RELAZIONI e FUNZIONI

Elenco delle attività

Un ciclomotore in più

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
In casi semplici, determinare il limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 (valore finito o no) anche utilizzando i teoremi di confronto. Interpretare geometricamente la derivata; determinare la tangente in un punto al grafico di una funzione ed usarla per approssimare ("linearizzare") la funzione in un opportuno intervallo. Valutare l'andamento e il segno della funzione $f'(x)$ in relazione all'andamento di $f(x)$ e viceversa; individuare i punti in cui una funzione assume i valori massimi o minimi, relativi e assoluti.	Approfondimento del concetto di limite. Derivata e differenziale di una funzione.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Misurare Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi	Economia

Contesto
Modelli economici.

Utilizzo della derivata di una funzione in campo economico.
Si intende proporre un utilizzo della derivata di una funzione, presentando il significato economico del "Costo marginale".
Si propone una situazione tipicamente discreta che ben presto viene modellizzata usando variabili continue, come spesso si fa nelle applicazioni. Ovviamente il lavoro e le dimostrazioni matematiche riguardano il modello continuo, che però può essere utilizzato per interpretare i fenomeni discreti corrispondenti.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
L'attività inizia con la presentazione di un problema, di tipo economico.
Si suppone che una fabbrica di motorini produca x ciclomotori al giorno, con x intero, compreso tra 0 e 100, estremi inclusi. Il costo, in euro, della produzione di x motorini, è dato dalla funzione

$$C(\mathrm{x}) = 2000+300x - x^2/2.$$

Supponendo che ne possano essere prodotti 50 al giorno, si chiede il costo di un eventuale 51-mo.
Come prima riflessione sul problema risulta significativo esaminare la struttura della funzione $C(x)$, osservando i termini che compaiono e riflettendo sul loro significato, relativamente alla situazione rappresentativa di un modello di realtà produttiva. In termini di costi di produzione, compaiono un costo fisso (in questo caso 2000 euro), una parte che aumenta, qui linearmente, con le unità prodotte

(300 euro per ogni unità prodotta x), una diminuzione, più sensibile con l'aumentare delle unità prodotte ($x^2/2$). Da queste conclusioni, che discendono facilmente dalla formalizzazione algebrica presentata, ma bastano a rendere realistico l'uso di una tale funzione per una situazione del tipo proposto, si passa alla risoluzione richiesta.
Il problema viene risolto calcolando il costo $C(51) - C(50)$:

$$C(50) = 2000 + 300 \cdot 50 - 50^2/2 = 15750$$

$$C(51) = 2000 + 300 \cdot 51 - 51^2/2 = 15999{,}50.$$

La differenza risulta

$$C(51) - C(50) = 249{,}50$$

e rappresenta il costo, in euro (il cui simbolo è sottinteso nei passaggi precedenti) di un ciclomotore aggiuntivo, nella situazione che la produzione giornaliera sia fissata alle 50 unità.
Facendo calcolare ai ragazzi i costi di un eventuale motorino in più in situazioni di produzione giornaliera diverse da quella di 50 unità assegnata in precedenza, si fa osservare che il risultato cambia, quindi il costo dipende dal valore x fissato.

Seconda fase
Si può ora affrontare il problema da un altro punto di vista.
In economia, si definisce 'Costo marginale' la derivata di C rispetto a x, e viene proprio usata per calcolare il costo aggiuntivo di un'ipotetica ulteriore unità in produzione.
Si propone, a questo punto di calcolare il costo marginale, per il valore $x = 50$, facendo uso della derivata; in tal caso, si assume che x possa essere un numero reale qualunque e che la funzione $C(x)$ sia differenziabile.
Poiché risulta

$$C'(x) = 300 - x,$$

allora

$$C'(50) = 250.$$

Il valore $C'(50)$ differisce di poco da $C(51) - C(50)$, ma non coincide con esso.
Vanno quindi approfonditi i due diversi approcci affrontati per giustificare i risultati.
Dapprima è necessario richiamare alcuni concetti di notevole importanza.
Si ricorda che il differenziale di una funzione $f(x)$ è dato da

$$dy = f'(x)dx.$$

Nel problema in esame, poniamo $dx = \Delta x = 1$, per cui

$$dy = f'(x),$$

ossia il Costo marginale, definito uguale alla derivata della funzione Costo, coincide col differenziale, e quindi fornisce il costo dell'ipotetica unità aggiuntiva in produzione.
Da un punto di vista geometrico, occorre evidenziare che da

$$dy = f'(x)dx,$$

si ottiene, dividendo per $dx \neq 0$,

$$f'(x) = \mathrm{d}y/dx.$$

Poiché dy/dx è la pendenza della tangente alla curva rappresentazione grafica della funzione $y = f(x)$ in (x,y) e poiché $dx = \Delta x$, si ha che dy è la distanza della tangente rispetto alla parallela all'asse x per il punto (x,y) (Figura 1).

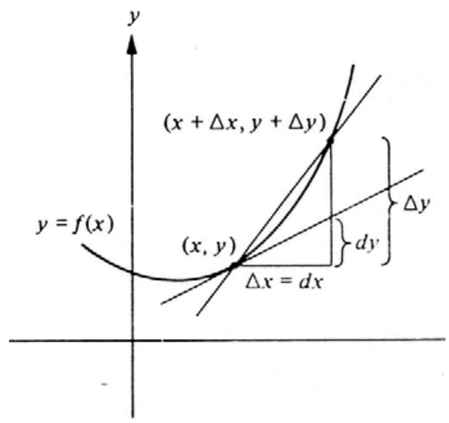

Figura 1

Nel problema assegnato, si applica quanto esposto al caso di $y = C(x)$, con x=50 e Δx=1:

$$\Delta y = C(x+\Delta x) - C(x) = C(51) - C(50),$$

mentre, secondo la definizione precedente,

$$dy = C'(x)\ \Delta x = C'(50) \cdot 1 = C'(50).$$

Siccome dy è una buona approssimazione di Δy, si ha che $C'(50)$ è una approssimazione di $C(51)$-$C(50)$. Si conclude che il costo marginale $C'(50)$ è una approssimazione del costo del successivo motorino, il 51-mo, e che in generale il costo marginale $C'(k)$ costituisce una buona approssimazione del costo del $(k+1)$-esimo prodotto.

Terza fase

Con un'opportuna scelta della scala, si può graficare la curva, una parabola, per ipotizzare per quali valori di x il costo di un motorino aggiuntivo è minimo e verificare che ciò avviene per valori prossimi, da sinistra, al massimo della funzione.

Nel testo assegnato, la variabilità di x era fissata nell'intervallo chiuso di estremi 0, 100; si studia ora l'andamento della funzione prescindendo da questi limiti, ma va precisato che non ha significato per il problema esaminare valori di x maggiori di quello per cui si raggiunge il massimo.

