ARGOMENTARE, CONGETTURARE, DIMOSTRARE

Elenco delle attività

Dove andresti: dalla mamma o dalla fidanzata?

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in contesti problematici diversi. Distinguere tra eventi indipendenti e non.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. L'evento certo e l'evento impossibile. Significato della probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale.	Argomentare, congetturare, dimostrare. Dati e previsioni.	

Contesto
Vita reale.

Generalmente agli studenti sono prospettati problemi sulla probabilità in cui è proposta una situazione ben definita da riconoscere e dalla quale dedurre e calcolare la probabilità dell'evento. Gli studenti, quindi hanno già affrontato diversi casi semplici di calcolo della probabilità.
In questo caso, allo scopo di stimolarli al procedimento inverso cioè a una indagine sulle possibili situazioni che provocano quel risultato, è proposta la soluzione e si deve ricostruire il contesto partendo dalla probabilità dell'evento e da quella contraria.

Descrizione dell'attività
Prima fase
È proposto alla classe, divisa in piccoli gruppi, il seguente problema.

Problema: *Francesco ogni sera va a trovare la mamma, che vive in centro, oppure la fidanzata, che vive in periferia. Per essere più precisi, egli ogni sera va alla fermata dell'autobus in un momento qualsiasi e prende il primo autobus che passa (per il centro o per la periferia). Ciascuno dei due autobus arriva alla fermata ogni 15 minuti con perfetta regolarità (in base a un orario fissato). Ciò nonostante Francesco si reca dalla madre soltanto due volte al mese. Perché?*

L'insegnante, dopo aver lasciato ai gruppi 30 minuti per discutere, li invita a porsi domande che scaturiscono dall'analisi fatta del problema.
Gli studenti osservano che la frequenza delle visite alla mamma dipende, per la legge empirica del caso, dalla probabilità che ha Francesco di prendere l'autobus che va in centro.

La frequenza con la quale Francesco va dalla mamma è $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; ovviamente quella della visita alla fidanzata è $\frac{14}{15}$.

Quindi, si può attribuire alla probabilità di prendere l'autobus per il centro il valore $\frac{1}{15}$ e analogamente alla probabilità di prendere l'autobus per la periferia $\frac{14}{15}$.

A questo punto l'insegnante pone la domanda:
Come è possibile che ci siano 14 casi favorevoli di andare dalla fidanzata e solo uno dalla mamma?
Ovvero:
Qual è la situazione che può provocare questa disparità di casi, nell'ipotesi che Francesco arrivi sempre alla fermata in modo assolutamente casuale?

Allora gli studenti si concentrano sul comportamento dei due autobus.

Seconda fase
In questa fase, l'insegnante invita gli studenti ad osservare e analizzare le differenze tra le due diverse situazioni: centro e periferia.
Si avvia la discussione e si riportano di seguito gli interventi più significativi di un gruppo di studenti che hanno partecipato all'attività proposta.

Giovanni – *Entrambi gli autobus passano ogni quindici minuti*
Ester - *Quindi non c'è alcuna differenza!*
Marco - *Non solo, ma presumibilmente fanno lo stesso percorso*
Anna Chiara - *Però in senso opposto!*
Valerio – *Per fissare meglio le idee facciamo un esempio?*
A questo punto l'insegnante invita uno studente alla lavagna per concretizzare l'idea di Valerio.
Si offre Giulia, che scrive:

ORARIO	
Autobus per la periferia	Autobus per il centro
0.00	0.05
0.15	0.20
0.30	0.35
0.45	0.50

Tabella 1

L'insegnante invita gli studenti ad osservare, in questo caso particolare, quali sono i minuti favorevoli a prendere uno o l'altro dei due autobus.

Giulia risponde descrivendo la situazione mediante un grafico che simula l'orologio:

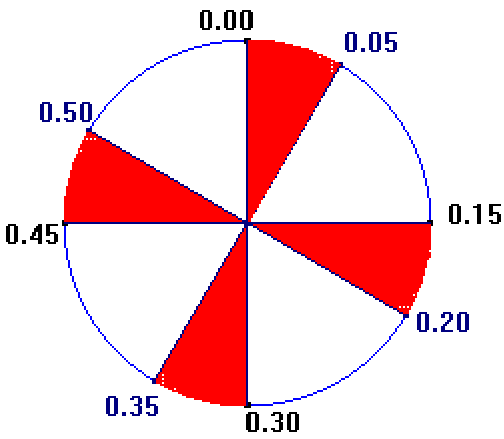


Figura 1

Dal grafico si osserva che, se Francesco arriva tra l'inizio dei primi quindici minuti e il quarto minuto, prende l'autobus per il centro perché è quello che passa per primo, mentre se arriva tra il quinto e il quattordicesimo minuto, prende l'autobus per la periferia; naturalmente questa situazione si ripete per l'ora intera.
Si può concludere che, in questo caso particolare, ci sono 5 casi favorevoli all'andare in centro e 10 casi favorevoli all'andare in periferia sui 15 casi possibili.

Caterina - *Allora, in questo caso, la probabilità che vada in centro è* $\frac{1}{3}$ *e quella che vada in periferia è* $\frac{2}{3}$.
Lorenzo - *E se invece l'orario delle partenze dell'autobus non iniziano alle 0.00 ?*
Giovanni - *Non cambia niente!*
Lorenzo - *E perché?*
Giulia - *Perché il disegno sarebbe solo ruotato, ma identico nelle proporzioni.*
Chiara - *Allora la probabilità dipende dallo sfasamento tra l'orario dell'autobus che va in centro rispetto a quello che va in periferia che in questo caso è di 5 minuti.*

A questo punto l'insegnante chiede:
Qual è la differenza tra i due orari per avere 14 possibilità di arrivare a prendere l'autobus che va dalla fidanzata?

