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente questo provenga dal Liceo Scientifico?
6) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente questo abbia un'autovalutazione scarsa e provenga dal Liceo Classico?
7) Costruire una tabella che permetta di rispondere a domande analoghe alla 5) e alla 6) per ogni tipo di scuola e per ogni livello di autovalutazione.
8) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente proveniente dal Liceo Scientifico, questo risulti con un'autovalutazione mediocre?
9) Qual è la probabilità che preso a caso uno studente con un'autovalutazione scarsa, questo risulti provenire dal Liceo Classico?
10) Costruire la tabella che fornisce le probabilità di provenire dai diversi tipi di scuola condizionatamente al livello di autovalutazione.
11) Costruire la tabella che fornisca le probabilità dei diversi livelli di autovalutazione condizionatamente a ciascun tipo di scuola.
12) Costruire il diagramma ad albero che mostra le possibili sequenze logiche del manifestarsi degli eventi "Tipo di scuola" e "Livello di autovalutazione" (secondo la sequenza indicata) nel caso di estrazione casuale di uno studente. Integrare il grafo con le probabilità di percorrenza di ciascun ramo.
13) Costruire il grafo che mostra le possibili sequenze logiche del manifestarsi degli eventi "Livello di autovalutazione" e "Tipo di scuola" (secondo la sequenza indicata) nel caso di estrazione casuale di uno studente. Integrare il grafo con le probabilità di percorrenza di ciascun ramo e commentare la successione degli eventi che nel grafo si presentano.
14) Qual è la scuola di provenienza più probabile tra chi autovaluta "buona" la propria preparazione? E tra chi la autovaluta "mediocre"?
15) In base ai dati di questa rilevazione, un docente della Facoltà di Economia, sapendo che i 52 studenti della sua classe provengono tutti dal liceo classico, quanti studenti che autovalutano la propria preparazione inferiore a buono può stimare di avere?

Come quando fuori piove

Percorso: **Leggere, analizzare e prevedere: uso di una serie storica**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Predisporre la struttura della matrice dei dati grezzi rispetto a una rilevazione pianificata e inserire i dati rilevati anche in un foglio elettronico. Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici. Rappresentare fenomeni non lineari valutando la variazione media. Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze. Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze e utilizzarli per effettuare previsioni.	Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze. Serie storiche e loro rappresentazione. Valori medi e misure di variabilità, definizioni e proprietà. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza tra due punti. Equazione della retta; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità. Incrementi a passo costante, pendenza media.	Dati e previsioni Spazio e figure Relazioni e funzioni Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Meteorologico.

L’attività nasce dalla curiosità degli studenti sul clima del proprio paese, città, regione.

Descrizione dell’attività
La climatologia è fenomeno complesso, il cui studio fa riferimento a diversi aspetti: temperatura, precipitazioni e fenomeni vari, umidità e pressione atmosferica, stato del cielo e vento. Dopo averlo chiaramente definito, ogni fenomeno viene misurato con l’aiuto di strumenti opportuni; ciò può attivare l’interdisciplinarità con la fisica.

L'insegnante può condurre la classe ad usare internet per trovare risultati di ricerche già effettuate sulla meteorologia che possano servire da guida. Un sito interessante può essere www.climagri.it, che contiene fra l'altro l'elenco delle reti di osservazioni e banche di dati meteorologici, oppure quello dell'Istat www.istat.it dove il percorso: ambiente-stato ambientale-statistiche meteorologiche conduce ai dati del 1997 per tutti gli aspetti sopra indicati. Altra fonte di conoscenza scientifica e di dati meteorologici possono essere gli osservatori geofisici (es www.ossgeo.unimo.it).
Per non rimanere disorientati si suggerisce di seguire dapprima le sole precipitazioni. L'analisi può essere condotta o per una sola stazione di rilevamento lungo tutto il corso di un anno per cui sono disponibili i dati oppure rispetto a un mese particolare in tutte le stazioni rilevate.
La situazione dei siti Web indicati fa riferimento all'aprile 2004.
Nell'attività si fa uso dello strumento derivata, nota solo intuitivamente agli studenti. Il docente fornirà i dovuti aiuti.

Prima fase
La presente attività ha lo scopo di trattare un argomento pluridisciplinare e di consolidare elementi di statistica descrittiva quali i valori medi, in particolare la media aritmetica, e la variabilità.
I dati possono essere ricercati, anche in internet (ad esempio nel sito dell'Istat). Quelli sui quali si lavorerà sono serie storiche delle precipitazioni rilevate nella stazione meteorologica di Trieste:

Precipitazioni* (quantità in mm; frequenza in giorni) per la stazione di Trieste dal 1982 al 1999. (fonte ISTAT)

anno	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
quantità	1063,4	706,3	1028,6	745,3	871,8	1314,2	766,2	827,4	917,9
frequenza	82	73	100	85	83	85	88	92	85
anno	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
quantità	887,4	933,2	781,7	879,1	1166,8	1281,5	864,9	946,1	718,4
frequenza	83	92	80	83	100	108	78	84	105

Tabella 1

***Nota:** la quantità comprende il complesso di precipitazioni (nebbia, pioggia, neve, grandine ecc.) ridotte in acqua; per frequenza si intende il numero di giorni in cui la quantità di precipitazione ha raggiunto almeno un millimetro di altezza.

L'insegnante invita gli studenti a leggere la tabella. Qual è l'unità statistica? Cosa è stato rilevato rispetto a ciascuna unità? Cosa si intende per quantità? Cosa si intende per frequenza in questo contesto? Se si dovesse calcolare la quantità media delle precipitazioni per anno con riferimento al periodo come si potrebbe fare? L'insegnante guida gli studenti a scrivere la formula della media:
$M=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{n}$, dove n è il numero degli anni osservati, poi a calcolare la deviazione standard $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(q_i-M)^2}{n}}$, la varianza σ^2, il coefficiente di variazione C.V.= σ/M e a rappresentare graficamente i dati.

Parametri	Unità di misura
media 927,78	mm
dev.st. 175,66	mm
varianza 30855,15	mm^2
C.V. 0,1893	

Tabella 2

Tale lavoro può essere fatto manualmente e si può in un secondo tempo confrontare i dati ottenuti con quelli ricavati usando le funzioni predefinite del foglio elettronico. L'insegnante invita gli studenti a riflettere sul significato degli indici trovati e sul loro utilizzo. E' corretto affermare che le precipitazioni nei diversi anni sono stati pari alla media aritmetica M? Il valor medio fornisce un'informazione precisa dell'ammontare totale del fenomeno? La media aritmetica è quel valore che sostituito ai singoli dati non modifica la somma degli stessi? La somma degli scarti dei valori dalla media è pari a zero? La variabilità delle precipitazioni della stazione presa in considerazione è maggiore, minore o uguale a quella delle precipitazioni di un'altra stazione? L'insegnante invita gli studenti a cercare su Internet dati di altre stazioni, per lo stesso periodo, e ad effettuare confronti.
Gli studenti rappresentano graficamente la serie storica delle precipitazioni e tracciano la costante che rappresenta M.

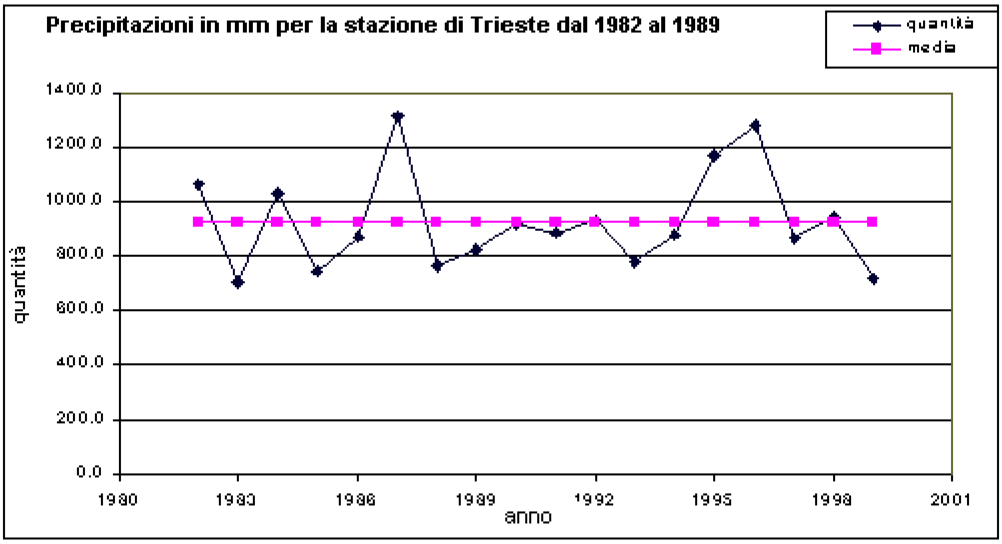


Figura 1

Una delle proprietà della media aritmetica è quella di rendere minima la somma dei quadrati degli scarti rispetto ad un altro qualsiasi valore, ossia:

$$\sum_{i=1}^{n}(q_i - M)^2 < \sum_{i=1}^{n}(q_i - Q)^2$$

dove Q è un valore qualsiasi diverso dal valore della media aritmetica.
La verifica sperimentale di quanto affermato sopra può essere fatta utilizzando un foglio elettronico del quale la tabella seguente fornisce un esempio.