Si procede alla ricerca del massimo, determinando il valore di x che rende nulla la derivata della funzione costo:

$$C'(x) = 300 - x,$$

$$C'(x) = 0 \text{ , ossia } 300 - x = 0, \text{ per } x = 300.$$

Il massimo si raggiunge per x = 300, e risulta efficace far notare, anche graficamente, che, se l'intervallo di variabilità arrivasse a tale valore, il costo di un'ulteriore unità in produzione sarebbe minimo; si può comunque calcolarlo come in prima fase, da:

$$C(300) = 47000,\ C(299) = 46999{,}5$$

e risulta di soli 0,5 €:

$$C(300) - C(299) = 0{,}5.$$

Verso il teorema fondamentale del calcolo integrale

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare la derivata per calcolare la velocità istantanea di un moto. Usare l'integrale come strumento per il calcolo di aree. Riconoscere la relazione tra l'operazione di ricerca della tangente al grafico di una funzione e l'operazione di calcolo dell'area ad essa sottesa.	Integrale, primitiva di una funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo.	<u>Relazioni e funzioni.</u> Spazio e figure Numeri e algoritmi Misurare	Fisica

Contesto
Problemi di moto.

Scopo principale dell'attività è quello di far riconoscere agli allievi la relazione esistente fra le operazioni di derivazione e di integrazione di una funzione. Essa si colloca in un percorso che prevede, dopo la trattazione delle derivate, l'introduzione dell'integrale definito per il calcolo delle aree. Può essere svolta sia come introduzione al teorema fondamentale del calcolo integrale, sia come applicazione a posteriori. Le relazioni note fra spazio, tempo e velocità consentono, infatti, di anticipare o di rivedere il contenuto del teorema e la funzione integrale, prima di proseguire con l'introduzione dell'integrale indefinito. Non viene data in questa fase una dimostrazione del teorema; l'insegnante dovrà curare il collegamento tra le osservazioni qui esposte e la teoria svolta o da svolgere.
Il problema della ricerca dell'area di una figura nel piano cartesiano è affrontato prima con un approccio di tipo geometrico che conduce alla 'funzione area', poi con la ricerca di una primitiva della funzione di partenza. La riflessione sulla relazione esistente fra l'espressione algebrica della funzione di partenza e quella della funzione area induce alla formulazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. In tal modo il concetto di area assume un aspetto funzionale e prende corpo il concetto di *funzione integrale*.
Dal punto di vista della fisica, il problema mette in evidenza come la velocità di un moto possa essere ricavata attraverso la derivata della legge oraria, mentre la legge oraria si ottiene con una primitiva della velocità. Particolare attenzione va posta, in questo caso, alle unità di misura delle grandezze in gioco.

Descrizione dell'attività
L'attività modellizza una situazione concreta di moto che deve essere studiata nei tre registri: grafico, numerico e simbolico.
Può essere svolta dopo aver affrontato il concetto di integrale definito attraverso lo studio di aree di superfici piane a contorni curvilinei ed avere ricavato numericamente (ovviamente in alcuni casi opportuni) l'area sottesa al grafico di una funzione.

Prima fase

Si pone agli studenti il seguente problema.

Un treno merci si muove con velocità costante di 17 m/s; un secondo treno, su un binario parallelo, parte nell'istante in cui viene raggiunto e superato dal primo e viaggia ad una velocità espressa, in m/s, dalla formula $2t$, dove t è il tempo misurato in secondi. I due treni procedono nella stessa direzione: si può prevedere che il secondo treno superi il primo? Se sì, dopo quanti secondi dalla partenza?

I due moti del problema hanno leggi molto semplici; anche il dato numerico della velocità del treno merci è espresso inusualmente nelle unità di misura di *m/s* per facilitare la rappresentazione grafica. Esaminiamo quindi (Figura 1) i due grafici delle velocità v_1 e v_2 in funzione del tempo t:

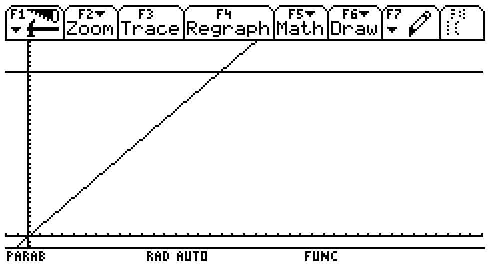

Figura 1

La figura non mette purtroppo bene in evidenza le unità di misura sui due assi: sull'asse delle ascisse è riportato il tempo t (in secondi) e sull'asse delle ordinate è riportata la velocità v (in m/s). Dunque il primo moto è rappresentato dalla funzione costante $v = v_1 = 17$, e il secondo dalla funzione $v = v_2 = 2t$.

I due grafici hanno un punto di intersezione per $t = 8,5$: significa forse che i due treni hanno percorso la stessa distanza dalla stazione dopo tale tempo? Se si riflette sul significato del grafico si ricava che dopo 8,5 secondi dal passaggio alla stazione i due treni hanno raggiunto la stessa velocità. Come ricavare le leggi orarie che permettano di rilevare il sorpasso?

Ricordando la relazione *spazio* = *velocità·tempo* (per un moto a velocità costante) possiamo ricavare lo spazio s_1 percorso dal primo treno nell'intervallo di tempo compreso tra 0 e t come area di un rettangolo; riportando i valori dello spazio in funzione del tempo al variare di t otterremo la funzione $s_1(t)$ che indica la legge oraria del primo treno.

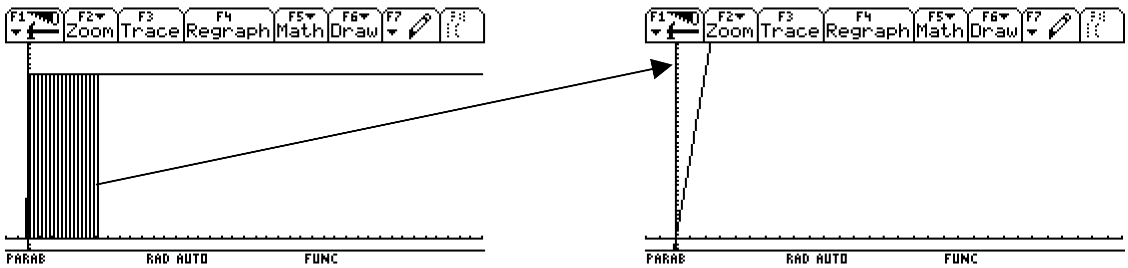

Figura 2 *Figura 3*

Nel grafico della Figura 2 è ombreggiata la parte di piano sottesa dalla retta v=17 nell'intervallo delle ascisse che va da 0 a 3: l'area vale 51; la freccia che collega la Figura 2 alla Figura 3 riporta i valori 3 e 51 come ascissa e ordinata di un punto che, si verifica facilmente, appartiene al grafico della retta s=17t). Analogo significato ha la freccia delle figure successive: nel caso di moto uniformemente accelerato sappiamo, dalla fisica, che lo spazio si calcola in base alla velocità media tra la velocità iniziale e quella finale (Figura 4), ed è quindi fornito dall'area del triangolo sotteso alla retta $v = 2t$; riportando i valori ottenuti, si ottiene il grafico $s = (v/2)t = t^2$ (figura 5).

