Ministero
dell'Istruzione,
dell'Università e
della Ricerca

MATEMATICA 2004

Unione
Matematica
Italiana

Società Italiana
di Statistica

Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica

Ciclo secondario: quinta classe

Comitato di redazione

Giuseppe Anichini
Ferdinando Arzarello
Claudia Bartolotti
Lucia Ciarrapico
Ornella Robutti

Liceo Scientifico Statale
"G. Ricci Curbastro"
Lugo di Romagna
Maggio 2004

PRESENTAZIONE

Ferdinando Arzarello, UMI-CIIM
Lucia Ciarrapico, MIUR

Questo volume, *Matematica 2004*, prosegue e completa il curricolo di matematica dei primi quattro anni del ciclo secondario, presentato nel volume *Matematica 2003*. Esso è rivolto agli studenti della quinta classe.

Per questa classe abbiamo previsto due itinerari, finalizzati entrambi a completare il ciclo di studi precedente:

- uno di *approfondimento* per gli studenti dei licei in cui la matematica è materia caratterizzante ed anche per gli studenti degli altri indirizzi che intendono proseguire in curricoli universitari o di formazione tecnico-superiore, nei quali la matematica riveste un ruolo fondamentale;
- uno di *consolidamento* delle conoscenze e delle abilità acquisite negli anni precedenti (*La matematica per il cittadino*) per tutti gli altri.

Nel primo caso gli studenti hanno bisogno di uno specifico bagaglio culturale che li metta in grado di completare gli studi coerentemente con le caratteristiche del curricolo seguito, ovvero di affrontare gli studi successivi con una sufficiente preparazione matematica. Nel secondo caso devono, invece, rafforzare la formazione di base già acquisita.

Il curricolo di *approfondimento* ha la stessa struttura di quello descritto in *Matematica 2003*, relativo alle classi precedenti. Le abilità e le conoscenze previste, di livello più elevato rispetto a quelle tradizionali, fanno tuttavia riferimento solo ai primi cinque nuclei *(Numeri e algoritmi; Spazio e figure; Relazioni e funzioni; Dati e previsioni; Argomentare, congetturare, dimostrare*) che sono dotati di specifici contenuti matematici.
La struttura del curricolo di *consolidamento* differisce da quella proposta per il curricolo di *approfondimento*. In esso non sono introdotte altre abilità e conoscenze poiché si ritiene che i concetti e le procedure apprese nei primi quattro anni siano sufficienti. E' bene, invece, proprio perché questi studenti non faranno in seguito altri studi scientifici, che le conoscenze acquisite siano rafforzate e viste, ancora una volta, nella loro applicazione ai problemi del mondo reale. La scelta del *consolidamento* punta, pertanto, a non far perdere loro le conquiste formative ottenute, mettendoli in grado di utilizzare le conoscenze matematiche nei contesti concreti della vita reale. In questo curricolo sono quindi proposti alcuni <u>*percorsi*</u> che favoriscono il consolidamento di quanto precedentemente acquisito, determinando l'aggregarsi delle abilità in competenze trasversali. Sta all'insegnante individuare opportune attività che realizzino concretamente gli obiettivi propri del curricolo.
I due curricoli – *approfondimento* e *consolidamento* – sono completati da una sezione che presenta idonei e ampi suggerimenti per l'uso della storia delle matematiche nell'insegnamento: essa arricchisce le sintetiche note storiche del volume *Matematica 2003*.

Il volume, come già i precedenti *Matematica 2001* e *Matematica 2003*, è diviso in due parti: la prima contiene il curricolo vero e proprio; la seconda presenta trenta esempi di attività didattica ed alcuni elementi di prove di verifica. Essi sono organizzati in relazione ai nuclei previsti per quanto riguarda gli *approfondimenti*, mentre per i *consolidamenti*, tipiche attività trasversali, sono indicate le conoscenze interessate e le abilità consolidate. Nelle tabelle che precedono le varie attività si fa riferimento a Nuclei, Abilità e Conoscenze di tutti i cinque anni.
Per gli *approfondimenti*, prima della descrizione degli esempi proposti, è presente una tabella riassuntiva delle attività relative ai vari nuclei, con il numero della pagina in cui sono collocate.

Anche gli esempi di *consolidamento* sono preceduti da una tabella (unica) in cui è indicato il *percorso* cui si riferiscono. È inteso che l'esempio non può esaurire l'intero *percorso* proposto ma ne illustra soltanto qualche aspetto.

Gli esempi vanno intesi come semplici suggerimenti rispetto ai quali il docente potrà operare scelte e modifiche opportune, tenendo presenti il livello degli studenti, le proprie preferenze e, soprattutto, gli obiettivi specifici dell'indirizzo di studi in cui insegna. Essi sono di diverso livello di difficoltà; alcuni possono risultare particolarmente impegnativi e richiedono attenzione e cautela nel proporli. Sarà anche compito del docente operare una scelta rispetto alle metodologie di insegnamento. Potrà così usare il lavoro in piccoli gruppi, la discussione matematica, la ricerca in biblioteca o in Internet, l'uso idoneo delle nuove tecnologie…, in relazione ai contenuti trattati e agli obiettivi previsti.