Tabella dei valori $\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{q_i} - \mathbf{Q})^2$

		Q	$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{q_i} - \mathbf{Q})^2$
Qmin=	706,3		
Qmas=	1314,2	706,3	1438424,7
		767,1	1020227,1
passo	60,79	827,9	679595,2
		888,7	552407,4
		949,5	**550863,9**
		1010,3	674964,9
		1071,0	924710,2
		1131,8	1300100,0
		1192,6	1801134,3
		1253,4	2427812,9
		1314,2	3180135,96

Tabella 3

L'insegnante invita gli studenti a cercare i valori Minimo e Massimo delle quantità delle precipitazioni e a calcolare il valore chiamato "passo" come rapporto fra la differenza tra il massimo e il minimo (range) e un valore arbitrario k (in questo esempio k = 10), tenendo presente che il numero dei valori Q rispetto ai quali si vuol verificare la diseguaglianza è k+1.
In corrispondenza di ogni valore di Q viene calcolata la somma dei quadrati degli scarti tra le quantità annuali di precipitazione: $\sum_{i=1}^{n} (q_i - Q)^2$.
I dati corrispondenti sono riportati nel grafico di Figura 2.
L'insegnante pone alcun domande:

- L'andamento dei punti può essere associato a qualche funzione nota?
- L'andamento dei punti è decrescente? Se sì, fino a quale valore di Q?
- Dove si posiziona, rispetto ai valori di Q, il valore medio delle precipitazioni?

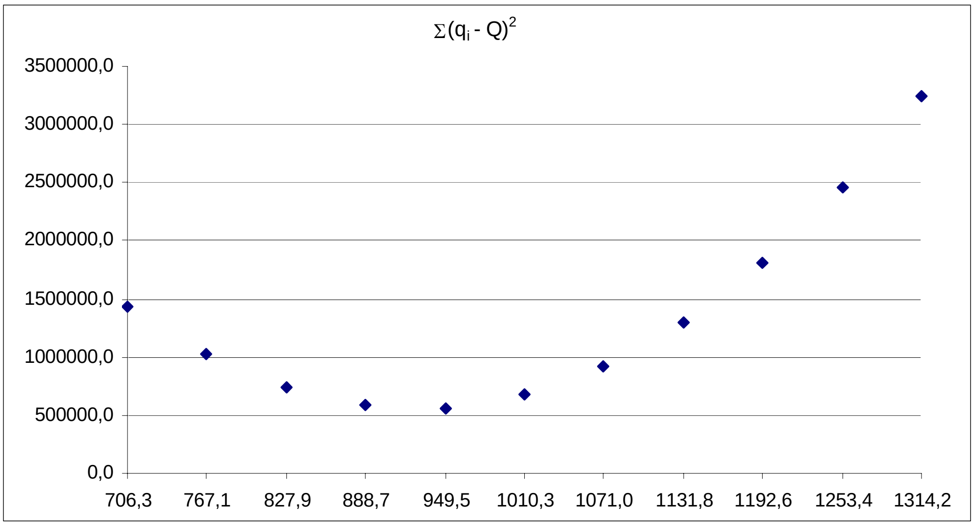


Figura 2

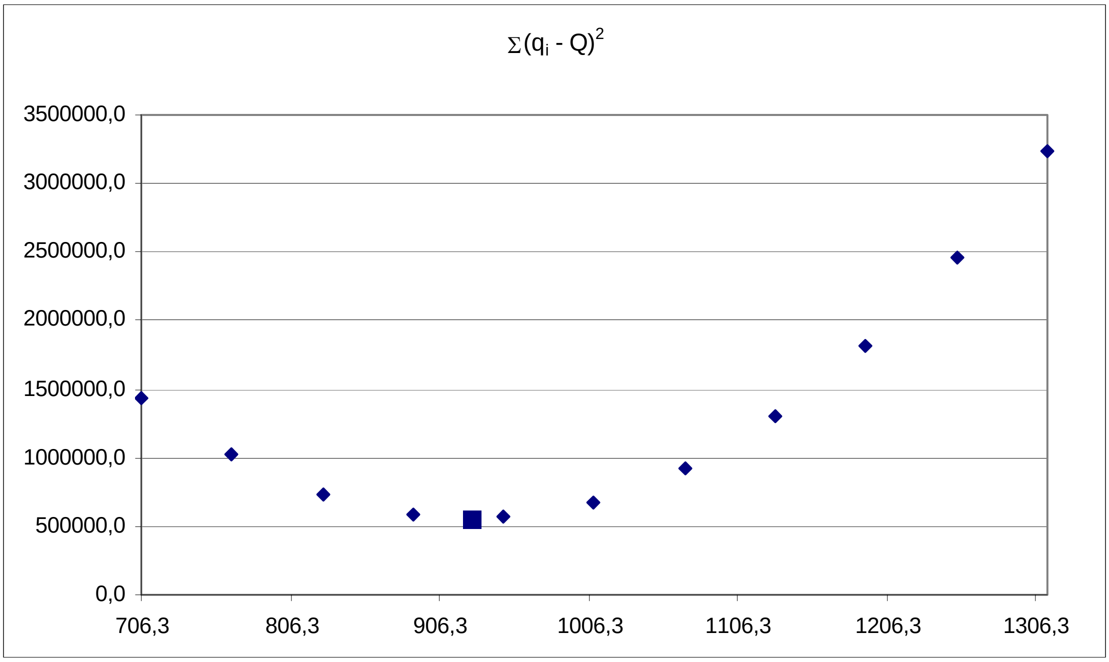


Figura 3

L'insegnante fa poi calcolare la somma dei quadrati degli scarti tra le quantità annuali di precipitazione e Q = M. Successivamente il valore è riportato nel grafico di Figura 3 segnalandolo in modo diverso.
Si evidenzia che la media è il valore che minimizza la somma dei quadrati degli scarti. L'insegnante consiglia di rifare la prova riducendo il passo da assegnare a Q nell'intervallo [888,7; 949,5] contenente il valor medio delle precipitazioni.
In un momento successivo l'insegnante propone lo studio analitico della funzione $f(Q)=\sum_{i=1}^{n}(q_i-Q)^2$, supponendo, per comodità di calcolo, Q variabile continua.
Il calcolo della derivata prima e del suo segno consente di verificare la congettura precedente.

$$\frac{d}{dQ}f(Q)=-2\cdot\sum_{i=1}^{n}(q_i-Q).$$

$$\frac{d}{dQ}f\;(Q)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}q_i-nQ=0 \qquad \Rightarrow \qquad Q=\frac{\sum_{i=1}^{n}q_i}{n}$$

Lo studio del segno della derivata prima consente di affermare che il valore trovato Q = M è un punto di minimo.
Ci possono essere altri punti di minimo? L'insegnante induce gli studenti a riflettere sul tipo di funzione studiata. In corrispondenza al valore di minimo la funzione è pari a $\sum_{i=1}^{n}(q_i-M)^2$ che è il numeratore di σ^2.
L'insegnante fa calcolare agli studenti il valore della deviazione standard (σ= 175,66 in mm) e chiede se il valore trovato indica una alta o una bassa variabilità del fenomeno.
Essendo le precipitazioni un carattere di tipo trasferibile – si può cioè pensare che le precipitazioni si spostino da un anno a un altro - è possibile costruire un indice adimensionale di variabilità normalizzato basato sul confronto fra la deviazione standard trovata e il valore che essa assume in corrispondenza al caso di massima variabilità. Quando si può parlare di massima variabilità?