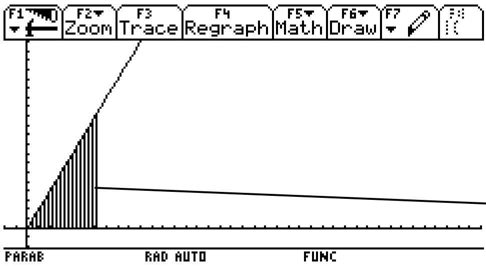

Figura 4

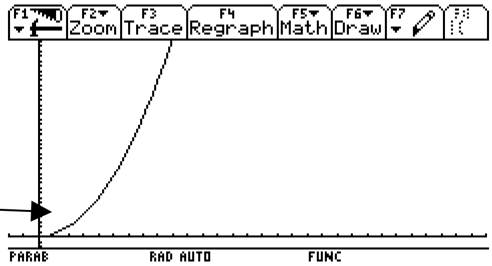

Figura 5

Occorre fare bene attenzione alla nuova unità di misura sull'asse delle ordinate: a prima vista si può porre il problema di associare grandezze di tipo diverso, come distanza percorsa e area. In sostanza sembrerebbe di collegare una grandezza che si misura in m^2 con una grandezza che si misura in m/s. Ma se si osserva bene il grafico di partenza si nota che le ordinate sono espresse in m/s, mentre le ascisse sono espresse in secondi s; l'area di una regione sottesa al grafico sarà quindi espressa in m/s per s, quindi in m.

E' facile ottenere geometricamente la formula della funzione s_1 come area di un rettangolo; facendo riferimento al simbolo di integrale definito come espressione dell'area sottesa ad un grafico si può scrivere che, dopo un tempo t di 3 secondi lo spazio percorso è:

$$s_1(3) = \int_0^3 17\,dt = 17 \cdot 3 = 51$$

In generale, facendo variare l'estremo superiore di integrazione, si trova la funzione

$$s_1(t) = \int_0^t 17\,dt = 17 \cdot t$$

Allo stesso modo, studiando il secondo grafico e applicando la formula dell'area di un triangolo si ottiene, al tempo $t = 3$

$$s_2(3) = \int_0^3 2t\,dt = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

ed in generale, al tempo t

$$s_2(t) = \int_0^t 2t\,dt = \frac{2t \cdot t}{2} = t^2$$

Al momento opportuno l'insegnante farà notare che gli esempi visti sono un caso particolare della relazione:

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt$$

Nei due esempi svolti si sono ottenuti due integrali noti: una retta passante per l'origine ed una parabola con vertice nell'origine; gli studenti non dovrebbero avere difficoltà a trovare le coordinate del punto di intersezione, oltre al punto in cui è $t = 0$, con il semplice esame della tabella delle funzioni o con l'equazione $17t = t^2$, che fornisce la risposta al problema iniziale.

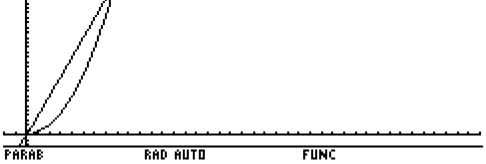

Figura 6

Seconda fase

L'insegnante domanda agli studenti se ritengono che ci sia una relazione fra le espressioni delle funzioni v_1 e s_1, v_2 e s_2. Propone, eventualmente, di riportale in una tabella per esaminarle in parallelo

v	**s**
17	$17t$
$2t$	t^2

Gli studenti dovrebbero rilevare facilmente che la funzione v è la derivata della funzione s, in entrambi i casi. Riprendendo qualche esempio precedente di calcolo di integrale definito con il metodo degli scaloidi inscritti e circoscritti, si potrà ipotizzare che:

v	**s**
1	t
$2t$	t^2
$3t^2$	t^3
$4t^3$	t^4
…	...
$f'(t)$	$f(t)$

Avendo già espresso lo spazio come integrale definito della velocità, si potrà anche ipotizzare, o ritrovare, che

$$f(t) = \int_0^t f'(t)\,dt$$

Terza fase

Avvalendosi delle proprietà di derivazione della somma di funzioni, e parallelamente, delle proprietà di additività delle aree, si possono costruire integrali di funzioni polinomiali, mantenendo sempre 0 come primo estremo.

$$\int_0^t (t^2+3t)dt = \int_0^t t^2 dt + 3\int_0^t t dt = \frac{t^3}{3} + 3\cdot\frac{t^2}{2}$$

e quindi generalizzare con:

$$\int_0^t (f'(t)+g'(t))dt = \int_0^t f'(t)dt + \int_0^t g'(t)dt = f(t)+g(t)$$

Si ha così a disposizione uno strumento che permette di espandere il problema iniziale a partire da funzioni polinomiali qualsiasi.

Quarta fase

Nelle fasi precedenti si è lavorato su funzioni integrali con estremo inferiore sempre uguale a zero; si può proporre ora agli studenti un problema che conduca alla definizione di integrale indefinito, ritornando alle indicazioni consuete per le variabili. Le formule ottenute ci permettono inoltre di rinunciare a fare riferimento alle variabili spazio e velocità.

Problema

Calcolare l'area sottesa dal grafico di $y=2x$ nell'intervallo del dominio $2\leq x\leq 4$.
Ripetere il problema con il grafico di $y=x^2$.

I due grafici delle Figure 7 e 8 seguenti rappresentano le parti di piano di cui è richiesta l'area.