Lugo di Romagna, 5 maggio 2004

Il curricolo di matematica
Ciclo Secondario
(quinta classe)

Approfondimenti:
abilità e conoscenze matematiche

Numeri e algoritmi

Abilità	Conoscenze
• Individuare analogie e differenze tra diverse strutture numeriche. • Utilizzare strutture più complesse come vettori, liste, matrici nella modellizzazione e nella risoluzione di problemi.	• La struttura dei numeri complessi e il teorema fondamentale dell'algebra. • Matrici e sistemi di equazioni lineari. Matrici e trasformazioni lineari.

Osservazioni

- Nella trattazione dei sistemi lineari dovrà essere prestata particolare attenzione agli aspetti strutturali e a quelli algoritmici (in particolare all'analogia tra l'equazione lineare $ax = b$ e il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$), piuttosto che all'acquisizione e alla verifica di abilità di calcolo manuale.
- L'uso di strutture dati come vettori, liste e matrici potrà avvalersi di software di manipolazione simbolica, sia per effettuare operazioni su di essi sia per consolidare, grazie a una riflessione sulla sintassi propria dei software, la conoscenza delle stesse strutture. Nel caso delle matrici sarà comunque opportuno limitarsi a ordini bassi.

Si sconsiglia di:

- Ridurre l'uso delle strutture come i vettori, le liste e le matrici a esercizio tecnico fine a se stesso.

Spazio e figure

Abilità	Conoscenze
• Calcolare e approssimare lunghezze, aree e volumi con diversi procedimenti. • Utilizzare le isometrie, le similitudini e le affinità del piano in dimostrazioni e problemi. • Riconoscere le proprietà invarianti di figure rispetto alle trasformazioni geometriche studiate. • Utilizzare i vettori e il prodotto scalare nello studio di problemi del piano e dello spazio. • Risolvere analiticamente problemi su sfera, piani, rette e interpretarne le soluzioni. • Utilizzare i primi elementi della geometria della sfera in altri ambiti (geografia, fisica, astronomia). • Analizzare le caratteristiche del V postulato di Euclide e conoscere la nascita delle geometrie non euclidee; conoscere nelle loro linee essenziali i modelli di geometria non euclidea (Beltrami-Klein, Poincaré, Riemann).	• Il problema delle aree; area del cerchio; area del segmento parabolico. Principio di Cavalieri e volumi. • Equazioni delle isometrie, delle similitudini e delle affinità del piano. • Vettori e loro operazioni; il prodotto scalare. Coordinate cartesiane nello spazio; distanza tra due punti; equazione del piano ed equazione della sfera. • Geometria del cilindro e del cono. Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine). • L'assioma delle parallele nel sistema assiomatico di Euclide; i primi elementi delle geometrie non euclidee attraverso modelli.

Si sconsiglia di:

- Trattare i temi di geometria separati da quelli degli altri nuclei e in particolare dall'analisi.

Relazioni e funzioni

Abilità	Conoscenze
• In casi semplici, determinare il limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 (valore finito o no) anche utilizzando i teoremi di confronto. • In casi semplici, stabilire se una funzione è continua oppure no, in un punto o in un intervallo. • Interpretare geometricamente la derivata; determinare la tangente in un punto al grafico di una funzione ed usarla per approssimare ("linearizzare") la funzione in un opportuno intervallo. • Utilizzare la derivata per calcolare la velocità istantanea di un moto. • Valutare l'andamento e il segno della funzione $f'(x)$ in relazione all'andamento di $f(x)$ e viceversa; individuare i punti in cui una funzione assume i valori massimi o minimi, relativi e assoluti. • Usare l'integrale come strumento per il calcolo di aree e di volumi di semplici solidi, anche non di rotazione. • Riconoscere la relazione tra l'operazione di ricerca della tangente al grafico di una funzione e l'operazione di calcolo dell'area ad esso sottesa.	• Approfondimento del concetto di limite (*vedi prima osservazione*). • Continuità di una funzione. • Derivata e differenziale di una funzione. • Integrale, primitiva di una funzione, funzione integrale, teorema fondamentale del calcolo (*vedi seconda osservazione*).

Osservazioni

- Molti concetti dell'analisi matematica possono essere compresi e utilizzati come strumenti e modelli, almeno fino ad un certo stadio di approfondimento, anche appoggiandosi ad una nozione solamente intuitiva di limite. Una precoce definizione formalizzata di limite, che non sia abbastanza sentita dallo studente come necessaria, potrebbe essere controproducente in un primo approccio all'analisi matematica. D'altra parte la capacità di esprimere in termini formali il concetto intuitivo di limite (o di continuità) rappresenta una grossa conquista nell'apprendimento e si consiglia di cercare i modi e i tempi opportuni per arrivarci mettendone in rilievo la complessa struttura logica, e tuttavia senza eccessiva enfasi.
- L'ordine e il modo in cui si introducono i concetti di derivata, integrale, primitiva, funzione integrale dipendono dalle scelte didattiche dell'insegnante. La storia della matematica può essere di aiuto e di guida in queste scelte. Il teorema fondamentale del calcolo integrale può essere illustrato anche facendo ricorso a visualizzazioni.
- Gli strumenti tecnologici possono facilitare la costruzione del concetto di tangente, ad esempio con l'utilizzo appropriato della funzione di "zoom". La valutazione della pendenza delle rette secanti passanti per un punto varia a seconda della scelta della finestra di visualizzazione di un grafico: infatti, in un opportuno ingrandimento, la porzione del grafico intorno al punto si confonde con una retta.