L'insegnante ipotizza una situazioni limite: il totale delle precipitazioni si è avuto in un solo anno (caso di massima trasferibilità). Il calcolo della deviazione standard è riportato nella Tabella 4:

Caso teorico di massima variabilità			
quantità: q_i	**n_i**	**$q_i\,n_i$**	**$q_i^2\,n_i$**
0	17	0	0
16700,2	1	16700,2	278896680
totali	18	16700,2	278896680
		Media = 927,8	
		$_1\sigma_{max}$ = 14633467,8	

Tabella 4

L'insegnante fa osservare che la media aritmetica della distribuzione teorica di massima variabilità è la stessa della distribuzione osservata, mentre la deviazione standard è diventata grandissima.
Il caso analizzato è realistico? E' forse più realistico assegnare ad ogni anno la quantità minima di precipitazione e all'ultimo anno la rimanente quantità fino ad arrivare al totale osservato ($\sum_{i=1}^{n} q_i$)?
L'insegnante guida gli studenti a costruire la distribuzione di massima variabilità vincolata e fa calcolare anche per questa distribuzione la deviazione standard. La Tabella 5 riporta i calcoli della deviazione standard:

Distribuzione teorica di massima variabilità vincolato			
quantità: q_i	**n_i**	**$q_i\,n_i$**	**$q_i^2\,n_i$**
706,3	17	12007,1	8480614,73
4693,1	1	4693,1	22025187,6
totali	18	16700,2	30505802,3
		Media = 927,8	
		$_2\sigma_{max}$ = 833974,574	

Tabella 5

Anche in questo caso il valore medio della distribuzione teorica di massima variabilità vincolata è lo stesso della distribuzione osservata, mentre lo scarto quadratico medio è diminuito rispetto al precedente, pur rimanendo più elevato rispetto a quello calcolato sui dati osservati.
A questo punto l'insegnante fa osservare che per rispondere alla domanda posta (La variabilità rilevata è alta o bassa?) occorre effettuare un confronto fra 175,66 mm e, alternativamente, $_1\sigma_{\max}$, $_2\sigma_{\max}$. Come è possibile confrontare i tre dati trovati?
L'insegnante ricorda che i confronti si possono effettuare per differenza o per rapporto. In questo caso entrambi i confronti sono possibili, poiché l'unità di misura della deviazione standard è sempre espressa in mm. Invita perciò gli studenti ad effettuare tutti i confronti possibili. Quanti sono? (σ- $_1\sigma_{\max}$; $_1\sigma_{\max}$ - σ; σ - $_2\sigma_{\max}$; $_2\sigma_{\max}$ -σ:. $\frac{\sigma}{_1\sigma_{\max}}, \frac{_1\sigma_{\max}}{\sigma}, \frac{\sigma}{_2\sigma_{\max}}, \frac{_2\sigma_{\max}}{\sigma}$). L'insegnante invita a giustificare ciascuno di essi e conduce gli studenti verso quei confronti che variano tra 0 e 1. Si tratta di confronti mediante rapporti. Essi hanno tra l'altro il vantaggio di perdere ogni riferimento all'unità di misura.
Il valore della deviazione standard della serie storica delle precipitazioni è un valore non negativo ed inferiore al massimo calcolato in una delle situazioni limite sopra descritte. L'insegnante fa pertanto calcolare i due indici normalizzati come rapporto tra la deviazione standard della serie storica e quella delle due situazioni limite.

Primo caso: $\dfrac{\sigma}{{}_1\sigma_{max}}$	0,0000120
Secondo caso: $\dfrac{\sigma}{{}_2\sigma_{max}}$	0,0002106

L'insegnante fa osservare che lavorando sui rapporti compresi tra 0 e 1, la lettura del risultato ottenuto è facilitato. E' ora evidente che la variabilità delle precipitazioni rispetto alla variabilità massima teorica è effettivamente bassa.

Nota di approfondimento.
Facendo riferimento a una distribuzione di frequenze (x_i, n_i), con media M, l'insegnante potrà esprimere il caso teorico di massima variabilità in modo formale:

x_i	n_i
0	n – 1
n·M	1
Totale	n

L'insegnante farà vedere che la media della distribuzione di massima variabilità è ancora M, guiderà poi gli studenti ai passaggi algebrici che consentono di dimostrare che $\sigma_{max} = M \cdot \sqrt{n-1}$ e perciò $\dfrac{\sigma}{\sigma_{max}} = \dfrac{\sigma}{M \cdot \sqrt{n-1}}$.

Ciò giustifica un'altra delle misure proposte, ossia $C.V. = \dfrac{\sigma}{M}$. L'insegnante domanda agli studenti da cosa dipende C.V.

Seconda fase.
L'insegnante ripropone agli studenti parte della Tabella 1 per mostrare loro altri approfondimenti che sono agevolati dall'uso del laboratorio di matematica.

Precipitazioni (quantità[1] in mm) per la stazione di Trieste dal 1982 al 1999.
(fonte ISTAT)

anno	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**
quantità	1063,4	706,3	1028,6	745,3	871,8	1314,2	766,2	827,4	917,9
anno	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
quantità	887,4	933,2	781,7	879,1	1166,8	1281,5	864,9	946,1	718,4

Tabella 6

4 Utilizzando il foglio elettronico, e in particolare la funzione Tendenza( ), è possibile visualizzare il Trend, ossia l'andamento delle precipitazioni in funzione del tempo (Figura 4).

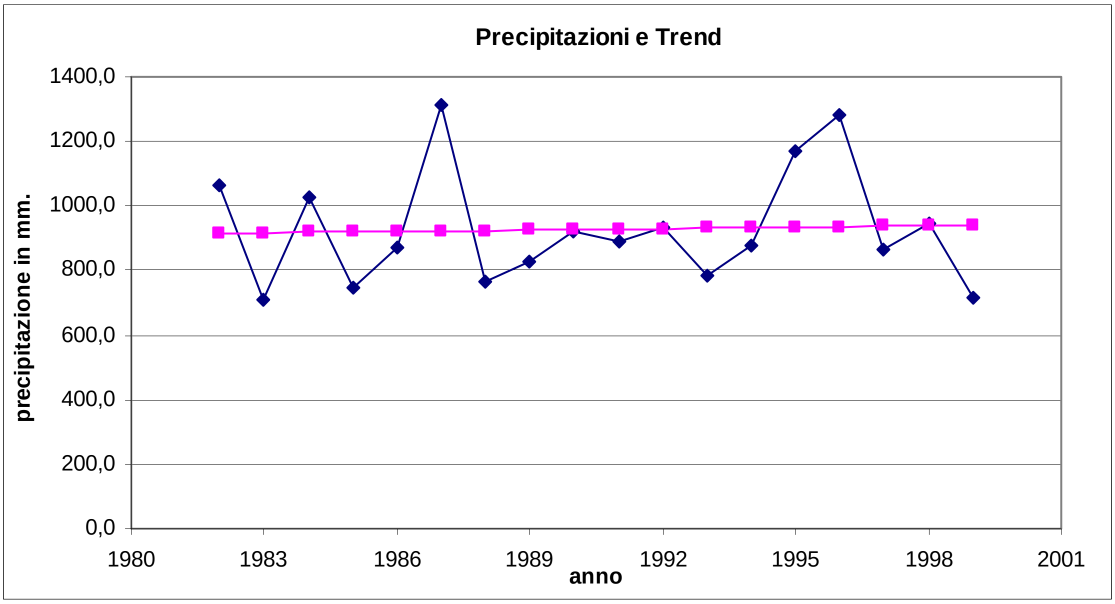


Figura 4

Si può sintetizzare l'andamento con una funzione matematica? Quale principio potremmo usare per la sua determinazione? A cosa può servire la funzione scelta? Conviene scegliere una funzione che passa "per" i punti osservati o "fra" gli stessi?

Si apre così un dibattito con gli studenti.

Successivamente l'insegnante descrive i passi necessari alla risoluzione del problema dell'interpolazione statistica "fra" punti.

- Con l'aiuto della rappresentazione grafica si sceglie il tipo di funzione che meglio descrive il fenomeno da osservare (lineare, quadratica, esponenziale,….).
- Ricerca dei parametri che caratterizzano la funzione scelta.
- Verifica della attendibilità del modello individuato.

La ricerca dei parametri può essere fatta con metodi tra loro alternativi. Scelta la funzione che passa fra i dati è possibile usare, ad esempio, il metodo dei minimi quadrati. In tal caso ci si propone di trovare la funzione che minimizza l'errore che si commette sostituendo ai dati osservati i valori calcolati attraverso la funzione scelta. Il ricorso alla funzione Tendenza( ) di fatto ha già imposto la scelta della funzione interpolatrice: la retta $y = a + b \cdot x$ (dove con y si indicano le quantità e con x gli anni) ed anche del metodo di interpolazione: il metodo dei minimi quadrati ossia la minimizzazione della quantità:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b \cdot x_i)]^2$$

L'uso della funzione Excel Trend() fornisce automaticamente i valori teorici interpolati che sono le quantità $\hat{y}$ di precipitazioni in mm. Il foglio elettronico consente inoltre il calcolo dei parametri della "retta dei minimi quadrarti" utilizzando le funzioni predefinite di Excel.[2]

b =	= PENDENZA( )
a =	= INTERCETTA ( )

[2] Le espressioni di a e b sono rispettivamente $a = M_y - bM_x$; $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)^2}$; per i dettagli vedere Matematica 2003, Dati e Previsioni, Anche le rette raccontano.

