Consolidamento: attività didattiche e prove di verifica

Elenco delle attività

Interpolazione polinomiale

Percorso: **La versatilità dell'oggetto polinomio**

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Polinomi in una indeterminata. I polinomi e le loro operazioni. Equazioni polinomiali: numero delle soluzioni e algoritmi di approssimazione.	Numeri e algoritmi	
Risolvere semplici problemi riguardanti le parabole.	Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate.	Spazio e figure	
Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni di primo grado.	Sistemi lineari. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzioni polinomiali.	Relazioni e funzioni	
Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze e utilizzarli per effettuare previsioni.		Misurare	
In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare teoremi.		Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di Matematica	

Contesto
Matematica. Polinomi e interpolazione.

Quest'attività si inserisce nel percorso di consolidamento "La versatilità dell'oggetto polinomio" e vuole condurre gli studenti ad affrontare il seguente problema:
Dati $n + 1$ punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) con ascisse tutte distinte, determinare il polinomio $p(x)$ di grado (al più) n tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ soddisfi gli $n + 1$ punti, cioè tale che

$$p(x_0) = y_0,\ \ p(x_1) = y_1,\ \ \dots ,\ \ p(x_n) = y_n.$$

Gli studenti devono rendersi conto che la determinazione dei coefficienti del polinomio comporta la risoluzione di un sistema di equazioni lineari e che il polinomio ottenuto è unico. Inoltre per $n = 1$ e $n = 2$ devono ritrovare risultati già noti dagli anni precedenti. Infine è bene che gli studenti affrontino il problema della complessità del calcolo (con gli strumenti che hanno a disposizione) quando il numero dei punti considerati aumenta, in modo da far loro intravedere la necessità di tecniche più potenti, anche attraverso l'utilizzo della tecnologia.

Descrizione dell'attività
L'insegnante invita gli studenti a completare, eventualmente servendosi di una calcolatrice, la seguente tabella con riferimento alla funzione polinomiale $p(x) = 5 - x + 2x^2 + 3x^3$

x	$p(x)$
–1	
0	
1	
1,5	

L’insegnante invita gli studenti a rappresentare graficamente i punti ottenuti e a confrontarli con il grafico della funzione polinomiale ottenuto implementando l’equazione del polinomio dato con un software di manipolazione simbolica (Computer Algebra System).

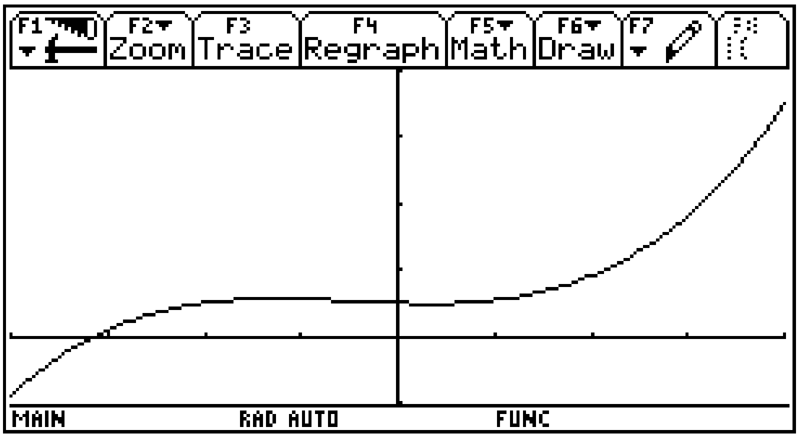


Figura 1

L’insegnante pone la seguente domanda: “Ci si poteva attendere, conoscendo solo quei quattro punti, che la funzione polinomiale avesse questo andamento?”
A questo punto occorre affrontare il seguente problema: data una tabella che rappresenta un certo numero di punti, è univocamente determinata la funzione polinomiale che passa per quei punti? Per rispondere si procede per gradi. Quanti punti sono necessari per determinare un polinomio di primo grado? La domanda non presenta difficoltà in quanto è ben noto agli studenti che sono necessari due punti per individuare una retta. Ma sono anche sufficienti.
L’insegnante avrà l’opportunità di consolidare l’abilità relativa a determinare l’equazione della retta passante per due punti assegnati. Scrivendo l’equazione della retta nella forma $y = a_1 x + a_0$, farà notare che i parametri in gioco sono due e che imporre il passaggio per due punti significa risolvere un sistema di due equazioni nelle due incognite a_0 e a_1.
Si propone il seguente esempio.
Determinare l’equazione della retta passante per i punti di coordinate (–1; 2) e (1; 3/2); cioè il polinomio di primo grado tale che $p(-1) = 2$ e $p(1) = 3/2$.
Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + a_0 = 2 \\ a_1 + a_0 = 3/2 \end{cases},$$

gli studenti ottengono facilmente il polinomio:

$$p(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

In quali casi il sistema risulta indeterminato? E in quali casi impossibile?
La discussione su questi temi offre l’opportunità di consolidare conoscenze relative ai sistemi lineari di due equazioni in due incognite, note fin dal primo biennio della scuola secondaria.
Seguendo un approccio graduale, l’insegnante pone la domanda: “Quanti punti sono necessari per determinare un polinomio di secondo grado?”