Ester - *Francesco ha 14 possibilità di arrivare in modo da prendere l'autobus che va in periferia e solo una possibilità di prendere l'autobus che va in centro (ovvero appena è passato quello che va in periferia); se l'autobus per il centro passa un minuto dopo di quello della periferia.*

Come spesso accade, si evince che gli studenti (e non solo!), hanno la necessità di visualizzare la situazione attraverso casi particolari; difficilmente sarebbero arrivati alla soluzione cercando una "formula" tra quelle conosciute. Dal dialogo riportato si osserva che gli studenti non solo sono stati in grado di produrre congetture, sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti e di confrontarle con quelle prodotte dai compagni, ma anche di saper utilizzare opportunamente il linguaggio naturale e quello simbolico.

Possibili sviluppi
Ci si potrebbe chiedere se ha senso, in un percorso ciclico, dire chi passa prima.

Elementi di prove di verifica

1. Risolvere il seguente problema giustificando correttamente le risposte.

Un contrabbandiere spera di evitare l'arresto da parte della Finanza mescolando, in un contenitore, scatole contenenti merce illegale con scatole contenenti merce legale. Le scatole sono tutte uguali come dimensione ma di diverso colore. Soltanto il 5% delle scatole contiene merce illegale su un totale di 400 scatole. La Finanza controlla 5 delle scatole che sono nel contenitore:

- qual è la probabilità di acciuffare il contrabbandiere?
- qual è la probabilità che almeno 3 scatole contengano merce illegale?
- qual è la probabilità che esattamente 3 scatole contengano merce illegale?

Sapendo che 100 scatole sono verdi, che 8 delle verdi contengono merce illegale mentre le rimanenti sono rosse, calcolare:

- la probabilità che un finanziere scegliendo a caso una sola scatola ne trovi una verde contenente merce illegale;
- la probabilità che il finanziere trovi una scatola contenente merce illegale sapendo che quella scelta è rossa.

2. Su 7 canali televisivi, in una determinata ora, 3 trasmettono un film, 2 un reality show, 2 una fiction.

- Accendendo un televisore, qual è la probabilità che il canale scelto trasmetta un film o una fiction?
- Supposto che quel canale trasmetta un film o una fiction, qual è la probabilità che nessuno dei due successivi canali trasmetta un film?

3. In un armadio ci sono 10 cassetti (5 sovrapposti ad altri 5). Di questi 3 contengono solo calzini, 2 calzini e biancheria, 5 solo biancheria.

- Aprendo contemporaneamente i primi 3 cassetti, qual è la probabilità che almeno uno contenga sia calzini sia biancheria?
- Supposto che almeno uno dei tre cassetti aperti contenga calzini e biancheria, qual è la probabilità che i successivi due cassetti aperti contemporaneamente contengano entrambi solo calzini?

0; n, n +1, … ∞

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Applicare in semplici casi il principio d'induzione. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria.	Schemi di ragionamento. Sistemi assiomatici in vari contesti. La potenza di numeri positivi con esponente razionale. Algoritmi di approssimazione. Esempi di funzioni e dei loro grafici.	Argomentare, congetturare, dimostrare. Numeri e algoritmi. Relazioni e funzioni. Laboratorio di matematica.	

Contesto
Dimostrazioni.

L'approfondimento si situa nel contesto delle dimostrazioni, che è tipico per riflessioni al termine della scuola secondaria.
In continuità con l'attività presentata su Matematica 2003 (Matematica 2003, Argomentare, congetturare, dimostrare, Tasselli del domino e induzione) si intende illustrare, in maniera più rigorosa, a partire dalla risoluzione di problemi, il procedimento che utilizza la dimostrazione per induzione.

Descrizione dell'attività
Se si introduce il sistema assiomatico di Giuseppe Peano per i numeri naturali è opportuno partire dal 5° assioma per analizzare il principio di induzione matematica espresso in forma colloquiale (vedi Nota finale), discutere della sua formulazione e anche delle sue applicazioni. Infatti la lettura del principio d'induzione è linguisticamente complessa e pertanto difficile da memorizzare e da applicare. Una difficoltà è dovuta per esempio all'uso di due implicazioni "se…allora" una delle quali è annidata nell'altra.

Prima fase
È proposto alla classe, suddivisa in piccoli gruppi, il seguente problema, la cui tipologia non rientra in quelle dei problemi usualmente dati a scuola. Questo può favorire la varietà di proposte nell'approccio risolutivo.

Problema n 1: *In una città si vuole mettere un semaforo ad ogni incrocio. Vi sono n strade; ogni strada si interseca sempre con ogni altra strada ed inoltre non vi sono piazze, per cui in ogni incrocio si intersecano sempre due e soltanto due strade (ogni incrocio è un quadrivio).*
Attraverso un ragionamento di tipo induttivo, formulate una congettura per stabilire quanti semafori sono necessari e dimostrate quindi la formula.

Dopo una mezz'ora di discussione, l'insegnante ascolta gli interventi, per chiarimenti o altro, degli alunni e propone di valutare se il problema proposto può essere equivalente ad un altro con il seguente enunciato in forma geometrica:

Quanti sono i punti di intersezione di n rette tali che non vi siano rette parallele e in nessun punto si intersechino più di due rette?

Si invitano gli studenti a valutare l'enunciato proposto utilizzando le seguenti figure:

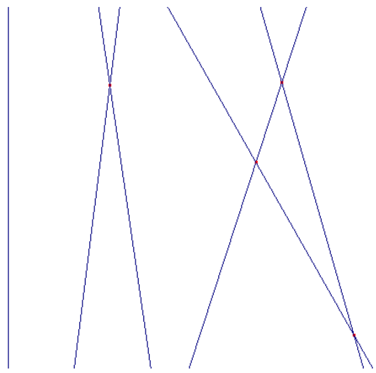


Figura 1

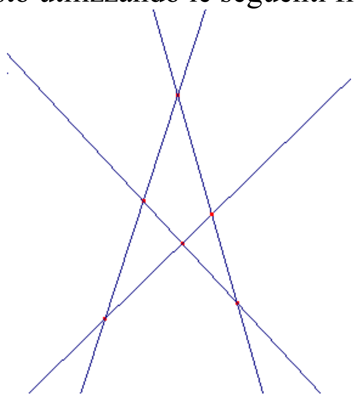


Figura 2

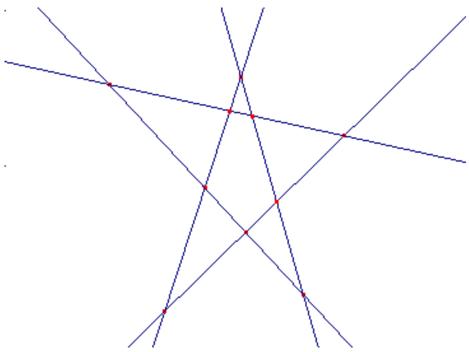


Figura 3

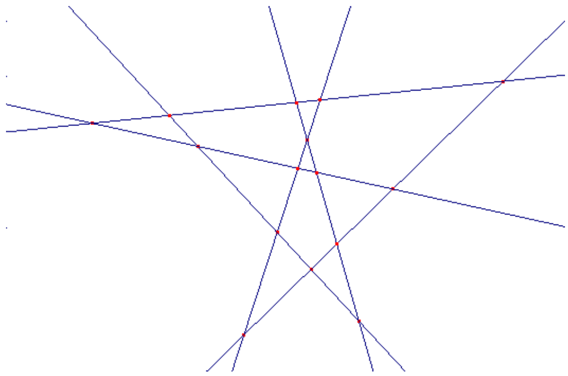


Figura 4

N° rette	1	2	3	4	5	6
N° Punti d'intersezione	0	1	3	6	10	15

Tabella 1

Gli studenti devono giungere, analizzando i casi, alla formulazione di una regola (ricorsiva) da dimostrare con il procedimento per induzione. Probabilmente gli studenti formuleranno regole anche errate.

L'intervento dell'insegnante diviene pertanto fondamentale nel momento della comprensione del seguente fatto geometrico: date (n-1) rette esiste una retta che le interseca in (n-1) punti distinti. Il fatto geometrico va poi formalizzato con la regola ricorsiva:

$$s_n = (n-1) + s_{n-1} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ...1 = \frac{n(n-1)}{2}$$ (somma dei primi (n-1) numeri naturali).

L'attività prosegue con la proposta di un altro problema definito in un contesto diverso.
Viene affrontato dagli studenti singolarmente; la risoluzione proposta utilizza un software di calcolo simbolico (ovviamente anche altri software possono essere utilizzati).

Problema n. 2: *E' data la funzione* $f(x) = 2^x - 2x - 1$.

a) *Studiatela e disegnatene il grafico in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy.*
b) *Descrivete una procedura che consenta di trovare gli zeri della funzione e applicatela per calcolare gli zeri con una precisione di 0,01.*
c) *Individuate il minimo valore di* $n \in N_0$ *per il quale vale* $2^n > 2n + 1$.
d) *Dimostrate per induzione la disuguaglianza precedente.*

Lo studio della funzione comporta una risoluzione approssimata dell'equazione $2^x - 2x - 1 = 0$ per trovare gli zeri della funzione e per determinarne il segno. Per via grafica, utilizzando i grafici delle funzioni $y = 2^x$ e $y = 2x + 1$, si trova uno zero in x=0 e si localizza l'altro nell'intervallo [2,3]

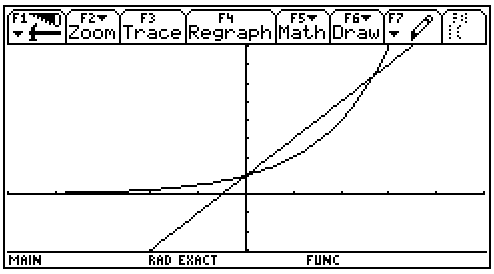


Figura 5

Si può introdurre intuitivamente il metodo di bisezione e far determinare così ai ragazzi lo zero presente nell'intervallo [2,3]. Si crea una funzione che realizza l'algoritmo di bisezione e la si implementa su una calcolatrice programmabile, ad esempio nella codifica seguente:

```
bisez(x1,x2,p)
Func
Local xm,n
0→n
x1→xm
While abs(x1-x2)≥p and f(xm)≠0
     (x1+x2)/2→xm
  If f(xm)*f(x2)<0 Then
                   xm→x1
                   Else
                   xm→x2
  EndIf
n+1→n
EndWhile
If f(xm)≠0 Then
        (x1+x2)/2→xm
EndIf
approx(xm)
EndFunc
```

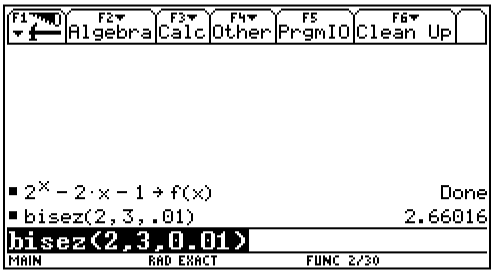


Figura 6

Per rispondere alla domanda c) si disegna il grafico delle due successioni $u1(n) = 2^n$ e $u2(n) = 2n + 1$:

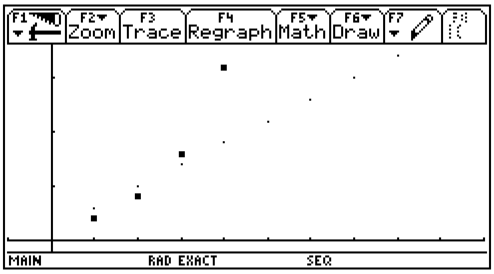
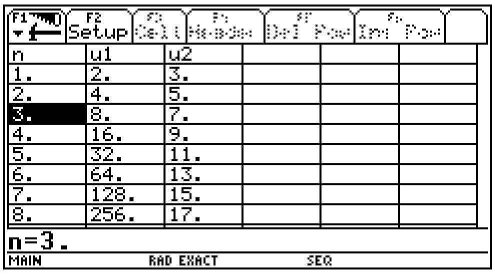


Figura 7



n	u1	u2
1.	2.	3.
2.	4.	5.
3.	8.	7.
4.	16.	9.
5.	32.	11.
6.	64.	13.
7.	128.	15.
8.	256.	17.