Si sconsiglia di:

- Ridurre l'analisi matematica esclusivamente allo studio di funzioni e di rendere meccanico l'uso della derivata prima e seconda e lo studio del loro segno.

Dati e previsioni

Abilità	Conoscenze
• Spiegare il concetto e la funzione "variabile aleatoria" • Utilizzare il teorema centrale del limite, approssimando le probabilità dalla distribuzione binomiale a quella normale. Determinare i parametri di una distribuzione ed usarli, eventualmente, anche per costruire la distribuzione gaussiana approssimante. (1) • Distinguere il concetto di "media di una popolazione" da quello della (variabile aleatoria) "media campionaria". • Costruire un campione casuale semplice, data una popolazione. • Stimare una proporzione (fra due parametri), o la media di una popolazione, attraverso una consapevole costruzione di stime puntuali e intervalli di confidenza.(3)	• La distribuzione binomiale: il suo uso e le sue proprietà. (2) • La distribuzione normale: il suo uso e le sue proprietà. (2) • Campionamento casuale semplice e distribuzione campionaria della proporzione e della media. • Stima puntuale e intervallo di confidenza per la proporzione e per la media. (3)

(1) Si tratterà, ad esempio, di calcolare la media e la deviazione standard di una distribuzione rispetto ad un carattere continuo (o anche discreto), per poter definire la distribuzione normale che approssima la distribuzione data.
(2) Queste conoscenze vogliono, rispettivamente, costituire un esempio di distribuzione discreta (distribuzione binomiale) e di distribuzione continua (distribuzione normale).
(3) Si tratta anche qui dell'uso della distribuzione normale, anche se in senso inferenziale.

Si sconsiglia di:

- Dare le formule per le diverse distribuzioni di probabilità senza motivarle e poi far risolvere una serie di esercizi di mera applicazione delle formule.
- Presentare le distribuzioni di probabilità senza (almeno) un concreto esempio di riferimento applicativo.

Argomentare, congetturare, dimostrare

Abilità	Conoscenze
• Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria. • Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.	• Sistemi assiomatici in vari contesti. • Coerenza e indipendenza di un sistema assiomatico. • Modelli come interpretazione di un sistema assiomatico.

Osservazioni

- Per parlare di sistemi assiomatici è bene riprendere argomenti noti agli studenti e mostrare come i concetti in gioco possano essere sistemati in una teoria assiomatica. Si può fare, ad esempio, riferimento a:
  - l'aritmetica dei numeri naturali (*Numeri e algoritmi)*
  - la geometria euclidea (*Spazio e figure)*

  Un esempio, molto importante anche dal punto di vista storico, è offerto dalle geometrie non euclidee (*Spazio e figure*), che potranno essere introdotte sia per via sintattica (cioè modificando opportuni assiomi della geometria euclidea) sia per via semantica (cioè attraverso lo studio di modelli).

  Anche le proprietà delle operazioni elementari (associativa ecc., cfr. *Numeri e algoritmi*) possono essere opportunamente tradotte in assiomi: per questa via si arriva all'introduzione delle prime strutture algebriche (come i gruppi).
- In occasione di situazioni didattiche di revisione e approfondimento, si potrà mettere l’accento sul significato logico-matematico di dizioni quali “esiste”, “è vero”; sarà utile un confronto con le scienze sperimentali e con la filosofia, se presente nel curricolo di studi.
- In particolare per questo nucleo, molte abilità e conoscenze citate per gli anni precedenti (come "Comprendere ed usare consapevolmente forme diverse di dimostrazione") vanno riprese e consolidate.

Si sconsiglia di:

- Presentare una trattazione puramente teorica dei modelli e delle proprietà dei sistemi assiomatici che risulterebbe eccessivamente astratta. Le problematiche citate vanno affrontate quando si incontrano occasioni adatte.