In questo caso la retta interpolatrice è: y = -2103,769 + 1,523·x. Nell'equazione l'intercetta è espressa in mm e la "pendenza", o meglio il coefficiente angolare, è espresso in mm per anno. L'insegnante conduce gli studenti a riflettere sul significato del coefficiente angolare che esprime qui l'incremento della quantità di precipitazione al variare da un anno al successivo.
L'insegnante chiede alla classe di calcolare il valore di $\hat{y}$ quando x = 1990,5, ossia il valore medio degli anni. Si ottiene 927,76. Si era già trovato questo valore o una sua approssimazione? Se sì, cosa rappresenta? Dunque la retta dei minimi quadrati passa per il punto (M_x; M_y). Qual è l'equazione del fascio di rette passanti per (M_x; M_y)? L'insegnante, dopo aver ricordato l'equazione: $y - M_y = m \cdot (x - M_x)$, invita gli studenti ad assegnare valori arbitrari al coefficiente angolare m ed a calcolare, per ciascun valore di m, il valore dell'errore, ossia ε.
La rappresentazione grafica di Figura 5 mostra alcune rette del fascio passante per P = (M_x; M_y).

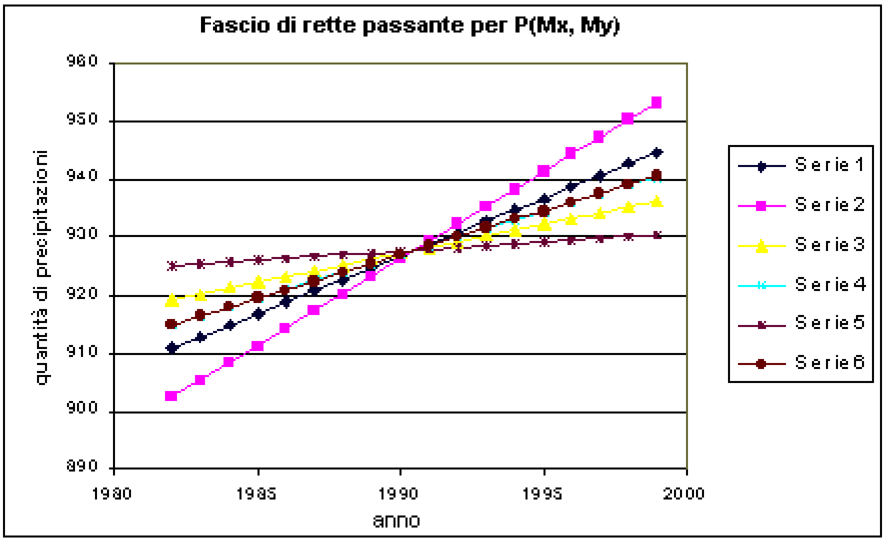


Figura 5

La seguente tabella riporta i valori del coefficiente angolare m delle rette rappresentate nel grafico e del corrispondente errore ε. In grassetto è evidenziato il valore di m corrispondente al valore dell'errore ε più piccolo.

m	ε
2	554379,1578
3	555325,8578
1	554401,4578
1,5	**554269,1828**
0,3	554993,6228

Tabella 6

La Tabella 7 mostra uno stralcio del foglio Excel con le funzioni e il procedimento usato per il calcolo del valore interpolato $\hat{y}$ e dell'errore.

	A	B	C
1	**anno**	**1982**	**1983**
2	**quantità**	1063,4	706,3
3	trend	=TENDENZA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1;B1:C1;VERO)	=TENDENZA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1;C1:D1;VERO)
4	$\hat{y}$	=$B$8*B1+$B$7	=$B$8*C1+$B$7
5	e($\hat{y}$)	=(B4-B2)^2	=(C4-C2)^2
6			
7	a	=PENDENZA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1)	
8	b	=INTERCETTA($B$2:$C$2;$B$1:$C$1)	

Tabella 7

L'errore della retta dei minimi quadrati risulta pari a 554268,9. L'insegnante fa notare che questo valore è vicino al valore calcolato sperimentalmente per m=1,5. Fa poi scrivere agli studenti le equazioni della retta con minimo errore sperimentale e quella fornita dal metodo dei minimi quadrati e fa commentare i risultati ottenuti.

La funzione trovata sintetizza in modo appropriato il fenomeno studiato? Può servire per la ricostruzione di serie storiche mancanti di alcuni dati? Può servire a prevedere la quantità nei prossimi anni?

Le precipitazioni annuali sono anche influenzate da altri fattori (che qui non compaiono) che fanno assumere al grafico di Figura 4 l'andamento a "picchi", di cui il trend è una delle componenti. Sarebbe stato opportuno scegliere qualche altro tipo di funzione per poter rispondere ai quesiti riguardanti problemi di interpolazione e previsione? Usando il foglio elettronico Excel è possibile inserire nel grafico linee di tendenza di grado superiore al primo e di queste si possono avere anche le corrispondenti equazioni matematiche. Il grafico di Figura 6 mostra alcuni esempi.

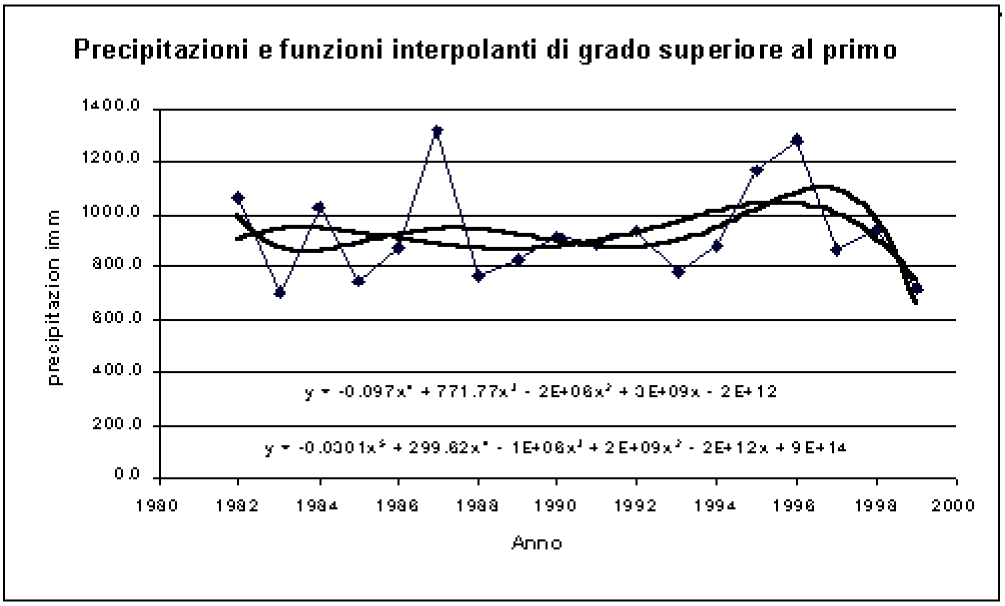


Figura 6

L'insegnante fa osservare che, sui dati di Tabella 1, oltre che la quantità delle precipitazioni era riportata anche la frequenza in giorni. L'insegnante propone di prendere in considerazione la quantità in funzione della frequenza, in modo da effettuare previsioni in funzione non più dell'anno in cui le precipitazioni avvengono, ma in funzione del numero di giorni con precipitazioni.

Seguendo le indicazioni che hanno consentito l'interpolazione della serie storica delle quantità, si arriva a visualizzare la Figura 7 che rappresenta la nuvola dei punti e la retta interpolatrice che, in questo contesto si è chiamata di regressione. La sua equazione, ottenuta utilizzando le funzioni di Excel, è:

$$\hat{y} = 7{,}468x + 269{,}767$$

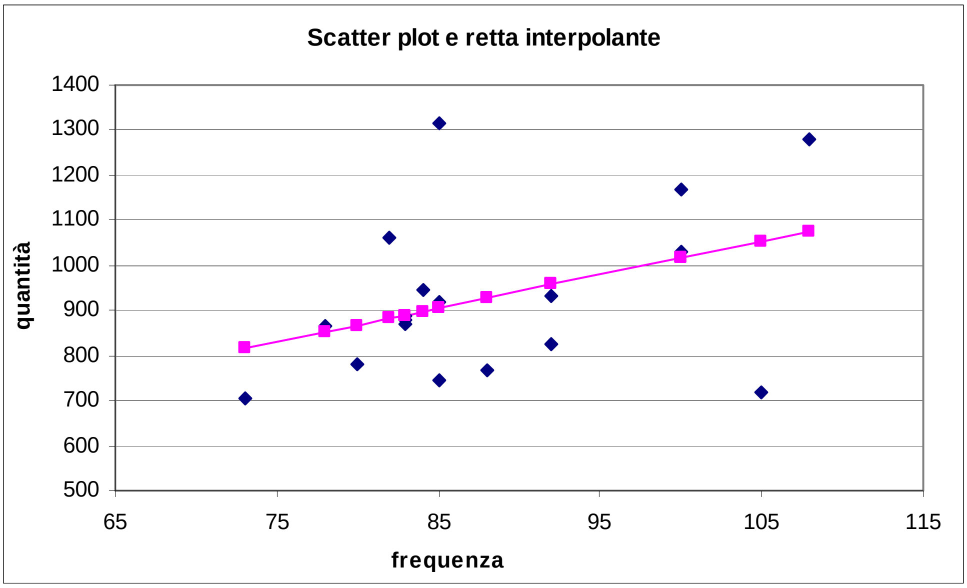


Figura 7

E' attendibile la scelta fatta? Possiamo effettuare qualche previsione?
Per rispondere l'insegnante fa calcolare agli studenti la media dei valori interpolati $\hat{y}$, e chiede cosa si è ottenuto. E' stato ottenuto proprio il valore di M_y? Fa calcolare poi la somma dei quadrati degli scarti fra valori osservati delle quantità di precipitazioni e la propria media (cioè fa calcolare la devianza di y) e la stessa quantità sui dati teorici forniti dalla retta. Se si calcola la loro differenza, cosa si ottiene? E' l'errore ε
L'insegnante formalizza quanto osservato:
$M_y = M_{\hat{y}}$;
$\sum_{i=1}^{n}(y_i - M_y)^2$ è la devianza (totale) calcolata sui dati osservati, $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - M_y)^2$ è la devianza calcolata sui valori interpolati;
la loro differenza è l'"errore" e viene indicato con $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$.