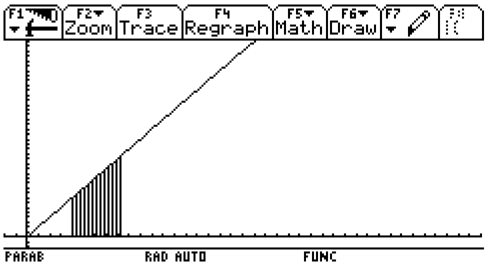

Figura 7

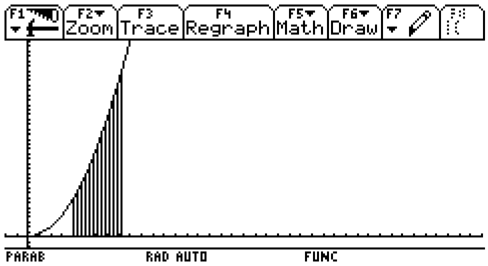

Figura 8

Se per la prima funzione gli alunni possono ancora ricorrere alla nota formula per l'area di un trapezio, nella seconda devono utilizzare quanto ricavato nelle fasi precedenti.
L'insegnante può suggerire loro di ricavare le aree indicate nelle Figure 9 e 10, che rientrano nella tipologia dei problemi svolti in precedenza; procedendo per sottrazione di aree, potranno trovare la soluzione richiesta.

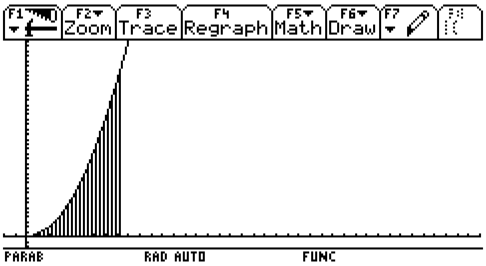

Figura 9

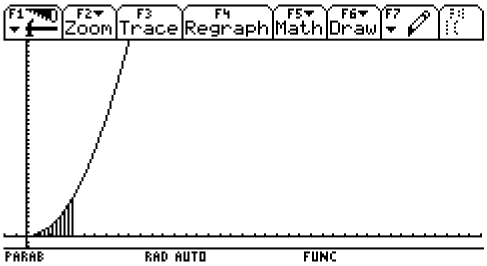

Figura 10

$$\int_2^4 x^2 dx = \int_0^4 x^2 dx - \int_0^2 x^2 dx$$

Problema
A partire dalla funzione $y=x^2$, individuare la funzione integrale H(t)= $\int_2^t x^2 dx$ che si ottiene mantenendo in 2 l'estremo inferiore e variando l'estremo superiore t.
Se si cambia ora l'estremo inferiore in 1, quale funzione integrale si ottiene? In che cosa differisce dalla precedente?
Cambiare ulteriormente l'estremo inferiore, assegnandogli successivamente i valori 0, −1 e 4. Disegnare i grafici delle funzioni ottenute: che cosa si può dire di tali grafici?

La Figura 11 evidenzia in modo significativo le relazioni fra le diverse funzioni primitive ottenute. Si noti che, a livello percettivo, la distanza tra le curve sembra diminuire: questo è vero se la distanza non viene misurata sulle rette parallele all'asse y.

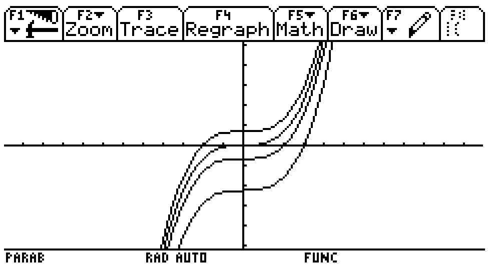

Figura 11

A questo punto dell'attività gli allievi dovrebbero possedere tutti i prerequisiti necessari all'introduzione dell'integrale indefinito, per ottenere così uno strumento più agile per il calcolo delle aree. L'insegnante può procedere dimostrando il teorema del calcolo integrale, o sfruttando operativamente i concetti che sono stati messi a fuoco nel corso dell'esperienza.

Elementi di prove di verifica

1. Area di un segmento parabolico
Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$ e la retta $y = 4$, determinare l'area del segmento parabolico racchiuso fra retta e parabola; verificare che tale area è equivalente ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo che ha per lato la corda individuata dal segmento parabolico, e per altezza la distanza tra la corda e la tangente alla parabola ad essa parallela.
Generalizzare la questione ricavando l'area del segmento parabolico racchiuso da una parabola di equazione $y = ax^2$ e dalla retta $y = 4$. Le aree del segmento parabolico e del rettangolo costruito come sopra sono ancora nel rapporto di $\frac{2}{3}$?

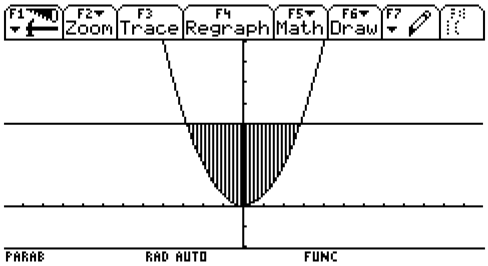

Figura 12

Il problema può essere esteso ad un segmento parabolico individuato sulla parabola da una retta non parallela all'asse x, ad esempio, per semplificare i calcoli, $y = x+6$ (Figura 13): si può verificare anche in questo caso l'invarianza del rapporto suddetto.

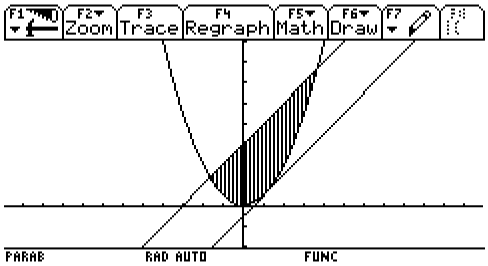

Figura 13

2. Data la parabola di equazione $y = x^2$ determinare quale deve essere la pendenza m di una retta di equazione $y = mx$ in modo che l'area della superficie racchiusa tra retta e parabola valga $\frac{4}{3}$.

3. La velocità di un treno, che sta facendo manovra su un binario, è data, in metri al minuto, dalla formula $v(t) = 7(t^2 - 4t + 3)$, dove t è il tempo (nota: la velocità può essere positiva o negativa).

a. Calcolare la posizione della locomotiva 5 minuti dopo la partenza.
b. Calcolare la distanza totale percorsa dalla locomotiva nei 5 minuti dopo la partenza.

(Nella domanda b, il segno dell'area va preso col segno positivo nel tratto $1 < t < 3$, cioè l'integrale va calcolato sul modulo della velocità).

Il lancio di un paracadutista

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative. Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale. Ricorrere a mezzi tecnologici disponibili per esplorare le situazioni problematiche individuate o proposte.	Funzioni polinomiali. Funzioni definite a tratti. La funzione esponenziale. Approfondimento del concetto di limite. Derivata e differenziale di una funzione.	<u>Relazioni e funzioni</u> Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Modellizzazione matematica di un problema fisico.

Questa proposta costituisce un valido esempio di attività interdisciplinare. Si tratta dello studio di un moto che può essere descritto in prima approssimazione mediante modelli matematici semplificati, diversi al variare delle condizioni iniziali. Tali modelli sono riconducibili al secondo principio della dinamica e mostrano che in ciascuno dei casi esaminati il moto di caduta di un paracadutista tende a diventare stazionario.
Per poter svolgere l'attività si deve supporre che gli studenti già conoscano il modello di crescita lineare, le leggi del moto uniformemente accelerato e le leggi della dinamica.