Consolidamenti: percorsi

1. La versatilità dell'oggetto polinomio

L'obiettivo di questo percorso è di rivisitare alcuni degli argomenti presenti nei quattro anni precedenti aggregandoli attorno al concetto di polinomio. L'argomento è di carattere trasversale e coinvolge temi presenti nei nuclei Numeri e algoritmi, Spazio e figure, Relazioni e funzioni e Argomentare, congetturare, dimostrare.
Il concetto di polinomio è, infatti, presente fin dal primo biennio [e in maniera implicita anche nei cicli scolastici precedenti], nell'ambito numerico per quanto riguarda la scrittura polinomiale dei numeri, nell'ambito algebrico per quanto riguarda sia l'aspetto strutturale sia l'aspetto operativo per la risoluzione di equazioni polinomiali, nell'ambito analitico perché legato alla rappresentazione di funzioni polinomiali [nel primo e nel secondo biennio] e all'approssimazione di funzioni non polinomiali. Questo concetto riveste una particolare importanza nella trattazione e nell'analisi dei dati. Si colloca, quindi, in modo trasversale anche rispetto ai nuclei Dati e previsioni e Misurare. L'argomento offre possibilità di collegamento interdisciplinare con le scienze sperimentali, l'economia, la medicina, ecc.
Per lo svolgimento del percorso sono necessarie sia abilità di calcolo sia l'uso di tecnologie, in particolare le calcolatrici grafico-simboliche, che consentono un uso integrato dei diversi ambienti.
E' importante che gli studenti abbiano presente anche la rappresentazione grafica dei problemi affrontati in modo da evidenziare, in particolare, il collegamento con la geometria analitica e la geometria sintetica.
L'obiettivo è far emergere le potenzialità e la pervasività dell'oggetto polinomio nei diversi ambiti della matematica.

2. I numeri: esattezza e approssimazione

Il percorso didattico di consolidamento proposto rivisita alcuni degli argomenti presenti nei quattro anni precedenti, aggregandoli attorno al tema dell'esattezza e dell'approssimazione. L'argomento è di carattere trasversale e coinvolge temi presenti nei nuclei Numeri e algoritmi, Misurare, Spazio e figure e Relazioni e funzioni.
La contrapposizione tra esatto ed approssimato accompagna lo studente in tutto il suo percorso scolastico a partire dalla scuola primaria. Nella scuola secondaria il problema si presenta quando si affronta la rappresentazione decimale dei numeri razionali e l'introduzione dei numeri irrazionali. Ma anche negli altri nuclei questa contrapposizione è presente nel problema della misura e della rappresentazione delle grandezze, geometriche o di altra natura. Sul versante algebrico questa contrapposizione diventa significativa nell'affrontare il problema della determinazione delle soluzioni esatte e approssimate di equazioni e sistemi. In generale, ma particolarmente in quest'ultimo caso, acquista rilevanza il problema dell'approssimazione e dell'esattezza legato a situazioni sia matematiche che della vita reale, anche in relazione all'uso di strumenti tecnologici di misura e di calcolo più o meno evoluti. A tal proposito è opportuno rilevare che molti problemi non sono affrontabili se non utilizzando algoritmi di approssimazione.

3. Modelli discreti e algoritmi di implementazione

Il percorso didattico di consolidamento proposto affronta argomenti esterni alla matematica, di particolare rilevanza sociale. Ha come obiettivo principale la consapevolezza dell'importanza di un modello matematico per studiare un fenomeno dinamico della vita reale. Si sceglie il modello discreto in quanto particolarmente adatto alla descrizione di situazioni in cui il legame tra le variabili avviene tramite tassi di variazione finiti.

Questo tipo di modello si presta particolarmente ad essere descritto e implementato tramite algoritmi iterativi e ricorsivi. Tali algoritmi possono essere tradotti in vari ambienti tecnologici, quali sono, ad esempio, il foglio elettronico, la calcolatrice grafico-simbolica, l'ambiente CAS (Computer Algebra System). Per tali motivi questo percorso si presenta come ponte tra la matematica e le altre discipline e, per l'uso delle tecnologie, rappresenta un tipico esempio di attività di Laboratorio di matematica.

4. Il problema della misura: lunghezze, aree, volumi

Il problema della misura di lunghezze, aree e volumi attraversa tutta la carriera scolastica a partire dalla scuola primaria. L'itinerario delineato ha lo scopo di far ripercorrere allo studente il suo personale cammino attraverso le successive generalizzazioni e gli affinamenti sia dei concetti che degli strumenti coinvolti nella soluzione dei problemi di misura. Esso è utile anche per rivisitare il cammino storico che dalla teoria dell'equivalenza in Euclide e dal metodo di esaustione porta al calcolo integrale.
L'argomento è trasversale e consolida conoscenze ed abilità fondamentali presenti nel curricolo proposto negli anni precedenti. Lo svolgimento necessita dell'uso di modelli e di tecnologie, da quelle tradizionali ai software di geometria e alle calcolatrici.
Particolare rilevanza assume in questo percorso il collegamento con il problema della misura in altri ambiti disciplinari quali quello della fisica e delle altre scienze sperimentali.

5. Geometria e arte

Il percorso didattico di consolidamento proposto riprende alcuni argomenti di geometria che sono stati affrontati nei quattro anni precedenti, sottolineando i loro legami con l'arte e, più in generale, con il mondo reale.
L'analisi di opere architettoniche può affinare la visione spaziale e consolidare la conoscenza delle proprietà di simmetria, aspetti che hanno sempre affascinato artisti, filosofi, matematici, …
L'argomento è trasversale e consolida conoscenze ed abilità fondamentali presenti nel curricolo proposto fin dalla scuola primaria.
Può essere opportuna la rappresentazione spaziale attraverso l'uso di modelli concreti o l'utilizzo di software di geometria o di disegno.
Un ruolo fondamentale gioca in questo percorso un approccio storico ai vari argomenti, all'interno della matematica (*Gli Elementi* di Euclide, libro XIII; Cartesio; Eulero; …) e all'esterno (filosofia, disegno e storia dell'arte, scienze naturali, …). Il tema proposto ha, infatti, aspetti fortemente interdisciplinari che vanno evidenziati e sottolineati.