In altre parole, quanti punti sono necessari per individuare una parabola di equazione:

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \ ?$$

Anche a questo proposito l'insegnante proporrà diversi esempi del tipo seguente.
Determinare il polinomio di secondo grado $p(x)$ tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ passi per i punti di coordinate (1; 2), (2; 5), (3; 4).
Gli studenti potranno risolvere il sistema corrispondente anche con l'uso del software precedentemente utilizzato in modo da ottenere l'equazione $y = -2x^2 + 9x - 5$. Inoltre otterranno il grafico seguente:

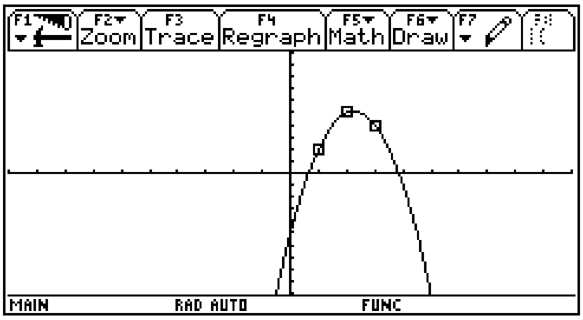


Figura 2

Dati tre punti, è sempre possibile determinare il polinomio di secondo grado tale che il grafico della funzione polinomiale corrispondente passi per quei punti?
Gli studenti saranno portati ad osservare, con semplici considerazioni geometriche, che se i tre punti sono allineati non esiste una parabola che passi per essi.
L'insegnante inviterà gli studenti a risolvere il sistema nel caso che i tre punti siano ad esempio (−2; −2), (0; 0), (2; 2) e si troverà che, in tal caso, il coefficiente del termine di secondo grado è uguale a zero.
Si propone a questo punto il seguente problema.
Determinare la funzione polinomiale di grado 3 che passa per i 4 punti (1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 8).
Il generico polinomio di grado 3 è

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

La condizione affinché il grafico della funzione polinomiale passi per i punti indicati si traduce nella risoluzione del sistema seguente

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 4 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 8 \end{cases}.$$

A tale scopo è consigliabile utilizzare un software di manipolazione simbolica (per esempio una calcolatrice grafico – simbolica), per evitare che le difficoltà di calcolo facciano perdere di vista l'obiettivo dell'attività.
Si ottiene:

$$p(x) = -10 + \frac{127}{6}x - \frac{19}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3$$

Graficamente risulta:

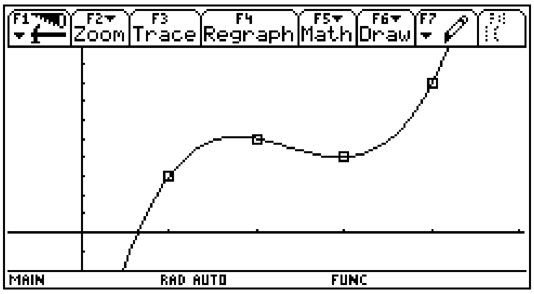


Figura 3

L'unicità della soluzione del sistema garantisce l'unicità del polinomio?
Questi esempi conducono gli studenti a congetturare che $n+1$ punti di ascisse distinte determinano un polinomio $p(x)$ di grado (al più) n .
In effetti si può dimostrare il seguente:
Teorema. Dati $n + 1$ punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), se le ascisse sono tutte distinte allora esiste uno ed un solo polinomio $p(x)$ di grado (al più) n tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ soddisfa gli $n + 1$ punti, cioè tale che:

$$p(x_0) = y_0\,;\; p(x_1) = y_1\,;\, \ldots\ldots\ldots\ldots\,;\; p(x_n) = y_n$$

Il polinomio $p(x)$, se è di grado n, ha $n + 1$ coefficienti:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Il sistema lineare si ottiene imponendo il passaggio per gli $n + 1$ punti ($n + 1$ equazioni nelle $n + 1$ incognite $a_0, a_1, \ldots, a_n$).

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Il sistema ammette una e una sola soluzione. La n-pla che rappresenta la soluzione fornisce i coefficienti del polinomio cercato. Se $a_n \neq 0$, il polinomio sarà esattamente di grado n.

Possibili sviluppi
Si può approfondire la questione considerando il caso in cui i punti dati siano n e il polinomio cercato di grado n (si tratta di un sistema di n equazioni in $n + 1$ incognite) e il caso in cui i punti dati siano $n + 2$ e il polinomio cercato di grado n (si tratta di un sistema di $n+2$ equazioni in $n + 1$ incognite).

Elementi di prove di verifica

1. Determinare il polinomio di terzo grado $p(x)$ tale che la funzione $y = p(x)$ passi per i punti di coordinate $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 5)$.

2. Considerare i seguenti punti $(-1; -7)$, $(0; -5)$, $(3; 1)$. Sono allineati? Qual è il relativo polinomio di primo grado? Esiste un polinomio di secondo grado tale che la funzione polinomiale corrispondente soddisfi i tre punti?

3. Considerare i seguenti punti $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$. Trovare un polinomio di terzo grado $p(x)$ tale che la funzione polinomiale $y = p(x)$ soddisfi i tre punti. La soluzione è unica?

4. Quante sono le parabole di equazione $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ che passano per i punti $(-2; 0)$ e $(3{,}5; 0)$? Scriverne l'equazione.

5. Quante sono le funzioni polinomiali di terzo grado che passano per i punti $(-2; 0)$, $(0; 0)$, $(3{,}5; 0)$? Scriverne l'equazione.

Approssimazione polinomiale

Percorso: **I numeri: esattezza e approssimazione**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Approssimare a meno di una fissata incertezza. Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo e viceversa Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione. Determinare approssimazioni ed effettuare una stima dell'incertezza.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. I polinomi e le loro operazioni. Il grafo di calcolo di un'espressione. Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzioni polinomiali. La funzione esponenziale e il suo grafico.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Misurare	

Contesto
Matematica. Problema delle approssimazioni.

Questa attività si pone nell'ambito generale del problema delle approssimazioni e affronta il problema di approssimare funzioni trascendenti tramite polinomi. Precisamente si vuole evidenziare come è possibile migliorare il grado di approssimazione aumentando il grado del polinomio impiegato.

Descrizione dell'attività

A livello didattico si può partire dalla seguente domanda: "Sapendo che una calcolatrice scientifica effettua, in ultima analisi, due operazioni (addizione e moltiplicazione), qual è la tipica funzione algebrica che può essere "costruita" con tali operazioni?" La tipica struttura algebrica che si può costruire mediante le sole operazioni di addizione e moltiplicazione è il polinomio. Poiché tutte le calcolatrici scientifiche contengono, di default, anche funzioni trascendenti, si pone allora il problema di comprendere come tali funzioni possono essere calcolate. Ciò può essere evidenziato tramite il confronto dei valori ottenuti con le funzioni di default con quelli calcolati tramite uno sviluppo polinomiale.