Figura 8

Dal grafico, ma soprattutto dalla tabella si trova che il minimo valore di *n* che soddisfa la disuguaglianza $2^n > 2n + 1$ *è n*=3.
Nel contesto della dimostrazione per induzione il valore n=3 rappresenta il valore iniziale; bisogna quindi dimostrare la disuguaglianza per ogni valore maggiore o uguale a tre.

Seconda fase

Analizzando le difficoltà emerse nell'affrontare i precedenti problemi, l'attenzione va sicuramente posta su alcune questioni abbastanza importanti. Gli studenti sono abituati ad effettuare dimostrazioni (soprattutto dirette) nelle quali è severamente vietato usare una parte della tesi tra le ipotesi. In questo caso sembra invece (con una lettura superficiale!) che si faccia proprio questo tipo di errore. Vale la pena sottolineare che nell'enunciato del principio d'induzione non si afferma affatto che la proprietà in oggetto deve essere vera per un generico n, ma solo che "ammessa la verità della proprietà per il termine ennesimo segue la verità della proprietà per il termine successivo".
In questa fase di riflessione si ritorna anche sulla validità del principio d'induzione matematica come metodo dimostrativo assicurata dal 5° assioma di Peano, dove la validità di una proposizione riferita ad un insieme infinito è assicurata da due soli fatti: una verifica e una dimostrazione! La potenza di questo schema di ragionamento sta nel fatto che, pur avendo a che fare globalmente con un'infinità di proposizioni corrispondenti agli infiniti valori di n, la deduzione della verità di ogni singola proposizione comporta solo un numero finito di passi.
Si conclude questa fase prettamente teorica con una ricerca su Internet di formulazioni del principio di induzione matematica per scegliere una versione condivisa che risulti soprattutto utile operativamente. Il seguente schema è stato elaborato da un gruppo di studenti di una classe quinta, basandosi su un articolo trovato in Internet.

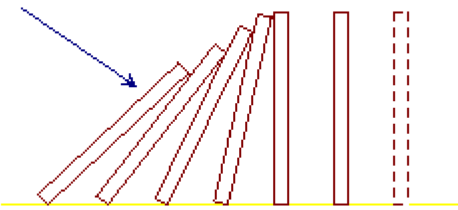
Principio di induzione matematica

La proposizione *P(n)* si dimostra tramite i due passi:

(a) base dell'induzione: la proposizione è vera per n = 0;

(b) passo induttivo: supponi che la proposizione sia vera per n; dimostra che la proposizione è vera per n +1.

Allora la proposizione *P(n)* è vera per tutti i numeri naturali.



Quello che accade con la dimostrazione per induzione può essere visualizzato con l'immagine di una successione di pezzi di domino, posti verticalmente in equilibrio ad una distanza minore della loro altezza. Facendo cadere il primo della fila, tutti gli altri cadranno.

Se invece si sa che la proposizione *P(n)* è vera a partire da un naturale qualunque m (come nel secondo problema proposto) si ha:

Principio di induzione matematica (seconda formulazione)

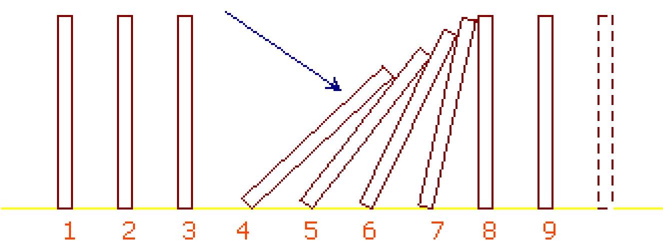
La proposizione si dimostra tramite i seguenti due passi:

(a) base dell'induzione: la proposizione è vera per un numero naturale m;

(b) passo induttivo: supponi che la proposizione sia vera per un generico numero naturale dell'insieme degli n>m; dimostra che la proposizione è vera per n +1.

Allora la proposizione è vera per tutti i numeri naturali non inferiori a m.

Nella dimostrazione per induzione abbiamo, dunque, un *passo base* e un *passo induttivo*.



In termini dei pezzi di domino, questa variante equivale a far cadere non il primo pezzo, ma uno successivo.

<u>Terza fase</u>
Si ritorna ad una fase operativa proponendo agli studenti alcune dimostrazioni di proposizioni già formalizzate e da dimostrare applicando il principio d'induzione. Infatti l'uso comune del principio è proprio quello per dimostrare formule già note!
Si consiglia di proporre in classe i seguenti esercizi.

1) *Provare che se a è un reale maggiore di -1, allora* $(1+a)^n \geq 1 + na$, $n \in \mathbf{N}$ *(Disuguaglianza di Bernoulli).*

Se n = 1, si ha 1 + a ≥ 1 + a, che è vera.

Successivamente usare le seguenti uguaglianze e disuguaglianze:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

2) *Sia P(n) l'affermazione:*

$$1+2+...+n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

- *Provare che se P(k) è vera per un fissato valore k, anche P(k+1) è vera*
- *P(n) è falsa per ogni n; ciò risulta provando che per ogni n vale l'affermazione Q(n):*

$$1+2+...+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2.$$

L'insegnante consiglia di fissare un k > 1 e supporre vera P(k).
Considerando ora la situazione che si presenta per k+1 si ottiene:

$$(1+2+...+k)+(k+1) = \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) = \frac{1}{8}(2k+3)^2 = \frac{1}{8}(2(k+1)+1)^2$$

Dunque vale P(k+1).

L'insegnante ora propone di controllare la proprietà per alcuni valori di n tra i quali n=1. Si vede così facilmente che la proprietà è falsa per ciascuno degli n provati.
Che cosa è venuto a mancare nella dimostrazione? La verifica del fatto che per n=1 la proprietà è vera (infatti è falso che 1 = 9/8).
La disuguaglianza 1 < 9/8 prova che vale Q(1). Si può dimostrare allora che, se è vera Q(k), è vera anche Q(k+1). Si ha pertanto:

$$(1+2+...+k)+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) = \frac{1}{8}(2k+3)^2 = \frac{1}{8}(2(k+1)+1)^2$$

Si può così concludere che Q(n) è vera per ogni n: questo basta per provare che P(n) è falsa per ogni n.