6. Problemi di massimo e di minimo

Il percorso didattico di consolidamento che si propone rivisita alcuni degli argomenti presenti nel curricolo dei quattro anni precedenti, utilizzandone contenuti e metodi ai fini della risoluzione motivata di problemi di massimo e minimo.
L'argomento proposto – *Problemi di massimo e di minimo* - è trasversale e riguarda problematiche da ricercare in tutti gli ambiti matematici nonché attinenti alla storia della matematica e a situazioni fisiche reali.
Il percorso può essere utile per consolidare conoscenze e abilità dei nuclei Spazio e figure; Relazioni e funzioni; Numeri e algoritmi; Argomentare, congetturare, dimostrare.

Per la sua realizzazione didattica è opportuno avvalersi dell'uso di modelli e di tecnologie. Queste ultime, in particolare i software di geometria, possono dare un contributo chiarificatore in quanto permettono di visualizzare dinamicamente la variazione di grandezze connesse ad una figura, mettendola in relazione con la funzione che la rappresenta.

7. Pendenza di una retta e variazione di una funzione

Il percorso tratta del problema dell'andamento di una funzione, che va iniziato fin dalla scuola primaria. Parte da considerazioni sulla crescita/decrescita di un fenomeno, e analizza in seguito l'andamento di funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa e quadratica. Affina progressivamente il concetto di 'variazione' con la definizione quantitativa della pendenza di una retta, legata agli incrementi finiti delle variabili in gioco. Giunge infine al concetto di approssimazione locale di una funzione ed alla determinazione della retta tangente ad una curva in un punto ponendo le premesse per la definizione di derivata e per il calcolo con infinitesimi. L'itinerario impegna ed affina in particolare le abilità del nucleo Relazioni e funzioni e Misurare, ma presuppone anche una buona conoscenza di strumenti relativi al nucleo Numeri e algoritmi e si collega con il nucleo Spazio e figure. I concetti che coinvolge assumono spessore se trattati secondo registri diversi (numerico, simbolico, grafico): diventa quindi indispensabile un uso costante del Laboratorio di Matematica mediante strumenti quali calcolatrici e calcolatori.

8. Potenze, successioni, funzioni esponenziali e logaritmiche

A partire dalla scuola dell'obbligo gli allievi hanno a che fare con l'operazione di elevamento a potenza e con le proprietà relative a tale operazione, la cui conoscenza è fondamentale per la manipolazione algebrica di formule. In seguito, l'indagine su 'regolarità numeriche' che possono sorgere da vari contesti conduce naturalmente al concetto di successione ed alla ricerca di una formula di tipo funzionale o ricorsivo ed introduce le prime questioni che hanno a che fare con l'infinito. Le successioni aritmetiche e geometriche appaiono quindi in grado di modellizzare situazioni a crescita regolare con incrementi costanti di tipo additivo o di tipo moltiplicativo ed inducono a costruire ed a formalizzare la successione delle somme parziali.
Lo studio delle progressioni aritmetiche e geometriche costituisce la base per la costruzione delle funzioni esponenziali (nelle quali ad incrementi additivi costanti sul dominio corrispondono incrementi moltiplicativi costanti dell'immagine) e delle loro inverse, le funzioni logaritmiche.
Il percorso si collega in primo luogo al nucleo Numeri e algoritmi, ma ha riferimenti anche con i nuclei di Dati e previsioni e Spazio e figure; va sviluppato prevalentemente nel Laboratorio di matematica, con l'uso di strumenti come calcolatrici e calcolatore che facilitino la manipolazione numerica e la visualizzazione di grafici.

9. Equazioni e disequazioni

La ricerca di un valore che soddisfa determinate condizioni prende il via già dalla scuola primaria.
Lo studio delle funzioni consente di aggiungere un punto di vista grafico a quello algebrico, facendo rientrare la soluzione di un'equazione o di una disequazione, rispettivamente, nella ricerca degli zeri e nello studio del segno di una funzione. Anche le disequazioni in due variabili hanno un'interpretazione grafica e quindi geometrica. Il teorema di esistenza degli zeri, sempre presente come "teorema in atto", unitamente allo studio della funzione $y = f(x)$, corrispondente all'equazione $f(x) = 0$, consente la ricerca di soluzioni approssimate, in particolare quando si tratta di funzioni trascendenti. Per questo tema è particolarmente significativo il percorso storico, che può fornire

nuovi spunti per la comprensione dell'argomento: dai metodi risolutivi di Egizi, Babilonesi, Cinesi e Indiani a quelli degli algebristi del '400. Può essere significativo anche un percorso che, dai classici problemi irrisolubili con riga e compasso dell'antichità, giunga fino ai metodi risolutivi delle equazioni di 3° grado di Dal Ferro, Tartaglia, Cardano, ecc.
L'itinerario impegna ed affina in particolare gli strumenti del nucleo Relazioni e Funzioni e Numeri, ma presuppone anche una buona conoscenza di strumenti relativi al nucleo Spazio e figure. I concetti che coinvolge assumono spessore se trattati secondo registri diversi (numerico, simbolico, grafico): diventa quindi indispensabile un uso costante del Laboratorio di Matematica mediante strumenti quali calcolatrici e calcolatore.