L'insegnante pone il problema: quanta parte della devianza totale è imputabile all'errore ε? L'insegnante fa calcolare il rapporto fra ε e la devianza totale. Il valore è 0,844.
Il complemento a 1, pari a 0,156 come si può interpretare? La retta interpolante spiega molto o poco del legame tra la quantità di precipitazione e la frequenza? Forse le variabili che sono state prese in considerazione per spiegare la quantità di precipitazione sono poche? Si possono invitare gli studenti a ricercare in Internet le tecniche utilizzate per fare previsioni meteorologiche.

Il cruciverba matematico

Percorso: **L'importanza del linguaggio**

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà. Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici (linguaggio degli insiemi, linguaggio dell'algebra elementare, linguaggio logico). Analizzare semplici testi del linguaggio naturale, individuando eventuali errori di ragionamento. Riconoscere e usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica ("se…allora", "per ogni", "esiste almeno un", ecc.). Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi.	Argomentare, congetturare, dimostrare	Italiano Storia Lingua straniera
Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, la notazione con freccia, il diagramma ad albero, il grafico.		Relazioni e funzioni	
Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, ecc.) per descrivere e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime in campo matematico e in altri ambiti riferibili a discipline scolastiche oppure ad altre esperienze culturali.		Risolvere e porsi problemi	

Contesto

Linguaggio e vocabolario.

Il contesto dell'attività è quello dell'uso del vocabolario, dei manuali, dei libri di consultazione che si potrebbe pensare abbiano perso di importanza. Invece, anche con l'avvento della tecnologia, rimangono un ottimo strumento, in particolare per la ricerca del significato dei termini matematici. È dunque importante progettare delle attività che rendano gli studenti consapevoli delle possibilità e dei limiti degli strumenti che hanno a disposizione (biblioteca, aula multimediale,…)

Descrizione dell'attività

L'attività inizia con una tecnica di *brain-storming* per l'individuazione di termini conosciuti dagli studenti appartenenti al lessico della matematica e di proposte di inserimento (da parte dell'insegnante) di altri termini fondamentali sfuggiti all'attenzione degli studenti. Si prosegue con una discussione sui termini trovati che hanno significati diversi in altre discipline (parabola, sistema, evento,…).
Si propone la costruzione di un "vocabolario", contenente i lemmi individuati. Si giungerà, quindi, alla compilazione di *un lessico di base*, attraverso la registrazione del termine, la ricerca della definizione:

a. nella propria memoria, con tutte le inesattezze del caso;
b. sui libri di testo di matematica – meglio se si consultano più libri
c. su vocabolari – anche qui meglio consultarne più di uno

Questa ricerca si può fare singolarmente o in gruppo, in biblioteca per reperire vocabolari e manuali scolastici diversi che contengano i termini presi in esame e ulteriore ricerca della definizione del termine su *internet* per valutarne la correttezza o meno nell'uso e/o eventualmente il suo arricchimento semantico. E' essenziale che alla fine tutti condividano la correttezza delle *definizioni* trovate per la stessa parola.
L'attività offre anche l'occasione per consolidare conoscenze ed abilità su argomenti già affrontati nel corso degli anni precedenti. L'attenzione va posta quindi sul confronto tra le diverse definizioni, gli esempi, le rappresentazioni, le dimostrazioni e tutto ciò che può essere significativo. Un dibattito a conclusione dell'attività consente eventuali altre osservazioni sui linguaggi usati dai manuali o da altri testi e un'analisi sulle difficoltà più comuni che incontrano gli studenti nella comprensione di tali linguaggi.

<u>Prima fase</u>

L'insegnante invita gli studenti a scrivere alla lavagna i termini di matematica che ricordano, incontrati negli anni precedenti (*brain-storming*).
L'insegnante, poi, costruisce un cruciverba facile e piccolo (50-60 caselle), che viene proposto già risolto agli studenti, ma privato delle *definizioni*.
Gli studenti sono invitati a fornire essi delle definizioni alle parole inserite nello schema.

L'attività può essere organizzata all'inizio dividendo gli studenti della classe, tre, quattro gruppi: a ciascun gruppo viene assegnato un cruciverba diverso e così quando un gruppo ha dato tutte le definizioni può ridisegnare lo schema senza le parole e darlo a risolvere a un altro gruppo.

Una possibilità alternativa a quella descritta all'inizio è quella di far costruire agli studenti degli schemi di cruciverba completi. Questa modalità dà più soddisfazione ma è un'impresa non facile. Si può rendere più efficace organizzando una gara a squadre.
Attraverso il lavoro svolto in questa prima fase gli studenti familiarizzano con la nozione di definizione, seppure in un contesto di gioco, e riflettono sul *ruolo*, l'*importanza*, la *ricchezza* delle *parole*.

Esempio 1:

	1 **C**	**I**	2 **R**	**C**	3 **O**	**N**	4 **F**	E	5 **R**	**E**	**N**	**Z**	6 **A**	
	M		**E**		**R**		**A**		**E**				**N**	
7 **P**			8 **A**	**S**	**I**	**N**	**T**	**O**	**T**	**I**			**G**	
R			**L**		**G**		**T**		**T**			9 **A**	**O**	
10 **I**	**N**	11 **D**	**I**	**C**	**I**		**O**		**O**				**L**	
M		**U**		12 **I**	**N**		**R**			13 **C**	**U**	14 **B**	**O**	
I		**E**		15 **F**	**E**		16 **E**	17 **N**	**N**	**E**		**A**		18 **T**
	19 **P**			**R**		20 **A**		**O**				**S**		**R**
	21 **A**	**R**	**E**	**A**		**V**		22 **N**	**U**	**L**	**L**	**E**		**E**

Figura 1

Orizzontali

1. Luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto centro.
8. L'iperbole ne ha sempre due.
9. Asintoto orizzontale.
10. Coppia di numeri naturali che indicano la posizione di un elemento di una matrice.
12. Isaac Newton.
13. Parallelepipedo con i lati tutti congruenti.
15. Federigo Enriques.
16. Lettera con cui si indica l'insieme dei naturali.
21. Misura di una superficie.
22. Né positive né negative.

Verticali

1. Centimetri.
2. L'insieme dei numeri che soddisfa l'assioma del continuo.
3. Il punto di incontro degli assi nel piano cartesiano.
4. Uno dei termini della moltiplicazione.
5. Uno dei quattro angoli formati da due perpendicolari.
6. La parte di piano compresa tra due semirette aventi origine comune.
7. I numeri naturali maggiori di uno che sono divisibili solo per uno e per se stessi.
11. Il successivo di uno.
13. Campo di esistenza.
14. Lato la cui misura serve per calcolare l'area di un rettangolo.
17. Negazione.
18. Precede il quattro nei numeri naturali.
19. Principia Arithmetica.
20. Asintoto verticale.

Seconda fase

Nella seconda fase si indaga sulle definizioni di particolari parole di significato matematico.
Si fissa l'attenzione su una o più parole (per esempio: angolo, fattore, radice, equazione, incognita, costante, variabile, indeterminata, parametro, postulato, superficie, sistema, assioma, principio, teorema, proposizione, legge, regola, proprietà, e così via) e se ne cerca la definizione in matematica e nelle altre discipline per quelle possibili.
Alla fine di questa fase si *discute tutti insieme sulla qualità delle definizioni* date.
Se si sovrappone questa fase della ricerca alla precedente, si può cercare di inserire tali parole in uno schema di cruciverba: per facilitare il compito si può adottare uno schema con molte caselle nere, ovvero con pochi incroci.

Terza fase

Nella terza fase si discute delle varie definizioni adoperate, al fine di:

a. capire bene il significato del termine in questione: con un'attività così orchestrata rimane certamente più impresso un concetto di quanto non accada normalmente;
b. confrontare diciture diverse, per trovare errori (se ce ne sono) e capire *perché* sono errori. Errori nelle definizioni date dagli studenti, ma talora anche nei libri (confrontare più testi diversi serve a smitizzare il "testo"). Ma più che ricercare errori si possono trovare **sfumature** diverse di significato per esempio tra lingua comune (vedi vocabolari) e lingua tecnica, imprecisioni e trascuratezze nel considerare ad esempio tutti i possibili casi.