Prima fase
L'insegnante propone il seguente problema: Data la funzione $f(x) = 2^x$, supponiamo di voler calcolare i valori assunti da tale funzione nei punti dell'intervallo [0, 2]. A questo punto si presentano due possibilità: *a*) utilizzare la funzione y^x presente nella calcolatrice; *b*) utilizzare un opportuno polinomio [che sfrutta solo le operazioni di addizione e moltiplicazione]. Considerato che si può conoscere facilmente il valore della funzioni in alcuni punti dell'intervallo in questione, è possibile determinare i coefficienti del polinomio di secondo grado $a_0 + a_1x + a_2x^2$ che passa per una terna di punti le cui ascisse appartengono all'intervallo [0, 2]. Ad esempio si potranno utilizzare i punti di coordinate (0; 1), (1; 2), (2; 4). Applicando il procedimento sviluppato nell'attività relativa all'interpolazione polinomiale si arriva a determinare:

$$p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2.$$

Le due funzioni $f(x)$ e $p(x)$ assumono evidentemente valori uguali per $x = 0, 1, 2$. Cosa succede per altri valori dell'intervallo [0, 2]? Calcoliamo i valori delle due funzioni dando a x valori crescenti partendo da 0 con un incremento pari a 0,5 e confrontiamo i risultati ottenuti. Si ottiene una tabella del tipo seguente:

x	y1	y2
0.	1.	1.
.5	1.4142	1.375
1.	2.	2.
1.5	2.8284	2.875
2.	4.	4.
2.5	5.6569	5.375
3.	8.	7.
3.5	11.314	8.875

x=0.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 1

in cui si nota che per alcuni punti [$x = 0{,}5$ e $x = 1{,}5$] la concordanza non è perfetta. Per determinare la stima dell'incertezza è necessario rispondere alla seguente domanda: "Qual è l'errore che si commette in tali punti?" Si tratta di valutare la differenza $f(x) - p(x)$. Si ottiene la nuova tabella in cui l'ultima colonna riporta il valore dell'errore assoluto.

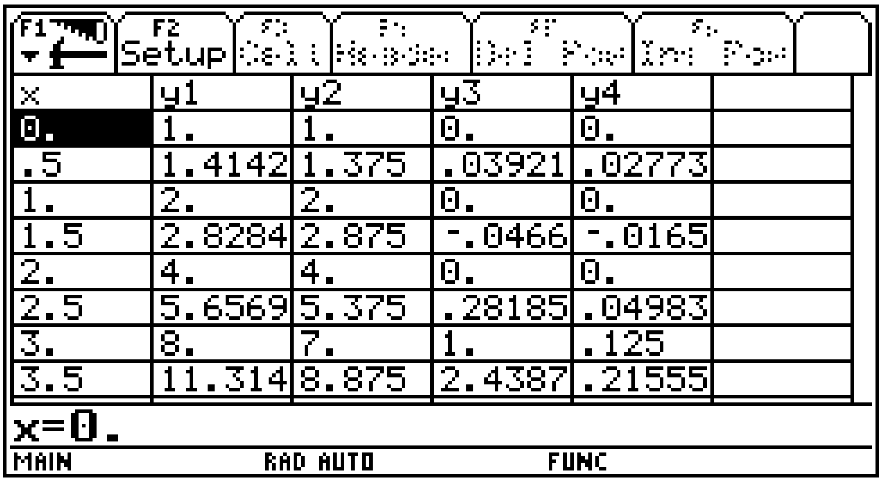
x	y1	y2	y3
0.	1.	1.	0.
.5	1.4142	1.375	.03921
1.	2.	2.	0.
1.5	2.8284	2.875	-.0466
2.	4.	4.	0.
2.5	5.6569	5.375	.28185
3.	8.	7.	1.
3.5	11.314	8.875	2.4387

x=0.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 2

Ma, per valutare la bontà dell'approssimazione, è più utile l'errore relativo rispetto all'errore assoluto. Pertanto si può costruire una nuova tabella che accanto all'errore assoluto riporti anche l'errore relativo $[f(x) - p(x)]/f(x)$.



x	y1	y2	y3	y4
0.	1.	1.	0.	0.
.5	1.4142	1.375	.03921	.02773
1.	2.	2.	0.	0.
1.5	2.8284	2.875	-.0466	-.0165
2.	4.	4.	0.	0.
2.5	5.6569	5.375	.28185	.04983
3.	8.	7.	1.	.125
3.5	11.314	8.875	2.4387	.21555

Figura 3

Diminuendo l'incremento della *x* a 0,2 si ottiene la seguente tabella

x	2^x	1+0,5*x+0,5*x^2	f(x)-p(x)	(f(x)-p(x))/f(x)
0	1	1	0	0
0,2	1,148698	1,12	0,028698	0,024983369
0,4	1,319508	1,28	0,039508	0,029941397
0,6	1,515717	1,48	0,035717	0,023564146
0,8	1,741101	1,72	0,021101	0,012119415
1	2	2	0	0
1,2	2,297397	2,32	-0,0226	-0,00983865
1,4	2,639016	2,68	-0,04098	-0,0155301
1,6	3,031433	3,08	-0,04857	-0,01602109
1,8	3,482202	3,52	-0,0378	-0,01085455
2	4	4	0	-1,1102E-16
2,2	4,594793	4,52	0,074793	0,016277863

Tabella 1

da cui si nota che l'errore dell'approssimazione dipende dal punto considerato.