10. Vari tipi di probabilità

Il percorso rivisita alcuni degli argomenti presenti nel curricolo dei precedenti quattro anni del nucleo Dati e previsioni, aggregandoli attorno a diversi temi quali quello degli eventi e delle operazioni con gli eventi (in particolare gli eventi incompatibili e gli eventi esaustivi); quello del significato della probabilità e delle sue valutazioni; quello del concetto di probabilità condizionata, di probabilità composta, di probabilità totale. L'attenzione alle prime (e semplici) distribuzioni di probabilità è una naturale conseguenza. L'argomento coinvolge anche aspetti presenti nei nuclei Spazio e figure (lunghezze e aree relative ai poligoni; lunghezza della circonferenza e area del cerchio), Relazioni e funzioni (costruzione di modelli, sia discreti sia continui; sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica), Misurare (analizzando e rappresentando dati ottenuti da misure di grandezze), Numeri e algoritmi (il numero π; calcolo di aree), Argomentare, congetturare, dimostrare (probabilità geometrica, discussione sull'infinito in matematica). Tali problemi possono proficuamente essere trattati anche dal punto di vista storico (paradossi dell'infinito, Galileo e il paradosso del tutto e della parte, Cantor e la definizione di insieme infinito). Il percorso si presta anche a numerosi collegamenti interdisciplinari (filosofia e letteratura) e all'uso del laboratorio.

11. Lettura probabilistica di una distribuzione doppia

Dai primi elementi di statistica descrittiva il percorso arriva ai rudimenti essenziali della probabilità condizionata, passando attraverso le varie possibilità di valutazione della probabilità. Vanno evidenziate, in particolare, le rivisitazioni delle conoscenze relative alle distribuzioni di frequenza, secondo il tipo di carattere; alle frequenze assolute, alle frequenze relative, alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Il passaggio alla valutazione di probabilità, attraverso argomentazioni, congetture, rifiuti e convalide, appare pertanto un obiettivo che può essere raggiunto passo passo con naturalezza. Le considerazioni logico-argomentative, ovviamente, coinvolgono in modo rilevante, oltre al nucleo Dati e Previsioni, anche il nucleo Argomentare, congetturare, dimostrare. Anche i nuclei Spazio figure (attraverso la formalizzazione degli aspetti della geometria elementare), Relazioni e funzioni e Misurare sono saltuariamente intersecati. L'intersezione forse più rilevante è col nucleo Risolvere e porsi problemi, coinvolto praticamente in tutte le sue attività.

12. Leggere, analizzare e prevedere: uso di una serie storica

Il percorso rivisita alcuni argomenti degli anni precedenti, aggregandoli attorno al tema della raccolta ed analisi di dati come la temperatura, le precipitazioni, l'umidità, la pressione atmosferica, lo stato del cielo, il vento.
Vanno evidenziati in particolare, nell'ambito del nucleo Dati e previsioni, le rivisitazioni delle conoscenze riguardanti le distribuzioni delle frequenze secondo il tipo di carattere, nonché le frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate. Vanno ricordate le principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze e le serie storiche e le loro rappresentazioni. Si rivisitano anche le proprietà dei valori medi e delle principali misure di variabilità, nonché lo studio delle rette di regressione e del loro potere esplicativo.
L'argomento coinvolge anche temi presenti nei nuclei Spazio e figure (formalizzazione degli oggetti della geometria elementare e passaggio da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato), Relazioni e funzioni (costruzione di modelli, sia discreti sia continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici), Misurare (analizzando e rappresentando dati ottenuti da misure di grandezze). Ogni fenomeno è poi misurato con l'aiuto di strumenti opportuni e ciò può attivare l'interdisciplinarietà con la fisica. L'attività nasce ed è stimolata dalla curiosità degli studenti sul clima del proprio paese, città, regione. L'insegnante può condurre la classe ad usare Internet per trovare risultati e dati nonché ricerche già effettuate sulla meteorologia che possano servire da guida. Si suggerisce di seguire dapprima le sole precipitazioni: l'analisi può essere condotta o per una sola stazione di rilevamento lungo tutto il corso di un anno per cui sono disponibili i dati oppure rispetto a un mese particolare in tutte le stazioni rilevate.

