

Il piacere di fare matematica

di Donatella Merlo

Non è vero che esiste una predisposizione alla matematica che sia prerogativa di pochi eletti, mentre è purtroppo vero che è più facile sentir dire “Io di matematica non ho mai capito niente” anziché “Mi piace fare matematica”. Sono convinta però che la responsabilità di questa situazione non risieda tanto nelle doti più o meno innate di ciascuno di noi, quanto piuttosto nella fortuna o meno di aver incontrato nel proprio cammino scolastico bravi insegnanti di matematica.

Io ho avuto questa fortuna: ho imparato la matematica da insegnanti che oltre a essere bravi a insegnare riuscivano a trasmettere anche la loro passione per la materia.

Per insegnare bene una materia bisogna sicuramente amarla. Ma non basta. Occorre anche una buona padronanza dei contenuti e la capacità di entrare in risonanza con le conoscenze ancora in embrione nella mente degli allievi. Cerchiamo di capire perché.

Ciascuno di noi quando si trova in una situazione di apprendimento deve poter collegare in qualche modo le nuove conoscenze con quelle che già possiede: questo permette di capire.

Un bravo insegnante dovrebbe tradurre in metodo questo dato di fatto e organizzare gli interventi didattici intorno ad attività che consentano agli allievi di trovare quella risonanza, ma anche di trarre la motivazione necessaria, per compiere l'inevitabile sforzo dell'imparare, dalla consapevolezza di affrontare una sfida, in primo luogo con se stessi.

L'unico modo per creare le condizioni necessarie allo sviluppo di questo processo è mettere l'allievo in un contesto che richieda la risoluzione di un problema. Il problema deve essere tale da incorporare i nuovi saperi in modo naturale, affinché l'allievo trovi parole, gesti, strumenti che lo conducano alla soluzione. Questo processo però non deve avvenire in solitudine ma in una situazione sociale, di interazione e di scambio, passa attraverso l'esplicitazione e la condivisione di ciò che sa per comunicarlo ai compagni e all'insegnante. È come se ciascun allievo mettesse il tassello di un puzzle sul tavolo e poco per volta ogni tassello spostato e accostato ad altri da tante mani che lavorano con lo stesso scopo, assumesse via via la forma giusta, ogni pezzo si va a incastrare per comporre il disegno complessivo del sapere con soddisfazione di tutti.

Per creare questo ambiente di apprendimento ci vuole, da parte dell'insegnante, molta umiltà, molto rispetto, molta capacità di ascolto degli allievi e anche la rinuncia a esprimere giudizi e a tracciare strade forzando verso soluzioni canoniche. Anche strade più lunghe e meno formalizzate possono condurre alla soluzione e acquisiscono valore dall'essere il prodotto di un pensiero autonomo e creativo.

Un altro elemento indispensabile infatti è la condivisione di idee, strategie, rappresentazioni perché nel momento in cui si rende esplicito, in una situazione di classe, il proprio pensiero si producono due effetti: si chiariscono le proprie idee e si apre la possibilità agli altri (ai compagni in questo caso) di fare proprie le idee di un altro e di rielaborarle, trasformandole, se necessario, fino a portare a compimento, tutti insieme, come un corpo unico, il processo di costruzione di nuova conoscenza.

Io ho sperimentato per molto tempo questa modalità di lavoro grazie al lavoro svolto nel Nucleo di ricerca didattica di cui faccio parte. Lì ho imparato tutto, dai miei errori come dagli errori degli altri, discutendo, progettando, studiando, leggendo, mettendomi in gioco con tutte le mie capacità e... incapacità. Ciò che ho ottenuto è qualcosa di unico.

Trovare un problema adatto, che funziona, che faccia scattare il processo di apprendimento non è facile, non è una cosa che l'insegnante possa fare da solo.

Per questo occorre un esperto della disciplina e un gruppo di lavoro che sia disponibile a sperimentare e a fallire qualche volta, ma soprattutto a documentare il lavoro svolto per poter avviare un processo di riflessione comune su quanto è successo e capire che cosa è meglio fare per raggiungere l'obiettivo. È un lavoro lungo e faticoso, e non tutti gli insegnanti sono disposti a fare questo sforzo. Ma ultimamente, nel mio 'girovagare' per fare formazione, ho visto tanti occhi di insegnanti accendersi e brillare di fronte a proposte didattiche costruite tenendo presenti questi principi.