Seconda fase

Un altro modo per valutare la "bontà" dell'approssimazione è quello di rappresentare i grafici sovrapposti di *f*(*x*) e *p*(*x*) nell'intervallo considerato. Si ottiene il seguente andamento:

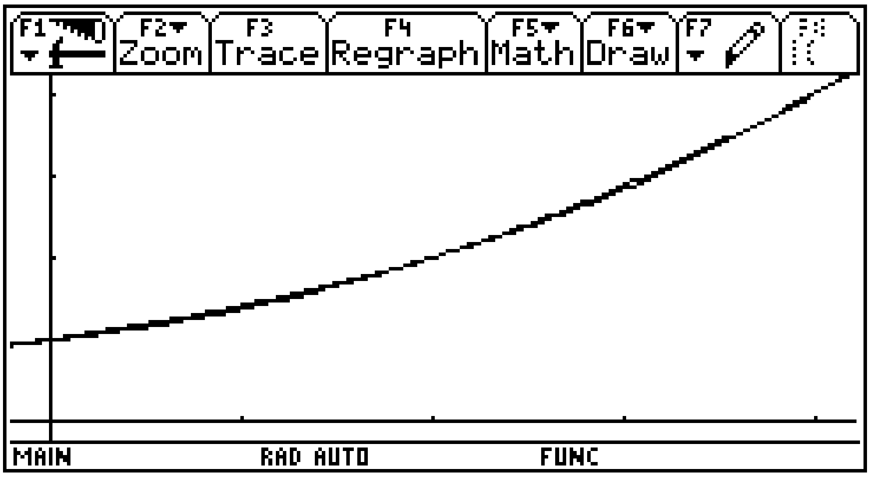


Figura 4

da cui appare evidente come le due curve sono molto vicine su tutto l'intervallo considerato.
Sfruttando le potenzialità della tecnologia è possibile ottenere un grafico più significativo del precedente in cui si rappresenta sia l'errore assoluto che quello relativo.

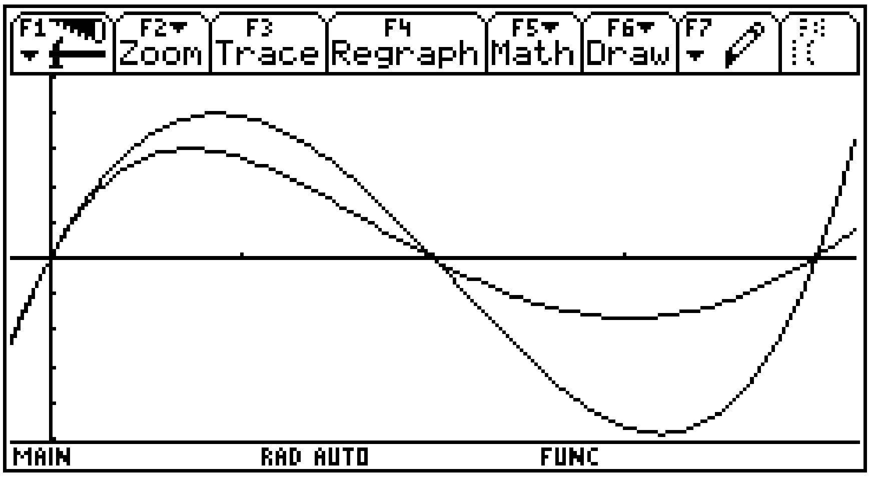


Figura 5

Si può vedere che solo utilizzando una scala opportuna sull'asse delle ordinate [nel caso in esame si considerano valori compresi tra –0,05 e 0,05] è possibile evidenziare l'errore. In particolare si osserva come per i valori dell'intervallo [0, 1] l'errore relativo è più grande (in valore assoluto) che per i valori dell'intervallo [1, 2].
Come successivo approfondimento per una ulteriore valutazione si può determinare l'area sottesa dalle curve $f(x) - p(x)$ e $[f(x) - p(x)]/f(x)$ sull'intervallo considerato.

Possibili sviluppi

Questa attività può proseguire secondo due diverse direzioni: *a*) valutare l'andamento dell'errore al crescere dell'ampiezza dell'intervallo; *b*) valutare il miglioramento dell'approssimazione al crescere del grado del polinomio.

Elementi di prove di verifica

1. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione razionale fratta $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo [1, 2] e nell'intervallo [5, 6]. Polinomi dello stesso grado producono la stessa approssimazione in questi intervalli?

2. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ nell'intervallo [0, 1].

3. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione $f(x) = log_2 x$ nell'intervallo [1, 4].

4. Realizzare un'approssimazione polinomiale per la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ nell'intervallo [–1, 1].

La concentrazione del tasso alcolemico nel sangue

Percorso: **Modelli discreti e algoritmi di implementazione**

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.		Numeri e algoritmi	Scienze
Costruire modelli, sia discreti che continui. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni. Possedere il senso intuitivo di limite di una successione.	Zeri di funzioni. La funzione esponenziale. Semplici esempi di successioni. Incrementi a passo costante, pendenza media.	Relazioni e funzioni	
Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezza e utilizzarli per effettuare previsioni.		Misurare Laboratorio di matematica	

Contesto
Educazione alla salute.

Questa attività si colloca nel contesto dei problemi reali, di particolare rilevanza sociale e attualità, legati alle problematiche di vita degli studenti.
L'attività, introdotta in una quinta classe, può avere lo scopo di richiamare vari concetti già affrontati negli anni precedenti, proponendo un problema molto simile alla "concentrazione di un farmaco nel sangue" che è stato suggerito per il secondo biennio [Matematica 2003, *Relazioni e funzioni*, La concentrazione di un farmaco nel sangue]. L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. Naturalmente l'attività dovrebbe essere molto meno guidata dall'insegnante rispetto alla "concentrazione di un farmaco nel sangue": gli studenti dovrebbero essere in condizione di affrontare autonomamente il problema.

Descrizione dell'attività
L'attività consente di richiamare e approfondire:
- nozioni come quelle di funzione, in particolare di successione, di crescenza di una funzione, di modello;
- tecniche come quelle delle differenze finite per ottenere informazioni sulla variazione e in particolare su come cresce una funzione;
- tecniche di programmazione per calcolare i valori di una successione definita per ricorsione.

Consente anche un'ulteriore occasione per riflettere sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Attività di questo tipo rendono possibile la ripresa e l'approfondimento di tecniche di risoluzione di equazioni, sia grafiche sia numeriche sia formali. La compresenza di questi tre approcci rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, soprattutto dei manipolatori grafico-simbolici.