13. L'importanza del linguaggio

Il linguaggio gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento anche in matematica. Lo scopo del percorso è di porre un'attenzione particolare ai linguaggi utilizzati, interpretare i diversi comportamenti linguistici che influenzano le prestazioni in matematica e progettare attività didattiche adeguate.
Il percorso impegna conoscenze e abilità di tutti i nuclei; infatti le "formule" che si adoperano in matematica hanno molti elementi in comune con le frasi della lingua italiana. Gli studenti alla fine della scuola superiore rischiano di non capire la definizione di limite se non hanno imparato per gradi e con metodo, a leggere e "tradurre" le formule nella lingua naturale e a comprendere il gioco complesso delle alternanze dei quantificatori (per ogni…esiste…per ogni…).
E' importante, quindi, far notare le analogie e le differenze nell'uso del linguaggio naturale e dei linguaggi simbolici. Ad esempio occorre capire perché un'equazione del tipo $(x-4)(x^2-9) = 0$ si risolve come si risolve o perché un sistema è cosa diversa da tale equazione, e così via. Un altro esempio è nel passaggio dall'algebra all'analisi, quando il linguaggio cresce di complessità logica e linguistica: dalle formule aperte dell'algebra, ad es. $ax^2 + bx +c = 0$, a quelle con le alternanze di quantificatori necessarie per maneggiare i limiti.

14. Congetture, refutazioni, dimostrazioni

L'attività del dimostrare, che caratterizza la matematica matura, deve far parte del curricolo di matematica. Quando si parla di *dimostrazione*, però, si devono avere presenti tre importanti fasi:

a) l'osservazione, la scoperta e la produzione di congetture;
b) la validazione delle congetture attraverso la ricerca di controesempi o di dimostrazioni;

c) la sistemazione e la comunicazione della dimostrazione trovata secondo regole e canoni condivisi.

Tentare di avviare al pensiero teorico senza dare la dovuta importanza alle prime due fasi rischia di recidere quella necessaria continuità cognitiva tra la produzione di congetture, la ricerca di una dimostrazione e la sua sistemazione e comunicazione.

L'obiettivo principale di questo percorso è di costruire un ambiente di insegnamento-apprendimento con attività di osservazione ed esplorazione di situazioni matematiche. Ciò favorirà la produzione di congetture e motiverà alla successiva fase di validazione delle stesse mediante refutazioni o dimostrazioni. Ingredienti importanti delle attività di questo percorso sono: l'uso degli strumenti informatici per aiutare e potenziare le attività di esplorazione e osservazione delle situazioni proposte; i problemi aperti, le cui caratteristiche sono di avere un enunciato corto, non contenere in forma esplicita tutte le ipotesi, non contenere l'esplicitazione di tutte le richieste. In altri termini, un problema aperto pone domande del tipo: "Quali configurazioni assume ... Quali relazioni si possono trovare tra ..." e non del tipo "Dimostra che ...", in modo da favorire l'attività di esplorazione e produzione di congetture.

15. Dimostrazioni e modi di dimostrare

L'obiettivo principale di questo percorso è far riflettere gli studenti sul concetto di dimostrazione attraverso un'analisi di alcune dimostrazioni che potrebbero essere già state affrontate negli anni precedenti, per esempio le dimostrazioni per casi, quella per induzione, quella per assurdo.

Si può anche proporre una sorta di *fenomenologia* delle dimostrazioni mediante una classificazione delle dimostrazioni in:

a) "dimostrazioni che sono attività euristiche" e che hanno la funzione di risolvere problemi (esempi si possono costruire in vari contesti, dall'aritmetica elementare all'ambiente logico dei cavalieri e dei furfanti creato da Raymond Smullyan);
b) "dimostrazioni di casi particolari" (per esempio, dimostrare che fra $4!$ e $(4+1)!$ c'è almeno un numero primo);
c) "dimostrazioni che sono calcoli o esecuzione di programmi" (per esempio, dimostrare che $a^2 - b^2 + 2cb - c^2 = (a - b + c)(a + b - c)$);
d) "dimostrazioni di impossibilità" (dimostrare che l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non è risolubile nell'insieme dei numeri razionali);
e) "dimostrazioni per assurdo";
f) "dimostrazioni per induzione".

Il percorso, per la sua trasversalità, può impegnare conoscenze e abilità di tutti i nuclei.

La storia delle matematiche come strumento didattico

Suggerimenti di storia delle matematiche

La storia delle matematiche può costituire un valido sussidio didattico a partire dai primi anni di scuola, ma è solo durante i cinque anni di liceo che può essere introdotta in modo più articolato. La maggior maturità degli allievi e le più ampie conoscenze acquisite consentono di farne un uso più esteso e più proficuo. Consentono cioè di non limitarsi esclusivamente ad una storia "raccontata", ma di presentare l'evoluzione delle idee matematiche attraverso temi opportunamente scelti (in base alla rilevanza, al tipo di liceo, all'argomento che si sta trattando e alle connessioni con altre discipline) o con letture mirate dei classici, adeguatamente contestualizzate.
La storia, in tal modo, permette all'allievo di rendersi conto che la matematica non è una disciplina statica, ma nasce e si sviluppa per risolvere problemi, siano essi pratici o teorici. D'altro canto, il carattere unificante che le è proprio evidenzia l'unità profonda dei vari settori della matematica stessa. Essa favorisce inoltre l'approccio interdisciplinare (auspicato soprattutto nell'ultimo anno di liceo), può suggerire prove di verifica e stimolare la creatività.
Si propongono qui alcuni fra i molti argomenti di storia delle matematiche collegati con i temi che lo studente affronta via via nei cinque anni di liceo suggerendo anche problemi più specifici che possono dar luogo ad attività didattiche coerenti e integrate con lo svolgimento del curricolo. La proposta è completata da una bibliografia di base, in lingua italiana, utile per un primo approccio alla storia nella scuola.
I temi suggeriti hanno un carattere puramente esemplificativo e il docente potrà attingere ad essi compatibilmente con le esigenze della propria programmazione didattica.