Secondo me l'unica formazione che funziona è quella che obbliga gli insegnanti a mettersi in gioco a livello adulto confrontandosi con il proprio sapere matematico e con le proprie lacune. Per questo non amo le conferenze di matematica, ma preferisco adottare per la formazione la modalità laboratoriale: gli insegnanti provano su di sé quello che poi andranno a proporre ai loro allievi, sperimentano le ansie e le difficoltà, ma provano anche l'entusiasmo e la soddisfazione proveniente dall'aver trovato la strada giusta per risolvere un problema. Si confrontano spesso con i propri errori e forse capiscono quel che provano gli studenti quando un errore viene evidenziato dall'insegnante mettendo in ridicolo chi l'ha prodotto. Il discorso sugli errori di solito è uno dei primi a dover essere affrontato: con gli allievi come con gli insegnanti. L'allievo deve sapere che risolvendo un problema può sbagliare perché l'errore fa parte integrante del processo risolutivo e rappresenta un momento di crescita cognitiva. L'insegnante deve trasmettere questa idea con le azioni che compie, con il metodo di lavoro che utilizza.

Ogni volta che proponevo un problema ai miei allievi sapevo che ci sarebbero state soluzioni errate, anzi speravo che emergessero perché le prevedevo già in fase di progettazione e sapevo che mi servivano per poter avviare la discussione sulle strategie trovate dagli allievi. Alcuni errori sono tipici e si ripresentano tutte le volte che si propone una certa situazione problematica da risolvere. Sono la ricchezza della situazione stessa perché solo affrontandoli si impara. Se non ci sono errori, vuol dire che si è calibrato male il lavoro, vuol dire che il sapere in gioco era già dato e non in fase di costruzione, in *zona di sviluppo prossimale*. La prima cosa che deve saper fare un insegnante per poter scegliere un problema adatto ai suoi allievi, in un determinato momento del loro percorso di apprendimento, è chiedersi qual è il sapere da far emergere e su quali saperi possano fare affidamento gli allievi per 'attaccare' il problema. Sicuramente, in una prima fase, gli allievi non useranno il sapere oggetto dell'apprendimento, ma si serviranno di conoscenze e di strategie mutate da esperienze precedenti sia scolastiche che extrascolastiche. Nel corso del lavoro però dovranno poco per volta assumere la consapevolezza che il sapere 'nuovo' è indispensabile per risolvere quel problema o, per lo meno, risulta più economico utilizzarlo per arrivare alla soluzione.

Lo strumento che consente agli allievi di passare dal piano dell'esperienza a quello della conoscenza è la discussione con i compagni mediata dall'insegnante. È indispensabile, come dicevo già prima, passare attraverso la comunicazione. Il contesto comunicativo mette tutti nella situazione di dover chiarire il proprio pensiero, farlo diventare linguaggio perché sia condiviso dagli altri. In matematica, inoltre, l'esercizio della comunicazione porta naturalmente verso l'argomentazione che

è un passo importante per giungere poi a comprendere il senso di una delle attività matematiche fondamentali: la dimostrazione.

Finora mi sono limitata ad enunciare le idee che ho maturato nel tempo su come insegnare la matematica in modo da coltivare un amore per questa materia. Ora vorrei illustrare un esempio per rendere il mio pensiero più esplicito.

Un'attività che ho svolto parecchie volte prende avvio, come molte altre che ho avuto occasione di sperimentare, da una storia: questa si intitola "Il figlio del re e il messaggero", è tratta da un racconto di Dino Buzzati ed è stata modificata ad uso didattico nel Nucleo di Ricerca didattica. Questa situazione è stata sperimentata in moltissime classi, anche di scuola media inferiore e superiore, non è quindi una novità.

I contenuti matematici coinvolti sono numerosi ma i principali sono: le potenze e il controllo delle variabili spazio e tempo mediante la rappresentazione con un grafico cartesiano. Questi contenuti la collocano naturalmente in prima media, come viene fatto nel testo Matematica 2001 pubblicato dall'UMI su <http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2001/matematica2001.html>, dove la situazione didattica è collocata nel filone sulle Relazioni. Al termine dell'attività gli allievi di solito hanno acquisito una buona competenza nella costruzione, nella lettura e nell'interpretazione di un grafico che facilmente sarà esportabile in altre situazioni in cui entra in gioco la variabile tempo, anche accoppiata ad altre.