Descrizione dell'attività
Si propone agli studenti il seguente problema.
Un paracadutista si lancia da un aereo. Sappiamo che ad un certo punto, grazie all'effetto del paracadute, il suo moto di caduta tende a diventare uniforme, con una velocità (asintotica) che viene denominata velocità limite.
Vogliamo allora capire come spiegare questo fatto, studiando come varia la velocità di caduta del paracadutista in funzione del tempo, secondo che il paracadute si apra: 1) appena egli ha abbandonato l'aereo; 2) nell'istante in cui egli raggiunge una velocità di caduta esattamente pari alla velocità limite; 3) in un istante in cui la sua velocità ha superato il valore della velocità limite.
Ipotizziamo che la forza dovuta alla resistenza dell'aria sia proporzionale alla velocità del paracadutista e che la spinta di Archimede agente sul paracadutista sia trascurabile.

Quando il paracadute è aperto, il paracadutista è soggetto alla forza di gravità, che può essere ritenuta costante, ed alla forza di resistenza dell'aria (forza di attrito viscoso), la quale risulta (anti)proporzionale alla velocità. Il modello matematico per analizzare il problema può essere implementato mediante un foglio elettronico. In una prima colonna si tabulano i valori degli istanti di tempo, in una seconda colonna i corrispondenti valori della velocità di caduta, ottenuti mediante la legge lineare $v=v_0+a\Delta t$, utilizzando come velocità iniziale quella relativa all'istante precedente, come accelerazione ancora quella relativa all'istante precedente e come intervallo di tempo Δt il valore (arbitrariamente fissato) utilizzato per incrementare gli istanti di tempo; nella terza colonna del foglio elettronico si tabula invece l'accelerazione di caduta del paracadutista, ottenuta dalla formula $a=(mg-kv)/m$, dove m è la massa del paracadutista, k una costante fisica (nota di volta in volta), che tiene conto della forma del paracadute e della viscosità dell'aria, e v è il valore della velocità indicato nella corrispondente casella della seconda colonna.
Nel caso in cui il paracadute si apra fin dall'istante iniziale, il modello prevede una crescita esponenziale per la velocità di caduta ed una decrescita esponenziale per l'accelerazione. Si riconoscono così un minimo assoluto ed un estremo superiore nei valori della velocità ed un massimo assoluto ed un estremo inferiore nei valori dell'accelerazione.
Nel caso in cui, invece, il paracadute si apra quando il paracadutista raggiunge la velocità di caduta limite, nella descrizione del fenomeno si susseguono due diverse modellizzazioni: la prima prevede una crescita lineare per la velocità ed un valore costante dell'accelerazione, mentre la seconda prevede un valore costante sia per la velocità che per l'accelerazione.
Infine, nel caso in cui il paracadute si apra dopo che il paracadutista ha raggiunto una velocità di caduta superiore alla velocità limite, si susseguono nuovamente due modellizzazioni: la prima prevede una crescita lineare per la velocità ed un valore costante per l'accelerazione, mentre la seconda prevede una decrescita esponenziale sia per la velocità che per la accelerazione.
Nei tre i casi si riconoscono tutte le osservazioni che si sono in precedenza effettuate mediante un'attenta lettura dell'andamento dei grafici delle funzioni che esprimono la variazione nel tempo della velocità e dell'accelerazione del paracadutista (i grafici possono essere realizzati, ad esempio, mediante un foglio elettronico).

L'attività proposta agli studenti può eventualmente iniziare con un approccio al problema di tipo sperimentale, da portare avanti in collaborazione con l'insegnante di fisica in laboratorio. Durante tale attività si suggerisce di far eseguire agli studenti alcuni esperimenti che simulino la situazione descritta nel problema, come ad esempio la caduta di una sfera in un liquido viscoso (in questo caso, naturalmente, non si può seguire il moto istante per istante, a meno che non si possieda un'apparecchiatura di rilevazione on-line sufficientemente raffinata). Si può comunque osservare direttamente che il corpo si muove praticamente di moto uniforme e che quindi si realizza proprio la condizione asintotica prevista dal modello.

Un quesito teorico cui è opportuno che gli studenti provino comunque a rispondere nelle fasi iniziali dell'attività, consiste nella spiegazione del perché il valore della velocità di caduta limite del paracadutista sia esprimibile mediante la formula $v_{\lim} = \frac{mg}{k}$. A tal proposito, è significativo far ricercare agli studenti alcuni dati relativi al valore della costante fisica k perché essi possano cimentarsi nel prevedere con quale velocità (all'incirca) finisce con l'arrivare a terra il paracadutista.

Ad ogni modo l'attività di tipo sperimentale nel laboratorio di fisica deve essere affiancata da una simulazione numerica realizzata con un foglio elettronico, per concludersi con un confronto tra i risultati di tale analisi numerica e del modello matematico soggiacente, che richiede di risolvere l'equazione differenziale $mg+kv=ma=m\dfrac{dv}{dt}$, sotto diverse condizioni iniziali. Ovviamente non è necessario che questa operazione sia eseguita dagli studenti in prima persona, ai quali può essere nel caso comunicato soltanto il risultato esatto dell'integrazione dell'equazione differenziale, affinché al più eseguano una verifica della bontà della soluzione.

Per completezza si trascrivono qui di seguito le soluzioni esatte relative alla funzione $v = v(t)$ (in m/s) nelle tre situazioni, per $t \geq 0$:

1° caso: $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \end{cases}$;

2° caso: $\begin{cases} v(0) = \dfrac{mg}{k} \\ v(t) = \dfrac{mg}{k} \end{cases}$;

3° caso: $\begin{cases} v(0) = 2\dfrac{mg}{k} & \left(\text{valore rappresentativo dei casi in cui } v(0) > \dfrac{mg}{k}\right) \\ v(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1 + e^{-\frac{k}{m}t}\right) \end{cases}$.

A titolo di esempio si riportano alcune parti delle tabulazioni ottenute con un foglio elettronico in un caso particolare in cui si hanno i seguenti dati:
m = massa del paracadutista e del suo equipaggiamento = 70 kg;
g = accelerazione di gravità = 9,8 m/s^2;
k = costante di proporzionalità diretta tra la forza di attrito viscoso dell'aria e la velocità del paracadutista = 50 (N · s)/m.
In questa situazione la velocità limite del paracadutista è pari a circa 13,72 m/s, ovvero circa 49,4 km/h. Inoltre il tempo necessario al paracadutista in caduta libera per raggiungere tale valore della velocità di caduta ammonta a circa 1,4 s.