Prima fase

L'insegnante propone la *situazione–problema* sotto riportata:
Il tasso alcolemico si misura in grammi di alcool per litro di sangue; un tasso alcolemico di 1g/l indica che in ogni litro di sangue del soggetto è presente 1 grammo di alcool puro. Per una persona di 70 kg, che ingerisce 70–80 cl di birra a elevata gradazione alcolica, il tasso alcolemico aumenta di circa 0,8 g/l. Supponiamo ora che:

- una persona abbia assunto una quantità di alcool tale che, dopo la prima mezz'ora, il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo di 1,5 g/l;
- il fegato di questa persona riesca a smaltire ogni ora una quantità di alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduca del 30% ogni ora;
- la persona per un'intera settimana non assuma più alcool.

Determinare, se possibile, dopo quanto tempo il tasso alcolemico si è ridotto a una quantità pressoché trascurabile (diciamo 0,1 g/l), giustificando la risposta.

Nelle seguenti ipotesi:

- il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo nel sangue in un tempo trascurabile;
- una persona assuma sistematicamente una quantità di alcool tale da provocare, a ogni assunzione, un aumento del tasso alcolemico di 0,8 g/l;
- il tempo che intercorre tra un'assunzione e la successiva è tale che il fegato riesce a smaltire l'alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduce, prima della nuova assunzione, dell'80%.

che cosa si può dire dell'evoluzione a lungo termine del tasso alcolemico nel sangue di questa persona? Si giustifichi la risposta.
Assumendo l'ipotesi più realistica che l'assunzione di alcool avvenga due volte al giorno e che il fegato di questa persona riesca a smaltire ogni ora una quantità di alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduca del 30% ogni ora, come cambierebbe la risposta al precedente quesito?

Ci si attende che gli studenti riconoscano che, nel caso in cui la persona non assuma più alcool, il tasso alcolemico decada esponenzialmente nel tempo (si tratta, ovviamente, di un'osservazione più precisa del "decresce, ma decresce sempre meno" che, comunque, indicherebbe una comprensione qualitativa del fenomeno). Alcuni studenti potrebbero produrre tabelle del tipo:

Numero ore	$T(n)$ tasso alcolemico che rimane nel sangue (in g/l)
0	1,5
1	$0{,}7 \cdot 1{,}5 = 1{,}05$
2	$0{,}7 \cdot 1{,}05 = 0{,}735$
3	$0{,}7 \cdot 0{,}735 = 0{,}5145$
…	…
n	…

Tabella 1

Ci si attende, però, che tutti gli studenti, dopo una prima esplorazione siano in grado di ricavare una legge del tipo: $T(n) = 1{,}5 \cdot (0{,}7)^n$ [g/l], eventualmente dopo essere passati, magari aiutati dall'uso di un foglio elettronico, attraverso la definizione della successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} T(0) = 1,5 \\ T(n) = 0,7 \cdot T(n-1) \end{cases}$$ [si intende sempre in g/l]

In questo caso è facile trovare dopo quanto tempo il tasso alcolemico si è ridotto a 0,1 g/l; basta risolvere l'equazione $0,1 = 1,5 \cdot (0,7)^n$, ossia $0,7^n = 0,0667$, da cui si ottiene $n = 8$ ore. La risoluzione può essere effettuata per tentativi, oppure formalmente, utilizzando i logaritmi o, ancora, utilizzando un manipolatore simbolico e impostando in esso l'equazione che deve essere risolta. In quest'ultimo caso gli studenti dovrebbero prima prevedere un'approssimazione della soluzione a meno di una o due unità.

Per quel che riguarda la seconda domanda, gli studenti dovrebbero rendersi conto che l'assunzione periodica di alcool determina sì una crescita del tasso alcolemico nel sangue, ma anche che il tasso alcolemico aumenta sempre meno, se si suppone costante la capacità di smaltimento del fegato. Queste considerazioni potrebbero essere inizialmente suggerite da problemi simili affrontati in passato (per esempio la concentrazione di un farmaco nel sangue), oppure da considerazioni del tipo "il fegato smaltisce una quantità di alcool sempre maggiore, perché smaltisce, prima della nuova assunzione, l'80% di una quantità che cresce. Quindi smaltisce sempre più, il che suggerisce che la quantità di alcool possa sì aumentare, ma sempre meno". Queste considerazioni possono essere verificate, una volta definita la legge ricorsiva che descrive l'evoluzione del tasso alcolemico t nel sangue

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

La verifica può essere effettuata prima con strumenti di calcolo automatico (per esempio fogli elettronici o strumenti di calcolo grafico–simbolico), fino a congetturare il valore di equilibrio del tasso alcolemico nel sangue.

Anche in questo caso gli studenti potrebbero aiutarsi con tabelle del tipo

Numero di assunzioni di alcool	$T(n)$ tasso alcolemico che rimane nel corpo (in g/l)
1	0,8
2	0,2·0,8+0,8 = 0,96
3	0,2·0,96+0,8 = 0,992
4	0,2·0,992+0,8 = 0,9984
5	0,2·0,9984+0,8 = 0,9997
6	0,2·0,9997+0,8 = 0,9999

Tabella 2

La Tabella 2 suggerisce almeno due congetture:

1. la successione è crescente, ma cresce sempre meno (cosa che si può controllare anche eseguendo la tabella delle differenze prime e magari delle differenze seconde: Tabella 3)
2. dato un determinato valore del tasso alcolemico rimasto nel corpo, il successivo può essere determinato moltiplicando tale valore per 0,2 e addizionando 0,8, ossia l'aumento del tasso alcolemico in seguito all'assunzione costante.

L'osservazione 1 può essere corroborata e giustificata sia con argomentazioni di tipo logico–intuitivo, sia con l'aiuto di tecniche come, per esempio, le già citate differenze finite.