Si possono fare ricerche e considerazioni etimologiche e storiche, se è il caso.
In generale si approfitta dell'occasione per concentrarsi sull'importanza della osservazione minuziosa delle parole e del loro uso appropriato. La ricerca stessa di una definizione dal libro di testo è di per sé un'attività non banale, anche perché bisogna saper distinguere tra definizioni e proprietà: ad esempio una cosa è la definizione di m.c.m. (il più piccolo numero….), un'altra cosa è la regola per determinarlo (quel numero che ha come fattori tutti i fattori comuni e non comuni….).
E' opportuno, inoltre, distinguere tra i vari tipi di definizione. Quella del *Vocabolario* deve tener conto di tutti i possibili significati del termine e tende ad essere al massimo esauriente ed esplicativa. Quella che in *enigmistica* è chiamata definizione, lo è fino a un certo punto. Infatti è, o una "descrizione" del senso della parola cercata, o allude a una proprietà o caratteristica della stessa. E se la parola in questione ha più di un significato, si può fare riferimento ad uno di essi a scelta. Qualche volta si gioca sullo "slittamento" tra la parola come oggetto linguistico e il suo significato. La presenza di definizioni ambigue, umoristiche, evocative, originali è un pregio, purché non si ecceda in tal senso. Invece, in *matematica* deve essere chiara, non ambigua, non circolare (non si possono definire le rette perpendicolari come quelle che formano angoli retti e gli angoli retti come quelli formati da rette perpendicolari!); essa è inoltre "normativa" in un senso molto forte. Quando si dichiara ad esempio che un rettangolo è un quadrilatero con gli angoli retti, poi bisogna attenersi rigorosamente e concludere ad esempio che un quadrato è un particolare rettangolo. Inoltre, bisogna osservare che le definizioni in matematica hanno un senso in riferimento ad una teoria: cambiando la teoria potrebbe cambiare il senso della definizione stessa, oppure perdersi il medesimo. Ad esempio in un contesto di geometria euclidea ha senso definire che una retta r è parallela ad una retta s se ha la stessa distanza da questa, ma in un contesto di geometria iperbolica la definizione non ha più valore (infatti una curva equidistante da una retta non è neanche una retta). Sono cose ovvie per un insegnante, ma vale la pena di sottolineare questi aspetti che spesso sfuggono agli studenti anche perché sono presenti solo nella matematica e (molto parzialmente) nelle altre materie scientifiche.

Osservazione. Bisogna tener presente che lo scopo finale è di riflettere su alcuni concetti e sull'uso della lingua per chiarirli: il gioco del cruciverba è solo uno strumento (divertente e motivante) per giungere ad essi.

Se non si lavora più con le parole crociate, le parole matematiche da indagare potranno scaturire dal lavoro che l'insegnante sta svolgendo nella classe o da qualunque altra fonte, anche occasionale, facendo, anche, costruire agli studenti un *Glossario* di *matematica* con le *parole chiave*.
Infatti, una maggiore consapevolezza del significato dei termini permette anche una maggiore comprensione dei concetti.

Possibili sviluppi
Si possono porre e discutere questioni come: perché occorre dare definizioni, qual è l'uso che se ne fa (ad es. nelle dimostrazioni). Si può parlare della libertà che c'è nel definire, delle scelte possibili a volte diverse (un parallelogramma è o non è un trapezio? Un triangolo equilatero è o non è isoscele?), della necessità di nozioni primitive, in una certa misura dell'arbitrio della loro scelta, e così via. Qualsiasi argomento, comunque, può dare l'occasione per riflessioni, in particolare sul linguaggio usato dai manuali scolastici o da altri testi, e sarà sempre possibile chiarire contestualmente qualche dubbio sugli aspetti teorici. I testi scolastici quando parlano di geometria presentano solitamente una maggiore varietà nell'impostazione, e quindi può essere più interessante (ma anche più impegnativo) un lavoro di confronto: iniziando da un argomento specifico, si potrà poi ampliare il discorso all'intera struttura organizzativa della disciplina.

Un altro sviluppo è dato dal *Crucinumero*, che può servire come ripasso di argomenti precedentemente svolti. Ecco un esempio:

1		2		3
		4	5	
6	7			
8				

Orizzontali

1\. Valore di k in $x^2 - 26x + k$ per avere 2 radici entrambe numeri primi
1\. Il numero primo che viene dopo il quadrato del 7 verticale
6\. L'antiperiodo del numero che si ottiene dividendo per 30000 il numero x che si ottiene sottraendo 30 all'uno orizzontale e moltiplicando il risultato per il numero delle carte in un mazzo da gioco francese.
8\. $x^2 + 1$ con x quinta parte del 3 verticale

Verticali

1. E' un quadrato perfetto (ma è scritto in binario)
2. Un cubo perfetto
3. Numero di partite (a tennis) per avere un vincitore in un torneo con 216 giocatori
5. Tante sono le partite del campionato di calcio di Serie A (nel 2004-2005)
7. Euro che sarebbe onesto ricevere giocandone 1 al Lotto sul singolo estratto

Elementi di prove di verifica

1. Rispondi alle seguenti domande utilizzando quello che hai imparato sulle definizioni:
   a. Quando due equazioni o due disequazioni o due sistemi si dicono "equivalenti"?
   b. In quali altri contesti hai utilizzato il termine equivalenti?
   c. Che cos'è un numero?
   d. Che cosa si intende per successivo di un numero naturale?

2. Spiega che cosa significano in matematica le parole: dimostrazione, congettura, argomentazione, assioma, teorema, legge, regola, formula. Evidenzia analogie e differenze.

3. I seguenti termini assumono significati diversi a seconda del contesto (matematico, extra-matematico): parabola, fattore, sistema, iperbole, radice, divisione, segno, proprietà. Spiega tali diversi significati.

4. Costruisci un cruciverba matematico con 6 righe e 6 colonne.

Euclide o Cartesio?

Percorso: **Congetture, refutazioni, dimostrazioni**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamento coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confrontare la proprie congetture con quelle prodotte da altri. Comprendere e usare forme diverse di argomentazione o di dimostrazione. In semplici casi costruire catene deduttive per dimostrare teoremi e congetture. Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.	Definizioni; teoremi e dimostrazioni.	Argomentare, congetturare, dimostrare	
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. Individuare e riconoscere proprietà di figure. Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza fra due punti. Equazione della retta; condizioni di parallelismo e di perpendicolarità.	Spazio e figure	
Ricorrere a mezzi tecnologici disponibili per esplorare situazioni problematiche individuate o proposte. Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema.		Risolvere e porsi problemi	

Contesto

Congetture e dimostrazioni in geometria.

Il contesto è quello dei problemi aperti nella geometria piana e della conseguente esplorazione di una situazione con un software di geometria dinamica.

Descrizione dell'attività

L'attività fa riferimento a problemi che potrebbero già essere stati affrontati negli anni precedenti, per esempio a problemi del tipo di quelli proposti in Matematica 2003 (Nucleo: Argomentare, congetturare, dimostrare, *Attività con software geometrico*).

Il fatto che vengano ripresi in considerazione problemi eventualmente già affrontati è sensato, in quanto l'avvio al sapere teorico e alla dimostrazione richiede tempi lunghi e la possibilità di riflettere, anche da prospettive diverse, sugli stessi temi.

In questo caso, alcuni problemi che sono stati affrontati nell'ambito della geometria euclidea, possono essere riconsiderati dal punto di vista della geometria analitica; l'insegnante dovrebbe aver cura di evidenziare limiti e potenzialità di approcci diversi contribuendo all'acquisizione di una buona flessibilità, da parte degli studenti, nella scelta degli strumenti da utilizzare per risolvere problemi.

In quest'attività si riprendono in considerazione due problemi proposti in Matematica 2003 (Nucleo: Argomentare, congetturare, dimostrare, *Attività con software geometrico*) per fornire un esempio di possibile discussione sull'opportunità di seguire un approccio piuttosto che un altro.

Per rendere più significativa la discussione, si ritiene importante che gli studenti provino a risolvere i problemi in piccoli gruppi di lavoro (se il rapporto tra numero totale di studenti ed elaboratori disponibili lo consente, sarebbe meglio far lavorare gli studenti a coppie, per dare loro la possibilità di disporre frequentemente del mouse).

I due problemi aperti che prendiamo in considerazione, come esempio, sono i seguenti:

1. Sia dato un quadrilatero *ABCD* e siano *L, M, N* e *P* rispettivamente i punti medi dei lati *AB, BC, CD, DA*. Quali configurazioni assume il quadrilatero *LMNP* al variare di *ABCD*? Dimostrare le varie congetture prodotte. (*Fig. 1*)
2. Costruire un quadrato esternamente a ogni lato di un quadrilatero *ABCD*. Considerare il quadrilatero $O_1O_2O_3O_4$ che si ottiene congiungendo i centri dei quattro quadrati così ottenuti (*Fig. 2*). Che cosa accade a $O_1O_2O_3O_4$ al variare di *ABCD*? Dimostrare le varie congetture prodotte.