Nel primo caso, come già indicato, si ammette che il paracadute si apra immediatamente dopo il lancio, all'istante $t = 0$. I valori tabulati (il tempo è in secondi; i dati tabulati contengono un numero di cifre superiore a quello delle cifre significative) mostrano chiaramente l'avvicinamento asintotico della velocità verso il valore limite sopra calcolato ed il corrispondente avvicinamento dell'accelerazione a zero. Nella Tabella 1 si vedono gli andamenti della velocità e dell'accelerazione in alcuni istanti dei primi 3 secondi del moto e dell'intervallo compreso tra il diciassettesimo ed il diciannovesimo secondo, quando è ormai evidente il carattere asintotico verso i due valori previsti della velocità e dell'accelerazione del paracadutista, rispettivamente 13,72 m/s e 0 m/s^2.

t	*v*	*a*
0	0	9,8
0,1	0,98	9,8
0,2	1,96	9,1
0,5	4,485	7,15
0,7	5,859643	6,085714
1,6	9,914021	2,946699
2	10,96274	2,134747
2,7	12,15146	1,21441
3	12,4883	0,953615
17	13,71998	1,2E-05
17,3	13,71999	9,44E-06
17,6	13,71999	7,41E-06
18	13,71999	5,37E-06
18,4	13,71999	3,89E-06
18,9	13,72	2,6E-06
19	13,72	2,4E-06

Tabella 1

Nel secondo caso si ipotizza che il paracadute si apra esattamente dopo 1,4 s dalla partenza del paracadutista. In questa situazione, mentre la soluzione teorica prevede che la velocità rimanga costante durante tutto il moto di caduta successivo all'apertura del paracadute, il modello discreto mette in evidenza i suoi limiti: l'errore che si produce può comunque essere ridotto, rimpiccolendo l'incremento di tempo Δt, a costo però di accumulare una gran quantità di dati. In effetti accade che il modello discreto (i cui risultati sono in parte riportati qui di seguito, in corrispondenza ad incrementi di tempo pari a 0,005 s) preveda che si abbia una piccola variazione di velocità immediatamente dopo l'istante t=1,4 s, quando il modello teorico imporrebbe invece che la velocità rimanesse costante (Tabella 2). Estendendo la tabulazione dei dati, riapparirebbe comunque chiara la tendenza asintotica della velocità verso il valore limite previsto di 13,72 m/s.

t	*v*	*a*
0	0	9,8
0,005	0,049	9,8
0,01	0,098	9,8
0,025	0,245	9,8
0,03	0,294	9,8
0,045	0,441	9,8
0,05	0,49	9,8
1,39	13,622	9,8
1,4	13,72	9,8
1,405	13,769	2,44E-14
1,41	13,769	-0,035
1,425	13,76848	-0,03475
1,43	13,7683	-0,03463
1,45	13,76761	-0,03413
1,48	13,7666	-0,0334
1,485	13,76643	-0,03328
1,5	13,76593	-0,03293

Tabella 2

Nel terzo caso, infine, si ipotizza che il paracadute si apra dopo 2 secondi dall'inizio del lancio, ovvero 0,6 s dopo che è stata raggiunta, in caduta libera, la velocità limite. Si mostrano qui sotto alcuni dei dati che si ottengono mediante un foglio elettronico per i primi 6 secondi del moto, con incrementi di tempo pari a 0,2 s (Tabella 3).

t	*v*	*a*
0	0	9,8
0,2	1,96	9,8
0,4	3,92	9,8
0,6	5,88	9,8
1	9,8	9,8
1,6	15,68	9,8
2	19,6	9,8
2,2	21,56	-4,2
2,6	19,6	-5
3	17,76	-3,48571
3,8	15,61306	-1,6344
4	15,28618	-1,35219
4,8	14,45375	-0,6335
5	14,32705	-0,52411
5,8	14,0044	-0,24554
6	13,9553	-0,20315

Tabella 3

Dopo circa 14 secondi dalla partenza appare già del tutto evidente il carattere stazionario del moto (Tabella 4). È indubbiamente molto istruttivo discutere con gli studenti sul reale significato fisico attribuibile ai valori ottenuti per l'accelerazione di caduta, espressi da numeri negativi molto vicini a zero. È una riflessione da collegare con la problematica della misura in laboratorio delle grandezze fisiche e che ha senso anche in relazione alle tabulazioni dei valori relativi alle prime due situazioni esaminate.

t	*v*	*a*
14	13,72012	-0,0001
14,4	13,72008	-7,1E-05
15	13,72005	-4E-05
15,6	13,72003	-2,3E-05
16,2	13,72001	-1,3E-05
16,8	13,72001	-7,3E-06
17,4	13,72	-4,1E-06
18	13,72	-2,3E-06

Tabella 4

A conclusione dell'attività si riportano per completezza tre grafici che visualizzano l'andamento delle funzioni *v(t)* ed *a(t)* ottenuto in base ai dati dell'elaborazione numerica realizzata con un foglio elettronico.

Visualizzazione grafica dell'andamento delle funzioni v(t) e a(t) nel primo caso, relativamente ai primi 100 valori tabulati.