Numeri e equazioni nella storia
- Sistemi di numerazione e tecniche di calcolo
- Le grandezze incommensurabili nel mondo greco, le proporzioni, …
- Il triangolo aritmetico
- L'equazione di secondo grado (Babilonesi, "algebra geometrica" in Euclide, Arabi, Medioevo)
- Soluzione delle equazioni di terzo e di quarto grado

La geometria euclidea, le sue radici storiche
- Il teorema di Pitagora
- Le costruzioni con riga e compasso (sezione aurea,…)
- Letture dai dialoghi di Platone

I problemi classici
- Duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del cerchio

Il problema della risolubilità per radicali delle equazioni di grado superiore al quarto

L'algebra come ausilio per risolvere problemi geometrici
- R. Descartes e la nascita della geometria analitica
- (Lettura commentata di passi opportunamente scelti dalla *Géométrie,* 1637)

L'uso di "macchine matematiche" nella soluzione di problemi

Il problema dei fondamenti della geometria da Euclide a Hilbert
- Lettura commentata di testi opportunamente scelti (Euclide, O. Al-Khayyam, G. Saccheri, C. F. Gauss, …, N. Lobacĕvskij, …, D. Hilbert)
- Modelli delle geometrie non euclidee

- Collegamenti possibili con la filosofia e la fisica per quanto riguarda l'evoluzione del concetto di spazio e con la storia della letteratura e dell'arte

Origini e sviluppi del calcolo delle probabilità e del metodo statistico
- L'emergere del concetto di probabilità dai problemi posti dal gioco d'azzardo: problemi opportunamente scelti da testi di G. Galilei, B. Pascal, P. Fermat, …, A. De Moivre, P.S. Laplace,...
- La curva di Gauss
- Il paradosso di S. Pietroburgo per discutere il concetto di valore atteso
- Il fallimento del sondaggio per le elezioni statunitensi del 1936 al fine di illustrare i possibili metodi di campionamento statistico

Cenni sulla storia dei numeri complessi

Dai metodi infinitesimali alla creazione dell'analisi infinitesimale
- Archimede e il metodo dei teoremi meccanici (volume della sfera, …)
- La creazione dell'analisi infinitesimale: l'importanza della geometria di R. Descartes e dell'equazione della curva; il ruolo principale della "derivazione" nell'analisi di I. Newton e di G. W. Leibniz; l'uso intuitivo del concetto di limite
- Il metodo di Apollonio per determinare la tangente alla parabola (metodo legato alla curva) a confronto con quelli di Newton e Leibniz (metodi generali)
- Problemi fisici che hanno condotto allo sviluppo dell'analisi infinitesimale (la cicloide, …)

Il problema dei fondamenti dell'analisi
- I paradossi dell'infinito, le curve cosiddette patologiche, …
  (Lettura commentata di testi opportunamente scelti)

La nascita della logica
- Letture opportunamente scelte e commentate

Riferimenti bibliografici

Testi generali di storia delle matematiche

Loria, G., (1982), *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, (1950), Cisalpino-Goliardica, Milano.

Boyer, C., (1980), *Storia della matematica*, Oscar Studio Mondadori, Milano.

Kline, M., (1991), *Storia del pensiero matematico*, (1972), 2 voll., Einaudi, Torino.

Bottazzini, U., (1990), *Il flauto di Hilbert*, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Utet, Libreria, Torino.

Raccolte di Fonti

Manara, C. F.; Lucchini, G.. (1976), *Momenti del Pensiero Matematico*, Mursia, Milano.

Bottazzini, U.; Freguglia, P.; Toti Rigatelli, L., (1992) *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Opere di matematici

Classici della scienza, collana della UTET

Biografie

I grandi della scienza, Le Scienze

Enciclopedie

Berzolari, L.; Vivanti, G.; Gigli D.; (1930) *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi,* Hoepli: Milano (esistono varie riproduzioni anastatiche dell'opera, l'ultima delle quali a cura della Casa Editrice Pagine Srl - Via G. Serafino, 8 - 00136 Roma)

Enriques, F.; (1983), *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* Zanichelli, Bologna, 2 voll., (1912-14).

Siti (aggiornati al maggio 2005)

http://www.dm.unito.it/sism/index.html (sito della Società Italiana di Storia delle Matematiche)

http://www.dm.unito.it/mathesis/documenti.html

http://www.math.unifi.it/archimede (sito de Il Giardino di Archimede, un museo per la matematica)

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html (sito di storia della matematica della University of St. Andrews, Scotland)