3) *Sia P(n) l'affermazione: in qualunque insieme di n persone tutte hanno la stessa età.*
Provare per induzione che la proprietà P(n) è vera per ogni n.
Dunque tutte le persone hanno la stessa età.

La proprietà è vera per n=1, perché ognuno ha la stessa età di se stesso. Supposta vera la proprietà per un insieme di n persone, si consideri un insieme di n+1 persone, aggiungendone 1 alle prime n persone. Immaginiamo di rappresentarle in fila:

* * * * * *
1, 2, 3, …, n-1, n, n+1
* * * * * *

Considerando le prime n persone (con * in alto) esse hanno tutte la stessa età, ma anche prendendo le ultime n (con * in basso) esse hanno la stessa età. Poiché le persone dalla seconda all'ennesima sono le stesse nei due raggruppamenti, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza anche la (n + 1)-esima persona ha le stesse età delle altre e della prima.
Qui l'errore nasce dal fatto che il passo induttivo da n a n+1 non vale per n=1 in quanto non si può usare la proprietà transitiva in un insieme di due persone.

Si fanno adesso due riflessioni conclusive:

1. nella dimostrazione per induzione tutti i passi indicati sono essenziali!
2. quale significato ha il termine "affermazione"?: si è portati a pensare che un'affermazione sia necessariamente vera mentre in realtà …

Elementi di prove di verifica

1. Si considera un problema analogo al secondo proposto nella prima fase, con la funzione $f(x) = 2^x - x^2$ e quindi si dimostra che la disuguaglianza $2^n > n^2$ è vera da un determinato valore di n in poi.

2. Sia P(n) l'affermazione: ogni numero naturale n è uguale al suo successivo n +1

   - Provare che se P(k) è vera per un fissato valore k, anche P(k+1) è vera
   - Possiamo affermare che P(n) è vera per ogni n?
   - È stato utilizzato in maniera corretta il principio d'induzione?
   - Per provare che la proposizione è falsa per ogni n è sufficiente verificare ciò per alcuni valori di n?
   - Facendo riferimento ad uno degli esercizi svolti in classe, dimostrare che la proprietà è falsa per ogni n, cercando di enunciare e dimostrare una nuova proprietà.

3. Provare che, per n>0:

$$n! \geq 2^{n-1}$$

4. Provare che, per $n > 1$:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}.$$

5. Provare che, per $n > 1$:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

6. Dimostrare che il numero delle diagonali di un poligono convesso di n lati è $\frac{n(n-3)}{2}$.

Nota per il docente. *Assiomi di Peano per l'Aritmetica*
Si formulano in un linguaggio che contiene i seguenti simboli:
0 (costante zero)
S (successivo di: funzione ad un argomento)
N (insieme dei naturali)
ε (appartiene a)
x, y, z,...(variabili numeriche)
P, Q, R, ... (variabili di insiemi di numeri)

Assioma 1. $\mathbf{0}\ \varepsilon\ \mathbf{N}$ (zero è un numero)
Assioma 2. $x\ \varepsilon\ \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{S}x\ \varepsilon\ \mathbf{N}$ (**N** è chiuso rispetto alla funzione **S**)
Assioma 3. $\mathbf{0} \neq \mathbf{S}x$ (zero non è successivo di alcun numero)
Assioma 4. $\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y$ (**S** è iniettiva)
Assioma 5. Per ogni insieme *P*: $[(\mathbf{0}\ \varepsilon\ P)\ \&\ \forall x(x\ \varepsilon\ P \rightarrow \mathbf{S}x\ \varepsilon\ P)] \rightarrow \forall x(x\ \varepsilon\ \mathbf{N} \rightarrow x\ \varepsilon\ P)$
(se *P* è un insieme induttivo, cioè contiene lo zero ed è chiuso rispetto alla funzione S, allora è un sottoinsieme di **N**; in altri termini: **N** è il minimo insieme induttivo)

L'assioma 5 è il principio di induzione matematica: se una proprietà (insieme) *P* è soddisfatta (contiene) dallo zero e, supposto che sia soddisfatta da un qualunque numero x allora è soddisfatta anche da **S**x, ne segue che è soddisfatta da tutti i numeri.

Maiuscole e minuscole

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria. Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi. I predicati. Schemi di ragionamento. Sistemi assiomatici in vari contesti.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare</u> Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto

Sistemi assiomatici.

Un sistema assiomatico è formale in quanto è formulato in un linguaggio rigorosamente definito dal punto di vista sintattico (le formule ammesse, le regole formali di derivazione). Il senso del sistema formale sta anche nelle possibili interpretazioni (semantica). È opportuno distinguere i due aspetti, anche se è solo dal loro intreccio che si può generare una sua completa comprensione. Da un lato il versante sintattico evita di utilizzare ipotesi implicite date per scontate, tuttavia mai dimostrate, ed evita anche le ambiguità del linguaggio naturale. Ciò comporta una maggiore attenzione alle procedure di deduzione. Dall'altro lato, gli aspetti semantici offrono i contesti da cui tali procedure estraggono il loro significato. Si tratta di un rapporto dialettico tra i due poli, che complessivamente deve essere colto dagli allievi con le opportune gradualità.

Descrizione dell'attività

<u>Prima fase</u>

Si tratta di lavorare con un sistema formalizzato per la produzione di parole (stringa di simboli dell'alfabeto). È dato un elenco di parole scritte con lettere minuscole e maiuscole

es: *GatTo eleNCo Se sE aLLa*

È consentito modificare l'insieme iniziale di parole date solamente applicando le seguenti regole:

REGOLA 1 Si cancellano (una o più) occorrenze multiple della stessa lettera in una stessa parola.

Es: da eleNCo si ottiene *elNCo* per cancellazione della seconda "e" (è indifferente quale delle due si cancella);

da *GatTo* non si può ottenere nulla, perché "*t*" e " *T* "sono considerate diverse;

da *aLLa* si ottiene *aLL* oppure *aLa* e successivamente *aL.*

REGOLA 2 Prese due parole una con la maiuscola e una con la minuscola della stessa lettera, si eliminano queste due lettere e si uniscono i restanti spezzoni. Se abbiamo *Q , q* diciamo che abbiamo la "parola vuota".