Nel primo problema si possono produrre diverse congetture riferite a casi particolari. Ad esempio, si può dimostrare che il quadrilatero *LMNP* è un parallelogramma, qualunque sia il quadrilatero *ABCD* (basta utilizzare il seguente teorema: *la congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato*).

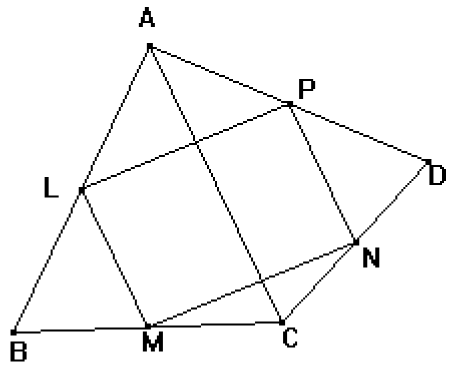


Figura 1

Riconoscere questa proprietà senza costruire la diagonale può, però, non essere semplice; molti studenti potrebbero non riuscire a costruire autonomamente la dimostrazione. L'insegnante può far notare come, in tal caso, un approccio analitico, con la scelta di un opportuno sistema di riferimento, possa essere risolutivo.

Per esempio, si può scegliere un sistema di riferimento in cui l'origine coincida con il punto A e il lato AB appartenga all'asse x. In tal caso i punti possono essere così rappresentati:
$A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(c; e)$, $D(d; f)$.

A partire dalle coordinate di A, B, C, D, è possibile calcolare le coordinate dei punti medi $L(\frac{b}{2}; 0)$, $M(\frac{b+c}{2}; \frac{e}{2})$, $N(\frac{c+d}{2}; \frac{f+e}{2})$, $P(\frac{d}{2}; \frac{f}{2})$. A questo punto è semplice verificare che LM è parallelo a PN e che MN è parallelo a PL, calcolando le pendenze dei segmenti e dimostrando così che, in ogni caso, $LMNP$ è un parallelogramma.

Anche nel secondo problema la consegna è volutamente aperta, per favorire l'esplorazione e la produzione di congetture e anche per motivare alla loro validazione. Il fatto che sia possibile produrre molte congetture, le cui dimostrazioni sono di diverso livello di difficoltà consente a tutti gli alunni di partecipare attivamente al lavoro. Per esempio, fra le varie congetture formulabili, le due seguenti sono facilmente dimostrabili per via sintetica:

- Se $ABCD$ è un quadrato, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato
- Se $ABCD$ è un rettangolo, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato.

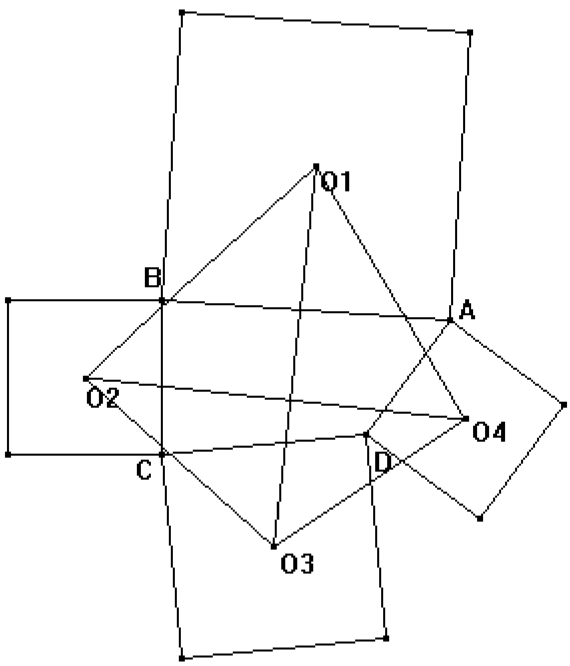


Figura 2

Altre congetture, come le seguenti, comportano qualche difficoltà in più:

- Se $ABCD$ è un rombo, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato
- Se $ABCD$ è un parallelogramma, allora $O_1O_2O_3O_4$ è un quadrato
- Se $ABCD$ è un quadrilatero qualunque, allora $O_1O_3 = O_2O_4$ e O_1O_3 è perpendicolare a O_2O_4.

L'insegnante, prima di fornire le dimostrazioni per via sintetica delle congetture che gli studenti hanno prodotto e testato con gli strumenti messi a disposizione dal software, ma che non sono riusciti a dimostrare autonomamente, può far notare come, in tal caso, l'approccio analitico non sia particolarmente indicato, anche se i casi sono semplici e anche se si utilizzano strumenti di calcolo simbolico. In particolare può far notare che la procedura dimostrativa per via analitica è relativamente semplice da enunciare, ma non è altrettanto semplice da portare a termine a causa della complessità dei calcoli e delle condizioni che occorre considerare per individuare, di volta in volta, nella risoluzione

delle equazioni di secondo grado, la soluzione che si vuole prendere in considerazione.
Questa discussione dovrebbe avere lo scopo di motivare gli studenti alla comprensione della dimostrazione per via sintetica che l'insegnante stesso potrà proporre, nel caso non sia stata trovata da alcuno studente. All'indirizzo web http://agutie.homestead.com/files/vanaubel.html si trova una dimostrazione bella e relativamente semplice della tesi che, qualunque sia il quadrilatero *ABCD*, $O_1O_3=O_2O_4$ e O_1O_3 è perpendicolare a O_2O_4, di cui le tesi precedenti sono casi particolari.

Elementi di prove di verifica

1. Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 6. Quali congetture si possono formulare sul prodotto di quattro numeri naturali consecutivi? E di cinque? E, in generale, di m numeri naturali consecutivi? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

2. Si considerino due quadrati *ABCD* e *AEFG* che hanno in comune il solo vertice *A* e con i vertici orientati nello stesso verso. Considerata la mediana *AM* del triangolo *ABG*, quali relazioni si possono congetturare fra il segmento *DE* e la retta *AM* al variare del quadrato *ABCD*? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

3. Quali congetture si possono formulare sulla divisibilità di $n^5 - n$, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

4. Quali congetture si possono formulare sulle relazioni che legano fra loro due numeri naturali consecutivi? Dimostrare o confutare le congetture formulate.

$\sqrt{2}$ è irrazionale

Percorso: **Dimostrazioni e modi di dimostrare**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Usare il linguaggio dell'algebra elementare. Comprendere e usare forme diverse di dimostrazione. In semplici casi costruire catene deduttive per dimostrare teoremi e congetture. Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Schemi di ragionamento (ad esempio ragionamento per assurdo). Teorema fondamentale dell'aritmetica.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi	

Contesto
Analisi di una dimostrazione.

Si tratta di leggere e analizzare una dimostrazione, con particolare attenzione alla struttura della dimostrazione e agli schemi di deduzione utilizzati.

Descrizione dell'attività
Allo scopo di creare una situazione favorevole a una significativa riflessione sulla struttura della dimostrazione, l'insegnante potrà chiedere agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi di lavoro, di provare a riprodurre una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. In seguito, mediante una discussione matematica rivolta a tutta la classe e guidata dall'insegnante, si potranno confrontare le produzioni dei diversi gruppi di lavoro con una dimostrazione proposta dall'insegnante. L'insegnante guiderà gli studenti alla lettura dello schema dimostrativo: l'analisi della struttura della dimostrazione e l'esplicitazione delle regole inferenziali utilizzate dovranno avere lo scopo di fornire elementi, oltre a quelli già in possesso dagli studenti, per capire le idee che stanno dietro alla dimostrazione presa in esame e, più in generale, per capire come si struttura una dimostrazione.
A titolo esemplificativo proponiamo la seguente dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, evidenziandone il principale schema inferenziale utilizzato. Si nega la tesi, ossia si assume l'ipotesi che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Ciò equivale a dire che $\sqrt{2}$ può essere espresso come rapporto di numeri naturali primi fra loro (si farà notare che l'ipotesi che i numeri siano primi fra loro non fa perdere generalità alla dimostrazione).
Dall'ipotesi che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, con m e n primi fra loro (ossia $2n^2 = m^2$) segue un assurdo in quanto nel numero $2n^2$ si ha un fattore primo 2 in più rispetto al numero m^2 (ciò suppone il teorema fondamentale dell'aritmetica sull'unicità essenziale della scomposizione in fattori di un intero).
Si dice che si è dimostrato per assurdo l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Cerchiamo di capire meglio il significato di questo importante schema dimostrativo. Per fare ciò si analizzeranno preliminarmente due segni logici, il *non* (~) e il *se...allora* (→). Si possono esplicitare gli schemi deduttivi utilizzando, per esempio, le regole della deduzione naturale o anche limitarsi a descrivere nella lingua naturale gli schemi di deduzione utilizzati, come suggerito qui di seguito.