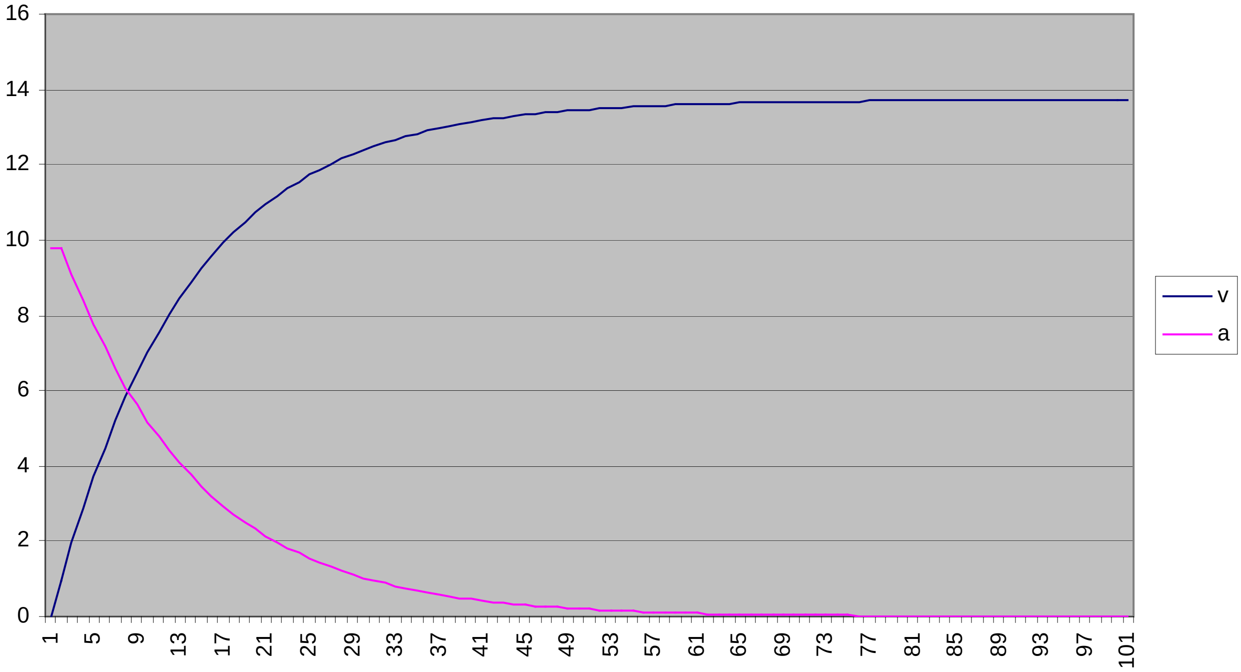

Figura 1

Visualizzazione grafica dell'andamento delle funzioni v(t) e a(t) nel secondo caso, relativamente ai primi 300 valori tabulati.

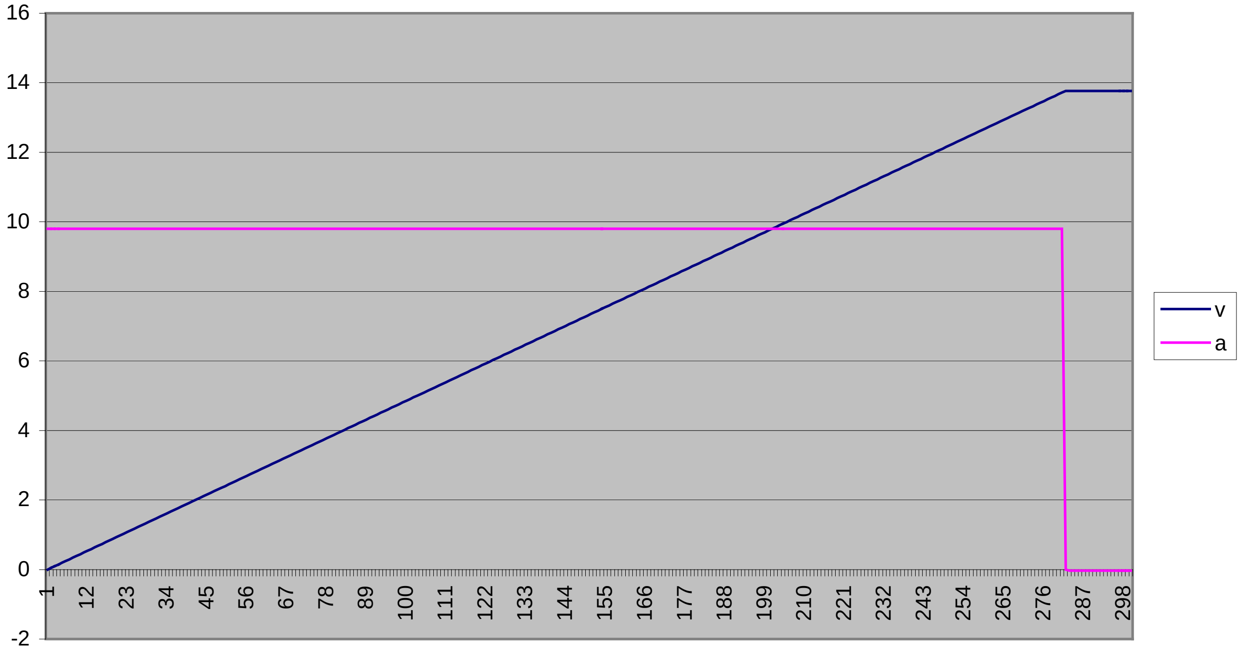

Figura 2

Visualizzazione grafica dell'andamento delle funzioni v(t) e a(t) nel terzo caso, relativamente ai primi 200 valori tabulati.

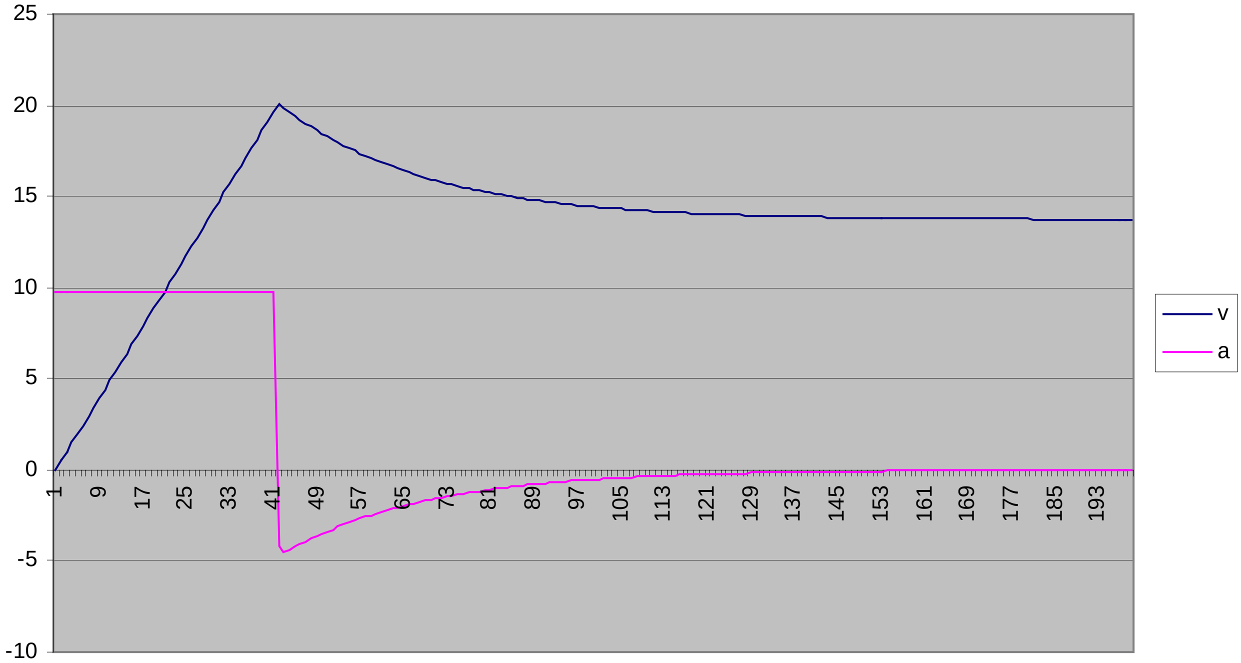

Figura 3

Elementi di prove di verifica

1. Dopo aver somministrato dosi diverse di una certa sostanza a 3 gruppi di cavie affette da una certa malattia, si è constatata la seguente relazione tra le dosi somministrate e le percentuali di mortalità:

dose 2 mortalità 16%
dose 4 mortalità 10%
dose 8 mortalità 22%

Supponendo che la percentuale di mortalità y sia esprimibile in termini della dose somministrata mediante una funzione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, calcolare la dose ottimale (ossia la dose che rende minima la percentuale di mortalità delle cavie).