Es: *eleNCo, aL* danno *eeNCoa* da cui ancora *eNCoa* per la regola1

Se , sE danno *eE*

Che ruolo ha la parola vuota? Sarà più facile attribuirle un significato alla luce della interpretazione del sistema data in seguito.
Si pone il seguente problema fondamentale: *dato l'elenco di parole è ottenibile la parola vuota*?

Esempio 1

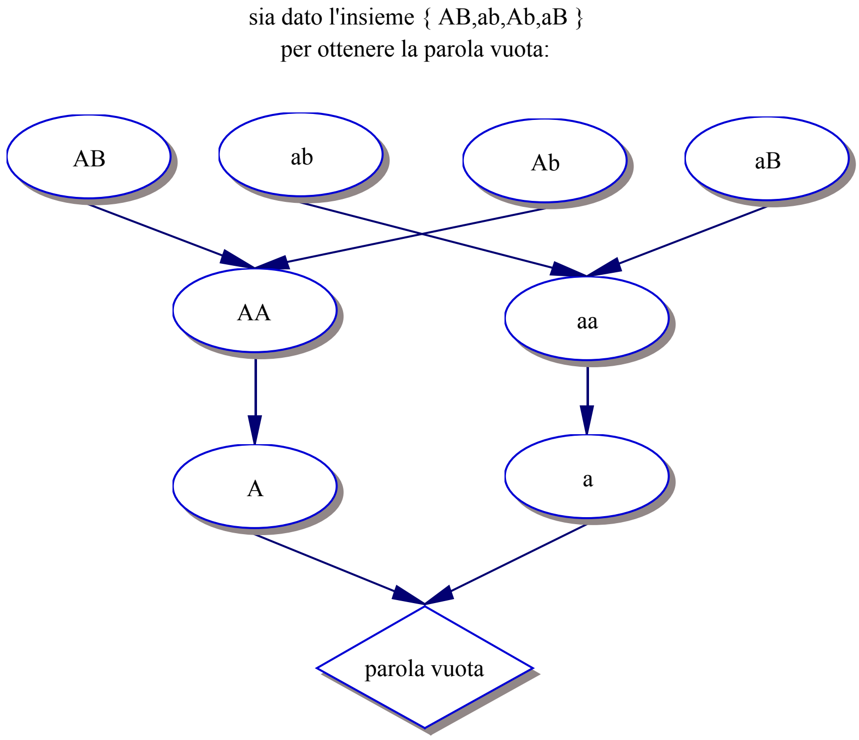


Figura 1

Esempio 2

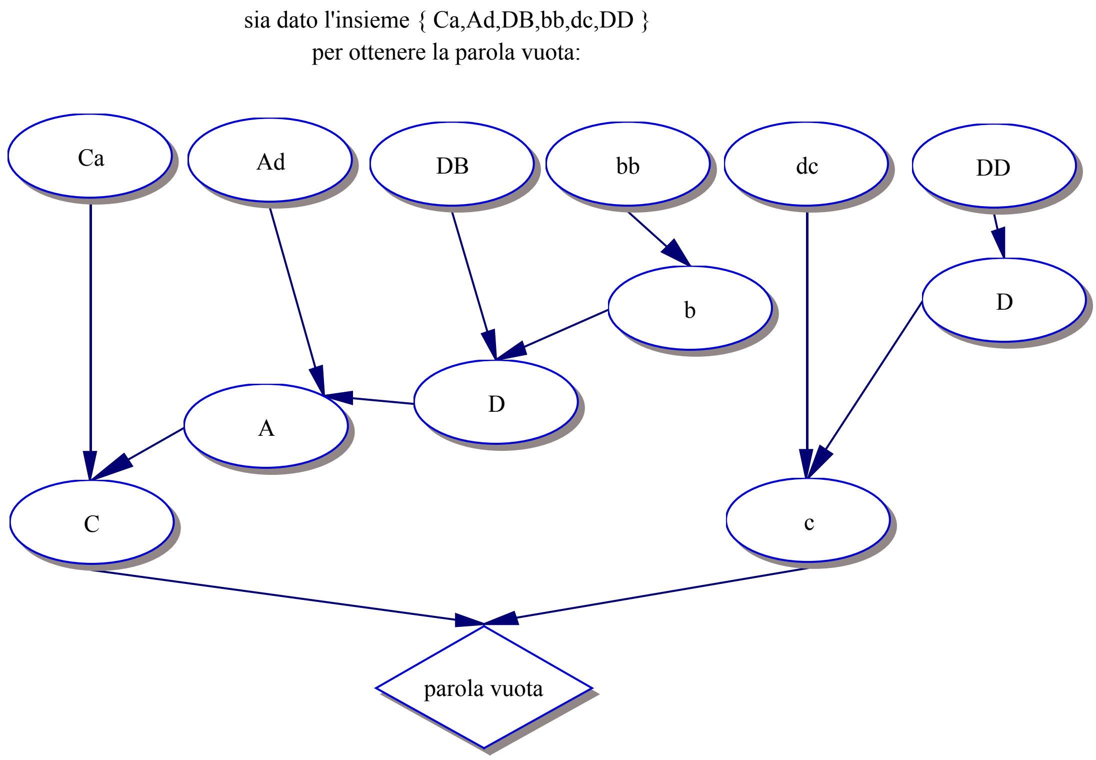


Figura 2

Esempio 3

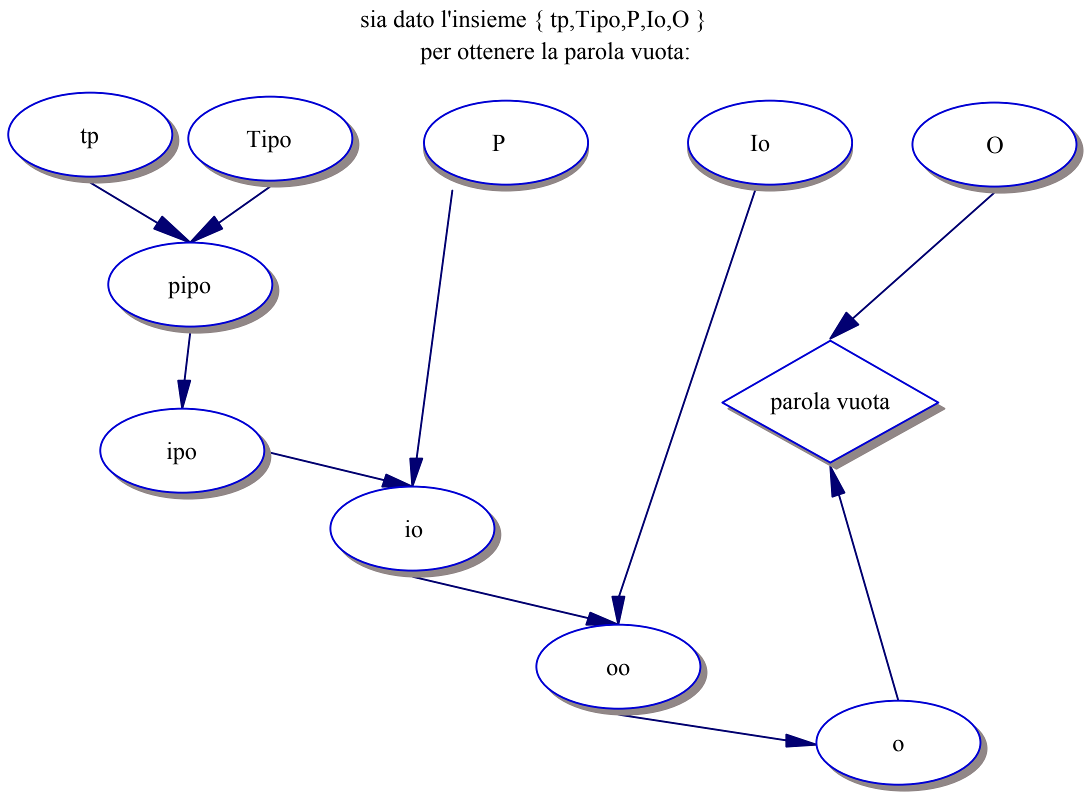


Figura 3

Si propone agli alunni, dopo aver presentato le regole del gioco, di esercitarsi nella produzione di insiemi di parole che producono la parola vuota. Nei primi esempi sono stati utilizzati insiemi di parole con meno di tre lettere perché con questi insiemi è più facile decidere se la parola vuota è ottenibile o no. Risulta banale il problema nel caso in cui l’insieme è formato da parole ciascuna di una sola lettera.

Es: { A, C, b,e } non dà la parola vuota
mentre {A, C, b, c } dà la parola vuota.

<u>Seconda fase</u>

L’insegnante propone la seguente interpretazione del sistema formale in questione:

A = proposizione A
a = proposizione ¬ A (non A)
XY = X v Y
X,Y = X ∧ Y

La clausola dell’esempio 1

AB, Ab, aB, ab

equivale, nella interpretazione data, all’espressione seguente

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

È facile verificare con le tavole di verità che questa proposizione è sempre falsa, cioè è una contraddizione. A questo punto possiamo ripensare alla produzione della parola vuota come alla presenza di una contraddizione nel sistema delle proposizioni prese in considerazione. Infatti la clausola dell'esempio 1 {*AB, Ab, aB, ab*} produce la parola vuota e il suo equivalente è una contraddizione.