Numero di assunzioni di alcool	$T(n)$ tasso alcolemico che rimane nel corpo (in g/l)	Differenze prime
1	0,8	
2	0,96	0,16
3	0,992	0,032
4	0,9984	0,0064
5	0,9997	0,0013
6	0,9999	0,0002

Tabella 3

Il metodo delle differenze finite è particolarmente indicato quando la variabile indipendente varia con passo costante. In tal caso, le differenze prime sono proporzionali alla pendenza della retta congiungente due punti successivi della successione (la costante di proporzionalità è il passo con cui variano i valori della variabile indipendente). In altri termini, se la variabile indipendente varia con passo costante, la si può anche dimenticare, concentrandosi sulla variazione dei valori della variabile dipendente. In questo caso la tabella si può leggere in colonna, e non riga per riga. Questo modo di guardare i dati è caratterizzato da una certa dinamicità e consente di valutare velocemente crescenza e concavità di una curva che rappresenta l'andamento del fenomeno oggetto di studio, senza scomodare conoscenze matematiche che vadano al di là di differenze e, eventualmente, ma non necessariamente, di rapporti.
Questo primo tipo di osservazioni dovrebbe portare gli studenti ad avere un'idea anche grafica dei punti che formano la successione e che può essere verificata con un foglio elettronico.
La congettura 2 necessita di maggiore attenzione nella lettura dei dati e di una certa abilità nel riconoscere regolarità in una successione. Se gli studenti sono stati abituati a non effettuare subito i calcoli, ma ad osservare prima come variano i dati su cui vengono effettuate le operazioni, si accorgeranno che tutti i calcoli effettuati possono essere rappresentati con lo schema:

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

Questa scrittura dovrebbe suggerire la possibilità di determinare il valore limite della successione, senza fare uso degli strumenti dell'analisi matematica. Infatti, se tale valore limite esiste, esso deve poter essere determinato ponendo $T(n) = T(n+1) = x$ e quindi risolvendo l'equazione $x = 0,2\,x + 0,8$ che dà il valore $x = 1$.

<u>Seconda fase</u>
L'attività può proseguire invitando gli studenti a costruire programmi che consentono di calcolare automaticamente i valori della successione, partendo dalla definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

Di seguito si riporta il programma "alcool" e la funzione "alcool(n)"[1], costruiti per alcune calcolatrici programmabili e grafiche che presentano un manipolatore simbolico simile a quello utilizzato da software ormai di diffusione relativamente vasta nelle scuole.

---

[1] In genere le calcolatrici grafico–simboliche hanno già funzioni predefinite che consentono il calcolo dei valori di una successione per iterazione, ma si ritiene non inutile far costruire dagli studenti un programma e una funzione che consentano di effettuare automaticamente tale calcolo. Ovviamente è possibile anche ricordare loro come utilizzare eventuali funzioni predefinite del software utilizzato.

```
:alcool( )                    (intestazione: nome programma)
:Prgm                         (indica che si tratta di un programma)
:Request "dammi n", n         (il sistema attende un input che inserisce nella cella di nome n)
:expr(n) →n                   (l'input n, preso come stringa, viene trasformato in dato numerico)
:0.8 →alc                     (si inizializza la variabile alc)
:For i, 2, n, 1               (inizio ciclo for, con i che va da 2 a n, passo 1)
:0.2 * alc + 0.8 → alc        (aggiornamento dei valori della successione inseriti in alc)
:EndFor                       (fine ciclo for)
:Disp alc                     (viene visualizzato il contenuto di alc)
:EndPrgm                      (fine programma)
```

```
:alcool(n)                    (intestazione: nome funzione)
:Func                         (indica che si tratta di una funzione)
:if n = 1                     (se n = 1
:Return 0.8                   (restituisce il valore 440)
:if n > 1                     (se n > 1
:Return 0.2*alcool(n-1)+0.8   (restituisce il valore indicato)
:EndFunc                      (fine funzione)
```

L'insegnante può discutere con gli studenti sulla convenienza o meno di utilizzare un programma o una funzione per calcolare i valori della successione. Soprattutto, però, dovrebbe cercare di dare una risposta a una domanda che emerge in modo naturale quando si paragonano i tempi di calcolo impiegati per computare i valori della successione utilizzando la funzione e il programma. Perché con la funzione sopra definita si riesce a computare un numero sensibilmente inferiore di valori rispetto a quanto consente il programma?
La risposta a questa domanda è un'occasione per ritornare a riflettere sulle sensibili differenze che, dal punto di vista computazionale, esistono tra la ricorsione e l'iterazione.

Terza fase
L'insegnante potrebbe chiedere agli studenti di cercare di determinare una dipendenza esplicita da *n* a partire dalla definizione per ricorrenza

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,2 \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

È possibile giustificare questa richiesta discutendo i vantaggi di una formula che dà $T(n)$ esplicitamente in funzione di *n*, rispetto a una funzione definita per ricorrenza.
Organizzando i dati nel seguente modo:

$T(1) = 0,8$
$T(2) = 0,2 \cdot T(1) + T(1)$
$T(3) = 0,2 \cdot T(2) + T(1) = 0,2 \cdot (0,2 \cdot T(1) + T(1)) + T(1) = 0,2^2 \cdot T(1) + 0,2 \cdot T(1) + T(1)$
$T(4) = 0,2 \cdot T(3) + T(1) = 0,2 \cdot (0,2^2 \cdot T(1) + 0,2 \cdot T(1) + T(1)) + T(1) = 0,2^3 \cdot T(1) + 0,2^2 \cdot T(1) + 0,2 \cdot T(1) + T(1)$

è possibile congetturare che si abbia:

$$T(n+1) = T(1) \cdot (0,2^n + 0,2^{n-1} + 0,2^{n-2} + \ldots\ldots + 0,2 + 1)$$

Il problema diventa quindi quello di determinare la somma $\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{10}\right)^i$.

Si può notare che, detta s la somma $0{,}2^n + 0{,}2^{n-1} + 0{,}2^{n-2} + \ldots\ldots + 0{,}2 + 1$, si ha che:

$0{,}2 \cdot s = 0{,}2^{n+1} + s - 1$. Ciò equivale a dire che $s = \dfrac{1-\left(\frac{2}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{10}} = \dfrac{10}{8}\left(1-\left(\dfrac{2}{10}\right)^{n+1}\right)$

La legge che lega esplicitamente $T(n+1)$ a n è quindi:

$$T(n+1) = 0{,}8 \quad \cdot \quad \frac{10}{8}\left(1-\left(\frac{2}{10}\right)^{n+1}\right)$$

Quarta fase

Si può far notare che il fenomeno preso in considerazione dipende da alcuni parametri:

- il tasso alcolemico presente nel sangue all'istante 0, diciamo a;
- la percentuale di tasso alcolemico filtrata dal fegato tra un'assunzione e l'altra, diciamo b;
- il tasso alcolemico che viene aggiunto a ogni assunzione di alcool, diciamo c.