Per quanto mi riguarda devo dire che la prima volta che ho sperimentato questa attività ero in una classe quarta e svolgevo un'attività di laboratorio nell'ambito di un progetto ministeriale (ex art.3 DPR 419/74). Successivamente l'ho riproposta più volte sia in quarta che in quinta. Gli allievi di solito hanno svolto in precedenza qualche esperienza con grafici lineari per rappresentare andamenti di temperatura, di rapporto tra pesi e prezzi di una merce, di crescita di piante e così via. L'uso del grafico cartesiano però, non è ancora una strategia utilizzata comunemente per risolvere un problema.

Ma veniamo alla storia, che riassumo qui brevemente, rimandando al testo dell'UMI per una lettura completa.

"Il figlio di un re inizia un viaggio nel suo regno, ogni giorno percorre 50 km e alla sera si ferma per riposare con tutto il suo seguito. Alla mattina del secondo giorno, prima di ripartire, il figlio del re chiede al suo messaggero più fidato di tornare al castello per prendere erbe medicinali e notizie dei genitori. Il messaggero parte e viaggia ad una velocità doppia rispetto a quella del figlio del re cioè 100 km all'ora, così raggiunge di nuovo la carovana la sera del terzo giorno. La stessa storia si ripete per altre due volte."

Agli allievi si chiede di prevedere quando avverranno il secondo e il terzo incontro tra il figlio del re e il messaggero.

Per avviare il processo risolutivo, io di solito chiedo a qualche allievo di provare a raccontare la storia con parole sue in modo da verificare se è stato ben compreso quel che succede. Gli altri allievi possono intervenire per correggere o integrare quanto detto dal compagno. Questa fase collettiva serve a far sì che gli allievi prendano in carico il processo risolutivo ma al momento opportuno va interrotta proponendo agli allievi di lavorare in piccoli gruppi. Di solito i gruppi sono eterogenei cioè costituiti da allievi con diversi livelli di competenza, evitando però di mettere

insieme alunni di livello basso con alunni di livello molto alto. Al gruppo viene richiesto un protocollo scritto con le previsioni motivate e una rappresentazione della situazione.

Nel piccolo gruppo gli allievi possono esprimersi liberamente e quasi subito cominciano a rappresentare quanto succede con un disegno o qualche forma di schematizzazione. E intanto discutono anche molto animatamente per riuscire a far combaciare la loro ipotesi con l'elemento di validazione scritto nel testo della storia: il fatto che il primo incontro deve avvenire alla sera del terzo giorno.

Le rappresentazioni sono molto interessanti e hanno in comune il fatto che spazio e tempo sono intrecciati, anzi il tempo è ridotto a spazio ed è rappresentato dal tratto percorso dal figlio del re; in pratica una linea individua sia il pezzo di strada percorso dal figlio del re (50 km) sia il tempo trascorso (un giorno), diventando una sorta di unità di misura condivisa, una scansione ritmica che consente agli allievi di tenere sotto controllo quanto succede.

Chi riesce a rappresentare correttamente gli eventi fino al terzo giorno, di solito ha trovato una rappresentazione efficace che gli consente anche di prevedere gli incontri successivi pur facendo degli errori di cui subito difficilmente si accorge. Chi invece non trova una forma di rappresentazione adeguata sovente si perde e non giunge a formulare ipotesi sugli incontri successivi.

In ogni caso, dopo un tempo stabilito in precedenza, l'insegnante deve interrompere l'attività del gruppo e raccogliere gli elaborati prodotti. La fase successiva è a carico solo dell'insegnante che analizza attentamente i prodotti dei gruppi e prepara un cartellone su cui riassume le diverse strategie. Dopo alcuni giorni il cartellone viene presentato alla classe e diventa oggetto di discussione a partire da alcune domande guida dell'insegnante. Il mio Nucleo di ricerca fa riferimento, per la discussione, al canovaccio proposto da M. G. Bartolini Bussi e dal suo gruppo di ricerca, esposto nel testo "Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica" Comune di Modena 1995. Bartolini Bussi suggerisce di iniziare la discussione di bilancio, che avviene dopo le soluzioni individuali o di gruppo, con la domanda: "In quale soluzione fra quelle esposte vi riconoscete? Perché?" Non necessariamente gli allievi debbono riconoscersi in quella che hanno elaborato nel loro gruppo, il distanziamento avvenuto, per il lasso di tempo intercorso fra il momento della soluzione e quello della discussione, facilita la produzione di argomentazioni basate su un'osservazione più 'oggettiva' delle diverse strategie prodotte dai gruppi.