2. In uno strano paese chi ha un reddito inferiore a € 10000 deve pagare, come tasse, il 10% del suo reddito; chi guadagna € 10000 o più deve invece pagare il 20%. Disegnare il grafico del reddito netto in funzione del reddito lordo, verificando che in un punto la funzione è discontinua.
Calcolare poi:

a) con quale stipendio inferiore a € 10000 un cittadino, pagate le tasse, si trova nelle stesse condizioni di chi guadagna € 10000;
b) quali degli stipendi superiori a € 10000 risultano preferibili a tutti quelli inferiori a € 10000.

3. In quali punti sono derivabili le seguenti funzioni?

$$f(x) = |x-1| + |x-3| \quad , \quad f(x) = |x^2 - 4| \ .$$

Calcolare le derivate dove esse esistono e dimostrare che negli altri punti esistono le derivate a destra e a sinistra e calcolarle.

4. Da una torre a pianta circolare, di raggio r, escono contemporaneamente due persone che camminano a velocità non necessariamente uguale: una esce dal lato nord e si dirige verso nord; l'altra esce dal lato sud e si dirige verso est. Dopo che la prima ha percorso x metri e la seconda y metri, esse possono vedersi. Studiare l'andamento di y in funzione di x.

5. Il rapporto tra un numero reale e la radice cubica di un altro numero reale è 1. Determinare come varia un numero in funzione dell'altro.

6. Studiare come varia la somma di un numero reale col suo inverso moltiplicativo.

7. Data una funzione f, definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, come segue:

$$f(x) = x^2 \ \text{ se } 0 \le x \le \pi/2 \ ; \ f(x) = \pi^2/4 \text{ se } \pi/2 < x < \pi,$$

e tale che $f(-x) = f(x)$, disegnarne il grafico, stabilire se nel dominio è continua e derivabile ed eventualmente disegnare il grafico della funzione derivata.

8. Dimostrare che la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x$ nel punto di ascissa x_0 interseca l'asse delle ascisse nel punto $(x_0 - 1)$, comunque si scelga x_0.

9. Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$(2^n - 1)/(2^n + 1) \ , \ n^2/(1 + 2 + 3 + ... + n) \ , \ (1 - 1/n)^{-n} \ .$$

10. Tenendo presente che il limite della successione $1/n$ è 0 (verificare tale affermazione), calcolare il limite delle successioni:

$$(n + 1)/n \ , \ (2n + 1)/n \ , \ n/(2n+3).$$

11. Tenendo presente che $n^k \geq n$, per ogni $n \geq 1$ e per ogni $k > 1$, calcolare il limite della successione $1/n^k$, per n che tende a $+\infty$. Dai risultati ottenuti, calcolare il limite delle successioni:

$$n^2/(n^2 + 1) \ , (2n^2 + 1)/n^2 \ , \ (n^2 + n + 1)/(n^2 +1).$$

12. Si indichi con $[\ x\ ]$ l'approssimazione intera per difetto del numero reale x; studiare la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) = x - [\ x\ ]\ .$$

a) tracciare il grafico di $f(x)$;
b) verificare che f(x) è periodica di periodo 1;
c) verificare che f(x) è continua in ogni x non intero, mentre nei punti interi ha limite a sinistra uguale a 1 e a destra uguale a 0;
d) quale conclusione si può trarre?
e) determinare gli estremi di f su $\Re$ e stabilire se sono anche massimi e minimi.

13. Calcolare il limite, per x che tende a $+\infty$, della funzione

$$\sqrt{x^2+1} - x$$

Se al posto di $(x^2 + 1)$ si avesse $(x^2 + a)$, con a reale, cambierebbe il risultato precedente?

14 Date, in $\Re$, le funzioni

$$f(x) = x^2 - 2x \qquad f(x) = x^2 + 4 \qquad f(x) = (x - 1)^2,$$

rappresentarle graficamente, e studiare le funzioni $g(x) = 1/f(x)$, con particolare riferimento agli intorni dei valori non appartenenti al dominio.
Generalizzare i risultati precedenti, considerando una generica parabola.

15. Ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int 2xe^{x^2}dx \ , \qquad \int 3x^2 \cos x^3 dx \ , \qquad \int \frac{2x}{1+x^2}dx \ , \qquad \int \frac{-\sin x}{1+\cos x}dx \ .$$

16. Data la funzione costante di equazione $f(x) = c > 0$, definita sull'intervallo $I = [0,b]$, disegnare il trapezoide T corrispondente, calcolarne l'area e scrivere l'equazione della funzione $A(x)$ al variare di x in I.
Generalizzare, considerando l'intervallo $I = [a,b]$.

17. Calcolare l'area α sottesa dal ramo di iperbole equilatera di equazione $y = 1/x$, nell'intervallo $[1,3]$.

18. Scrivere l'equazione della funzione integrale $F(x) = \int_1^x 1/t \; dt$.

19. Considerati i punti $x_1 = a$, $x_2 = k\,x_1$, $x_3 = k\,x_2$,…, $x_n = k\,x_{n-1}$,... in progressione geometrica di ragione k, verificare che le relative aree sottostanti all'iperbole variano in progressione aritmetica.

Riferimenti bibliografici

Andreini, M.; Manara, R.; Prestipino, F., (1998), *Matematica controluce*, McGraw-Hill, Milano.

Castelnuovo, E.; Gori Giorni, C.; Valenti, D., (1988), *La Scienza: elementi di analisi matematica*, La Nuova Italia, Firenze.

Barozzi, G.C.; (1996), *Corso di analisi matematica*, Zanichelli, Bologna.

Campbell, H.G.; Spencer, R. E.; (1977), *Finite Mathematics and Calculus*, Macmillan Publishing Co., New York.

Menghini, M.; Barsanti, M., (1988) *Strategie matematiche: problemi di analisi*, Pitagora, Bologna.

Villani, V., (1997), *Matematica per discipline biomediche*, McGraw-Hill, Milano.

Prodi, G., (1997), *Istituzioni di Matematica*, McGraw-Hill, Milano.