Si può provare che la nota proposizione $A \vee \neg A$ è una tautologia provando che la sua negazione è una contraddizione in quanto applicando le regole del gioco produce la parola vuota.
Infatti la negazione di $A \vee \neg A$ è $\neg(A \vee \neg A) = \neg A \wedge \neg \neg A = \neg A \wedge A$;
$\neg A \wedge A$ equivale ad *a,A* che dà per la regola 2 la parola vuota. Si dice in tal caso che la clausola è insoddisfacibile.

Facendo qualche richiamo sulla logica degli enunciati si ricorda agli alunni che la proposizione $H \rightarrow T$ è logicamente equivalente alla proposizione $\neg H \vee T$. Ad es., dire "se manca la benzina il motore si ferma" equivale a "non manca la benzina oppure il motore si ferma".

Il metodo di refutazione consiste nel porsi come obiettivo la dimostrazione di un enunciato del tipo $H \rightarrow T$, cioè se H allora T. Per fare questo si segue la seguente strategia :

a) Si cerca di refutare l'enunciato $H \rightarrow T$, cioè di trovare una interpretazione che lo falsifichi (cioè in cui tale enunciato risulti falso).
b) Ciò equivale a trovare una interpretazione che soddisfi $H \wedge \neg T$ (equivale a dire che l'implicazione $H \rightarrow T$ risulta falsa).
c) Per fare ciò si segue il metodo della ricerca della parola vuota nel gioco delle maiuscole e minuscole, cioè si prova se le regole applicate alla clausola { H, t } producono la parola vuota (clausola insoddisfacibile). Ciò equivale a dire che non si può refutare $H \rightarrow T$ cioè che $H \rightarrow T$ è vera in qualunque interpretazione. Dunque $H \rightarrow T$ è un teorema. Nel caso invece in cui non si produca la parola vuota la clausola non è refutabile quindi $H \rightarrow T$ non è un teorema.