1. L'implicazione materiale.
Supponiamo che assumendo una certa ipotesi p si derivi un enunciato q: è naturale dire che ciò

equivale a una dimostrazione di $p \to q$ (sarebbero necessarie alcune ulteriori restrizioni su cui si sorvola per semplicità). Si può rappresentare questa equivalenza con la seguente regola:

$$\frac{\begin{array}{c}[p]\\ | \\ q\end{array}}{p \to q}$$

(schema di introduzione dell'implicazione)

Il significato della parentesi quadrata è questo. Ogni formula dedotta a partire da un dato insieme di assunzioni, dipende in genere da queste (la sbarretta verticale indica che nella dimostrazione ad esempio di q dall'ipotesi p possono essere stati fatti vari passaggi, che non vengono esplicitati). Nel corso di una dimostrazione è però possibile *scaricare* alcune assunzioni, ossia fare in modo che le formule derivate non dipendano più da tali assunzioni. Nell'esempio, se si assume la formula p, da essa si deriva la formula q, e si conclude $p \to q$: tale formula non dipende più dalla assunzione p (che è stata assorbita nella formula $p \to q$); si dice allora che p è stata *scaricata* e per indicare tale fatto si mette p fra parentesi quadre.
La regola descritta è 'inversa' a quella del cosiddetto 'modus ponens', che fa passare da una dimostrazione di $p \to q$ a una dimostrazione di q in cui p è assunto come ipotesi:

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}$$

(modus ponens: schema di eliminazione dell'implicazione)

2. Significato del non.
Si introduce un segno per l'assurdo: $\perp$.
Il segno di assurdo permette di entrare nel significato di $\sim p$: infatti asserire $\sim p$ significa proprio asserire che da p segue un assurdo, cioè $p \to \perp$. (si pensi ad esempio al significato dell'enunciato "$\sqrt{2}$ non è razionale").. Con questa interpretazione di $\sim p$ si può osservare che lo schema di introduzione dell'implicazione diventa:

$$\frac{\begin{array}{c}[p]\\ | \\ \perp\end{array}}{\sim p}$$

Cioè se dall'ipotesi p si deduce un assurdo, ciò equivale a una dimostrazione di $\sim p$: lo scaricamento di p ha come conseguenza che in tale dimostrazione non si ha più p come ipotesi. Nella dimostrazione presa in considerazione, $\sim p$ è la proposizione "$\sqrt{2}$ non è razionale": la si è dimostrata usando proprio questo schema.

Lo schema di eliminazione diventa:

$$\frac{p \qquad \sim p}{\perp}$$

Cioè se si dimostrano sia p sia $\sim p$, si è dimostrato un assurdo.

3. Dimostrazione per assurdo.
Più complesso lo schema di dimostrazione per assurdo, che viene schematizzato così:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\sim p]\\ | \\ \perp\end{array}}{p}$$

Cioè: se supponendo $\sim p$ si dimostra un assurdo, allora ciò equivale ad una dimostrazione di p, senza utilizzare l'ipotesi $\sim p$ ($\sim p$ è scaricato). In altre parole per dimostrare la tesi p, si suppone che valga la sua negazione e si dimostra un assurdo (ad esempio un enunciato q in contraddizione con un altro enunciato $\sim q$ già provato).
Si osserva che con la regola di introduzione dell'implicazione si dimostra solo $\sim\sim p$, per scaricamento di $\sim p$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\sim p]\\ | \\ \perp\end{array}}{\sim\sim p}$$

Lo schema di dimostrazione per assurdo equivale ad ammettere la regola di cancellazione della doppia negazione, cioè la regola in base alla quale $\sim\sim$ p equivale a p.
È raro incontrare questo schema nelle dimostrazioni che si incontrano a scuola: di solito si tratta invece dello schema di introduzione dell'implicazione applicato a dimostrazioni in cui si è dimostrato l'assurdo a partire da un'ipotesi p, da cui si conclude $\sim p$, scaricando p. È proprio il caso del nostro esempio sull'irrazionalità di $\sqrt{2}$: nella dimostrazione presa in considerazione, $\sim p$ è la proposizione "$\sqrt{2}$ non è razionale" e la si è dimostrata usando proprio lo schema visto nel punto 2.
Un altro esempio di questo tipo negli Elementi di Euclide è la proposizione 20 del IX libro che asserisce l'infinità dei numeri primi (si identifica "l'essere infinito" con il "non essere finito"): si parte dall'assunzione che i numeri primi siano in numero finito e si dimostra un assurdo. Si conclude che i numeri primi non sono in numero finito.

Un esempio di uso dello schema di dimostrazione per assurdo come illustrato nel punto 3 è invece la proposizione numero 6 del primo libro di Euclide (è la prima dimostrazione per assurdo degli *Elementi*): un triangolo che ha due angoli uguali ha uguali anche i lati opposti a quegli angoli. Nella dimostrazione si parte con la negazione della tesi, supponendo che i due lati non siano uguali e si trova un assurdo. Quindi si conclude che i due lati devono essere uguali.
(Si può consultare il sito web http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI6.html per leggere la traduzione in inglese degli *Elementi* di Euclide: esso contiene degli applet Java con figure animate dei vari teoremi).

Elementi di prove di verifica

1. Dopo aver dimostrato che il prodotto di tre numeri naturali è divisibile per 6, esplicitare gli schemi deduttivi utilizzati (suggerimento: dati tre numeri naturali consecutivi, almeno uno è pari e almeno uno è divisibile per 3...)

2. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti valgono i seguenti fatti:
A1. i cavalieri dicono sempre la verità;
A2. i furfanti mentono sempre;
A3. sull'isola non vi sono altri abitanti oltre ai cavalieri e ai furfanti.
Si supponga che appena arrivato sull'isola si presentino due abitanti dell'isola che dicono entrambi:
"Io sono un cavaliere se e solo se lui è un cavaliere".
È possibile decidere la natura dei due abitanti (ossia dire se sono cavalieri o furfanti)? Giustificare la risposta esplicitando lo schema deduttivo utilizzato nel ragionamento.

3. Dimostrare che il quadrato di un numero dispari è il successivo di un multiplo di 8. Esplicitare lo schema deduttivo utilizzato nella dimostrazione.

4. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi. Esplicitare lo schema deduttivo utilizzato nella dimostrazione.

Riferimenti bibliografici

Barozzi, G. C., (1996), *Corso di analisi matematica*, Zanichelli: Bologna.

Berzolari, L.; Vivanti, G.; Gigli, D., (1930), *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi,* Hoepli: Milano (esistono varie riproduzioni anastatiche dell'opera, l'ultima delle quali a cura della Casa Editrice Pagine Srl - Via G. Serafino, 8 - 00136 Roma)

Boursin, J.-L., (1992), *Caso e probabilità - Il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni*, Marco Nardi Editore, Firenze; Stampatore: Cox e Wyman Reading (Traduzione dal francese di Fiorenza Magari del volume: *Les structures du hasard*, Ed. Seuil, Paris, 1986).

Campbell, H.G.; Spencer, R. E., (1977), *Finite Mathematics and Calculus*, Macmillan Publishing Co.: New York.

Cicchitelli G., (2001), *Probabilità e statistica*, Maggioli ed.: Rimini.

De Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità,* vol. 1, vol. 2, Einaudi: Torino.

Guseo R., (1997), *Istituzioni di statistica*, CEDAM ed.: Padova.

Impedovo, M., (1999), *Matematica: insegnamento e computer algebra*, Springer: Milano.

Junek, H.; Menghini, M., (2004), Processi di crescita e decadimento: un percorso per alunni del triennio di scuola superiore, *Progetto Alice*, V, 79-102.

Kendall, M. G.; Moran, P. A. P., (1963), *Geometric Probability,* Hafner: New York.

Leti G., 1983. *Statistica descrittiva*, Il Mulino: Bologna.

Lombardo, E.; Schinaia, G., (2003), Considerazioni su un test d'ingresso per corsi di Matematica e Statistica nelle facoltà di Economia, *Induzioni*, n. 26.

Lombardo Radice, L.; Mancini Proia, L., (1977), *Il metodo Matematico*, Principato: Milano.

Menghini, M.; Barsanti, M., (1998), *Strategie matematiche: problemi di analisi*, Pitagora: Bologna.

MPI, (1996), *L'insegnamento della Logica*, Maglie, L.G. "Capece".

MPI, (1997), *I temi nuovi nei programmi di Matematica (Probabilità, Statistica, Logica, ...) e il loro inserimento nel curriculum*, Collana "Quaderni", n. 26/2, Lucca, L.S. "A.Vallisneri".

MPI, (1999), *Probabilità e Statistica nella Scuola liceale,* Collana "Quaderni", n. 28, Lugo di Romagna, L.S. "G. Ricci Curbastro".

Parzen, E., (1974), *La moderna teoria delle probabilità e le sue applicazioni*, F. Angeli.

Villani, V., (1997), *Matematica per discipline biomediche*, McGraw-Hill, 2ª ed..