Ciò vuol dire che il problema precedente può essere generalizzato nel seguente modo:

$$\begin{cases} T(1) = a \\ T(n+1) = b \cdot T(n) + c \end{cases}$$

Si può quindi assegnare ai gruppi di studenti il seguente problema:
Studiare come varia l'evoluzione della quantità tasso alcolemico presente nel sangue quando si modificano i parametri significativi (si suggerisce di provare a modificare un parametro alla volta, tenendo costanti gli altri due).
È interessante osservare se il lavoro degli studenti avviene a livello puramente sperimentale o se, invece, vengono tenute presenti tutte le conoscenze già acquisite. Per esempio, studenti che riuscissero a capire che la legge generale che esprime la dipendenza esplicita di $T(n)$ è del tipo:

$$T(n) = b^n a + c \cdot \frac{1-b^n}{1-b} \quad ,$$

probabilmente risolverebbero il problema proposto in breve tempo, dimostrando, inoltre, buone abilità di produrre e utilizzare forme di pensiero analogico che, in matematica, sono assolutamente importanti. Un modo per aiutare gli studenti a generalizzare il problema consiste nell'utilizzare il foglio elettronico per creare una tabella di dati con il modello definito ricorsivamente. Occorre sfruttare la potenzialità del foglio elettronico, che permette non solo di differenziare tra i riferimenti assoluti e quelli relativi, ma anche di stabilire delle relazioni matematiche tra essi, che possono essere copiate nelle colonne della tabella.

Infatti, scrivendo le relazioni $\begin{cases} T(1) = a \\ T(n+1) = b \cdot T(n) + c \end{cases}$ che definiscono il modello, è sufficiente copiare la seconda tenendo b e c come riferimenti assoluti e *T(n)* come riferimento relativo, in quanto variabile nel tempo. In tabella 4 è riportata tale situazione, con i valori numerici usati precedentemente. Per modificare il modello è sufficiente sostituire ai parametri a, b e c altri valori, ottenendo una nuova situazione.

TASSO ALCOLEMICO NEL SANGUE			
t	a	c	b
1	0,80	0,80	0,20
2	0,960000		
3	0,992000		
4	0,998400		
5	0,999680		
6	0,999936		
7	0,999987		
8	0,999997		
9	0,999999		
10	1,000000		
11	1,000000		
12	1,000000		

Tabella 4

Un rappresentazione grafica della situazione aiuta a vedere l'andamento del tasso nel tempo:

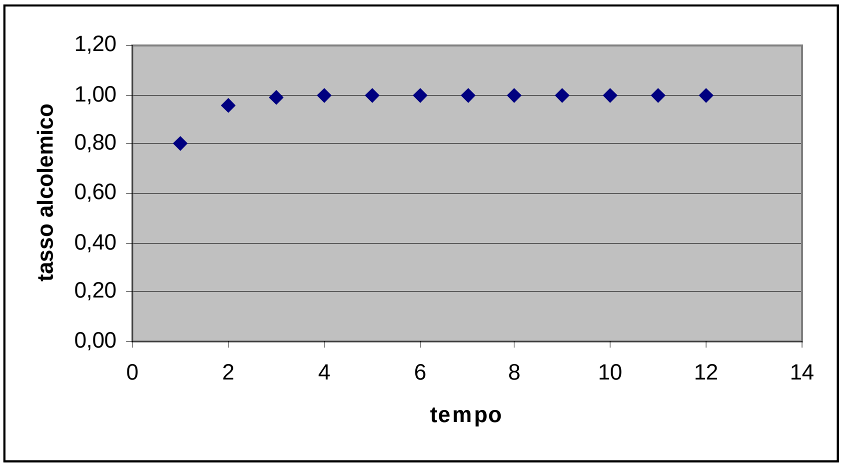


Figura 1

Il passaggio alla generalizzazione simbolica è facilitato dalla sostituzione progressiva della definizione ricorsiva per i primi 2-3 passaggi.

$T(2) = b \cdot T(1) + c = b \cdot a + c$

$T(3) = b \cdot T(2) + c = b \cdot (ba + c) + c = b^2 a + bc + c = b^2 a + c(b+1)$

….

Questi passaggi preparano alla formula iterativa generale, tramite l'applicazione della ricorsiva.

La forte somiglianza con l'attività "la concentrazione di un farmaco nel sangue" dovrebbe consentire all'insegnante di verificare quali fra le importanti tecniche e problematiche affrontate in attività di questo tipo sono state … "metabolizzate".

Per quel che riguarda la terza domanda, si potrebbe far notare che è possibile fare congetture sul tempo che separa le due assunzioni successive. Inizialmente, per esemplificare il modello, si potrebbe considerare l'ipotesi che le due assunzioni giornaliere avvengano a intervalli di tempo regolari, quindi ogni 12 ore. In tal caso, ricordando che si è chiesto di considerare le tre ipotesi:

- il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo nel sangue in un tempo trascurabile;
- una persona assuma sistematicamente una quantità di alcool tale da provocare a ogni assunzione, un aumento del tasso alcolemico di 0,8 g/l;
- il tempo che intercorre tra un'assunzione e la successiva è tale che il fegato riesce a smaltire l'alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduce, prima della nuova assunzione, dell'80%.