E' necessario fare due osservazioni: 1- si definisce soddisfacibile una clausola quando esiste una interpretazione (nel caso del calcolo preposizionale una assegnazione di valori di verità) tale che la clausola stessa risulta vera in base a quella interpretazione; e quindi risulta insoddisfacibile se nessuna interpretazione la rende vera. 2- nella situazione precedente spesso H non è una sola parola ma un insieme di parole (cioè ci sono più ipotesi), ad esempio $H_1, H_2, H_{3,\dots,}H_n$. In tal caso H diventa $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \dots \wedge H_{n.}$

Segue un esempio sul metodo di refutazione:

$$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \quad \rightarrow \quad [A \wedge B \rightarrow C]$$

$$[\neg A \vee (B \rightarrow C)] \quad \wedge \quad \neg [A \wedge B \rightarrow C]$$

$$[\neg A \vee \neg B \vee C] \quad \wedge \quad [A \wedge B \wedge \neg C]$$

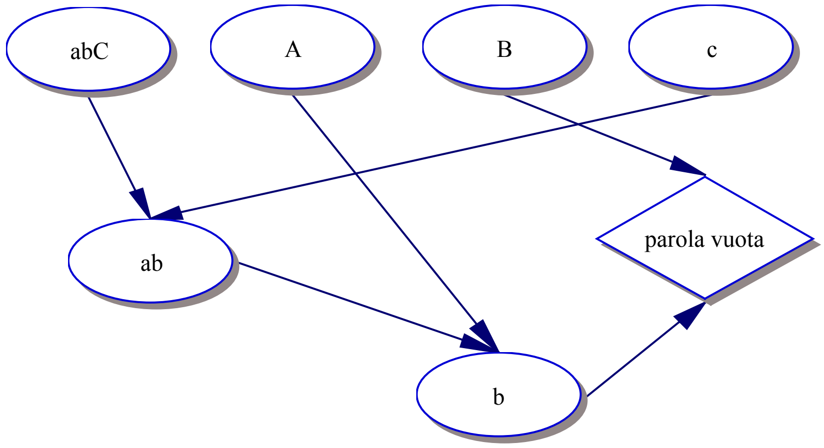


Figura 4

Il metodo di refutazione proposto è alla base dell'algoritmo usato nel Prolog per la dimostrazione automatica. In particolare tali linguaggi sono usati per fare diagnosi mediche a partire dai data base relativi ai sintomi e ai risultati degli esami dei pazienti.
Può essere interessante per gli studenti una ricerca su Internet sulle dimostrazioni automatiche.

<u>Terza fase</u>
Si ha l'opportunità adesso di fare una riflessione su alcuni termini "noti" alla luce dell'attività fin qui svolta : per esempio

- stringa
- teorema
- assioma
- regola di inferenza
- derivazione

Elementi di prove di verifica

1. Dato l'insieme { se, Sul, il, I,uu, EE } completa il seguente schema per ottenere la parola vuota

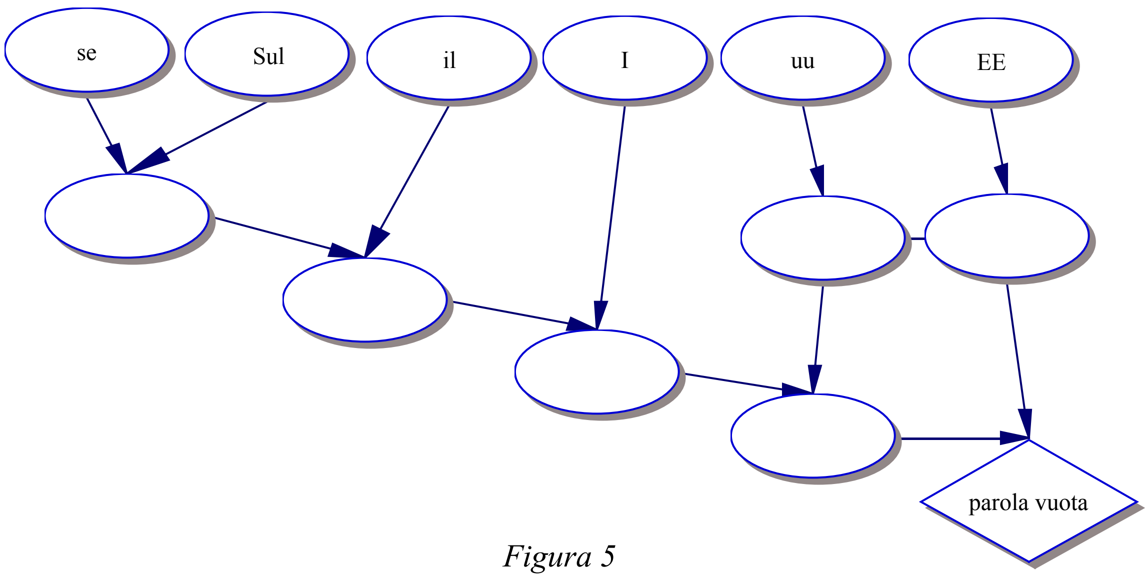


Figura 5

2. Si propone un gioco, analogo al precedente, per la produzione di stringhe in cui le uniche lettere consentite sono M, I e U.

L'unica stringa di cui si è in possesso all'inizio del gioco è MI.

Si possono produrre altre stringhe solo rispettando le seguenti regole:

I. Se si possiede una stringa che termina con una I, si può aggiungere una U alla fine.
II. Si abbia Mx. Allora si può includere nella collezione Mxx (x indica una stringa)
III. Se in una stringa c'è III si può costruire una nuova stringa mettendo U al posto di III.
IV. Se all'interno di una delle stringhe c'è UU si può eliminarlo

Scopo del gioco: ottenere le stringhe MIUIU MIIUIIU MIU.

Si possono fare delle osservazioni sulle stringhe che si sono prodotte (iniziano tutte per M,…), cercando anche di capire quali stringhe non si potranno ottenere; saranno utili anche delle osservazioni sulle regole per vedere cosa si può fare e cosa non si può fare.

Riferimenti bibliografici

Graham, R.L.; Knuth, D.E.; Patashnik, O, (1992), *Matematica discreta*, Hoepli: Milano.

Lolli, G., (1978), *Lezioni di logica matematica*, Boringhieri: Torino.

MPI, (1996), *L'insegnamento della Logica*, Maglie, L.G. "Capece".

MPI, (1997), *I temi nuovi nei programmi di Matematica (Probabilità, Statistica, Logica, ...) e il loro inserimento nel curriculum*, Collana "Quaderni", n. 26/2, Lucca, L.S. "A.Vallisneri".

MPI, (1999), *Probabilità e Statistica nella Scuola liceale,* Collana "Quaderni", n. 28, Lugo di Romagna, L.S. "G. Ricci Curbastro".