Si ha che l'evoluzione del tasso alcolemico può essere descritta dalla successione ricorsiva (ricordando che la riduzione oraria del tasso è del 30%):

$$\begin{cases} T(1) = 0,8 \\ T(n+1) = 0,7^{12} \cdot T(n) + 0,8 \end{cases}$$

Si può discutere con gli studenti della possibilità, in tal caso, di trovare una formula che dia $T(n+1)$ in funzione di n, lavorando per analogia con quanto visto in precedenza.
Si può quindi prendere in considerazione l'ipotesi più realistica che le due assunzioni avvengano alle ore dei pasti, per esempio alle 13 e alle 20, e vedere come cambia il modello e quali difficoltà ulteriori sorgono nel calcolo dei valori della successione.

Possibili sviluppi

- Dimostrazioni, per induzione, di alcune congetture avanzate dagli studenti o suggerite dall'insegnante.
- Approfondimenti sul problema delle approssimazioni e del controllo del risultato di calcoli in cui si fa un uso sistematico di approssimazioni.
- Le differenze finite per trovare la legge con cui è stata generata una successione di numeri (nel caso di leggi polinomiali o nel caso di leggi esponenziali).
- Critica sulle potenzialità e sui limiti del modello, anche con considerazioni di carattere fisico-chimico–medico–biologico.
- Effetti delle droghe e dell'alcool sull'organismo (in collaborazione, almeno, con l'insegnante di scienze e chimica).

Elementi di prove di verifica

Lungo una strada di campagna ci sono alcune case di abitazione a varie distanze dall'inizio della strada.

Abitazione	Distanza dall'inizio della strada ($\times$ 100 m)
A	2
B	4
C	5
D	8
E	14
F	18

A seguito delle richieste degli abitanti, l'amministrazione comunale dichiara di essere disponibile a porre un bidone per l'immondizia (e uno solo) lungo la strada e chiede agli abitanti in quale posizione lo desiderano.

Gli abitanti fanno una riunione per prendere questa importante decisione: alcuni propongono di disporre il bidone all'inizio della strada, altri alla fine, altri ancora in una posizione equidistante dalla prima e dall'ultima delle case della strada.
Finalmente prevale la proposta del Sig. Rossi, ingegnere in pensione, di ottimizzare la posizione del bidone posizionandolo in modo che la somma delle distanze tra esso e ciascuna delle case sia la minore possibile.
Si deve ora decidere dove va posizionato il bidone.

1 - Ha importanza la "forma" della strada (rettilinea, in salita, con curve, a tornanti…)? .

2 - Creare un modello geometrico della situazione (si indichi con x la distanza del bidone dal punto di riferimento, inizio della strada).

3 - Scrivere la funzione che permette di calcolare la somma delle distanze.

4 - Generalizzare la funzione al caso di n case, indicando con x_n la distanza di ciascuna di esse dal punto di riferimento.

5 - Cercare un modello analitico del problema nel caso della sola casa A:

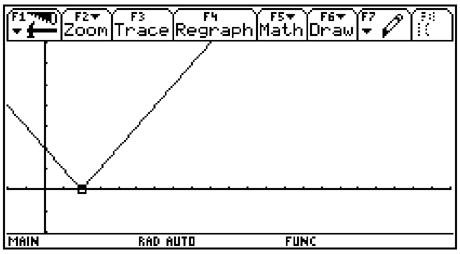


Figura 2

Interpretare il grafico. Qual è la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze in questo caso?

6 - Interpretare il grafico considerando le case A e B:

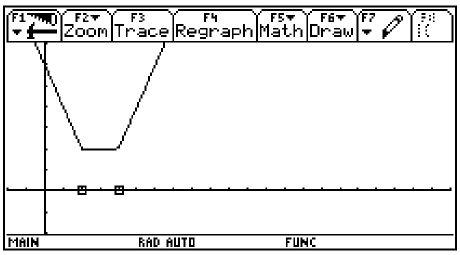


Figura 3

Qual è in questo caso la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze?

7 - Considerare ora il caso delle tre case, A, B, C:

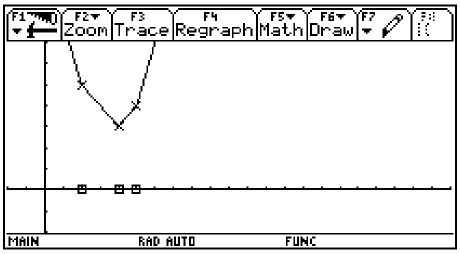


Figura 4

Qual è in questo caso la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze?

8 - Ecco la situazione nel caso di quattro case: A, B, C, D:

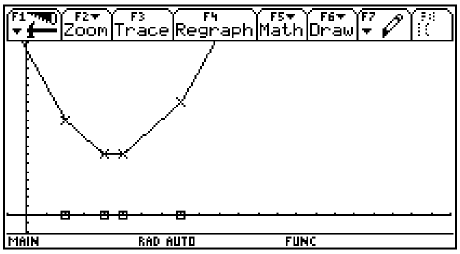


Figura 5

Qual è la posizione ottimale del bidone? Qual è il valore della somma delle distanze?

9 - Dare la risposta al problema proposto nel caso delle sei case A, B, C, D, E, F.

10 - Hanno importanza i valori delle distanze tra le case? La soluzione del problema cambierebbe se i valori fossero diversi?

11 - Dare la risposta al problema proposto nel caso di *n* case.

Osservazioni per l'insegnante

La verifica che segue può essere di qualche utilità per esemplificare la modellizzazione di un problema su due registri: quello algebrico e quello grafico-analitico.
Il problema, pur essendo molto semplice, non è di risoluzione immediata. La rappresentazione grafica, molto facile nel caso di una o due case, diventa più complicata da realizzare manualmente in casi più complessi: per questo motivo le capacità di modellizzazione offerte da uno strumento software risultano decisive per permettere l'esplorazione della situazione e arrivare alla soluzione del problema nel caso generale. Nelle immagini presentate prima è stata utilizzata una calcolatrice grafica.
Una volta realizzato e analizzato il modello, diventa poi facile arrivare alla dimostrazione rigorosa.
Potrebbe essere utile inoltre far notare agli studenti che il modello "geometrico" proposto nel quesito 2 è sostanzialmente di tipo "topologico" e mette in evidenza il fatto che l'unica informazione della quale è necessario tenere conto è l'ordine in cui sono disposte le case.