Questo è il momento centrale dell'attività e a questa domanda ne seguiranno altre, formulate dall'insegnante in momenti topici, che inviteranno tutti a soffermarsi sui propri processi risolutivi, a confrontarli con quelli dei compagni con l'obiettivo di *"socializzare e valutare collettivamente le strategie usate dai singoli allievi nella soluzione del problema e costruire (quando possibile) una o più rappresentazioni e soluzioni condivise da tutta la classe e consistenti con quelle costruite a livello adulto per mezzo di concetti e procedure matematiche"* (Bartolini Bussi et al. testo citato). Le discussioni registrate e trascritte diventano il punto di partenza per l'analisi dei processi di apprendimento degli allievi. L'insegnante, ritornando sulle parole dette dagli allievi e rivedendo i loro elaborati può farsi un'idea sufficientemente chiara del sapere in costruzione e del punto preciso a cui si collocano i diversi allievi, degli errori ancora presenti e così via.

Da quanto ho scritto finora pare che il problema si possa risolvere solo leggendo una storia, facendo una rappresentazione e discutendo tutti insieme. Ma non è così. Nel processo di risoluzione intervengono di solito, in modo spontaneo, anche altre modalità, ad esempio l'uso del corpo, di una certa gestualità e di strumenti di vario genere. Farò alcuni esempi.

Nella scuola elementare l'aspetto narrativo della situazione fa sì che gli allievi siano molto coinvolti e che spontaneamente comincino, dopo un po', a rappresentare la storia agendo in prima persona, non si accontentano più di un semplice disegno: qualcuno diventa il principe e qualcun altro il messaggero, un terzo compagno si occupa di rileggere la storia e un altro ancora di scandire il tempo che passa o di segnare sul pavimento dell'aula le varie tappe anche usando sedie o oggetti vari. Quindi c'è movimento in classe, occorre spazio. Le azioni fanno sì che gli avvenimenti della storia siano ben compresi, ma non ci garantisce che tutti giungano alla soluzione: la mediazione dell'insegnante a volte è necessaria, ad esempio nel momento della discussione può riprendere queste forme di rappresentazione corporea e stimolare gli allievi a trovare tutti insieme il modo di rendere coerente ciò che si fa con quanto sta scritto nel testo della storia. Uno dei problemi che emerge quasi subito è la difficoltà nel far muovere 'contemporaneamente' i due protagonisti, soprattutto, quando il primo va in un senso e il secondo in quello opposto: servono tanti occhi che controllano, la soluzione diventa un fatto corale e la riuscita della rappresentazione un evento da festeggiare. Niente può ripagare un insegnante dello sforzo fatto più di quanto lo possano fare gli allievi quando cominciano a battere le mani e a lanciare grida di giubilo perché si è risolto un problema... di matematica.

Parlavo prima di gestualità, intendendo, oltre a quella prodotta con tutto il corpo, anche la gestualità più fine che viene prodotta quando gli allievi rappresentano sul foglio il viaggio del figlio del re e del messaggero.

Una volta tracciate le linee che rappresentano le varie tappe, il movimento dei due personaggi quasi sempre viene rappresentato con gli indici delle due mani che ripercorrono la strada: il dito che rappresenta il figlio del re va sempre nella stessa direzione tappa dopo tappa, quello del messaggero va e viene dal castello, quando i due indici si toccano vuol dire che avviene un incontro. Mi è capitato spesso di guidare la mano dei miei allievi per far loro capire come dovevano muovere le dita per rappresentare correttamente il percorso: questo momento in cui l'insegnante presta la mano è molto importante, forse è un modo di fare che è stato dimenticato perché considerato una forzatura. Veramente tutto ciò che impariamo prima di andare a scuola lo impariamo in questo modo, imitando gli adulti e facendoci guidare la mano: perché non riprenderlo in considerazione in quelle fasi dell'apprendimento in cui si tratta di 'risvegliare' le conoscenze che abbiamo detto essere lì in attesa nella mente dei nostri allievi?

In un'altra situazione, in una scuola media mi è invece capitato di mimare la storia con gli oggetti che erano nel portapenne: il temperino è diventato il messaggero e la gomma il figlio del re e in questo modo è diventato facile farli muovere sul percorso che gli allievi avevano disegnato superando la situazione di stallo che impediva loro di 'vedere' correttamente ciò che succedeva.

Questo ci fa capire come siano diverse le strade attraverso cui si arriva alla comprensione. Ogni allievo ha le sue strategie e l'insegnante non ha che da assecondarlo offrendogli situazioni ricche e stimolanti che lo invitino ad usarle oppure in certi casi può suggerire l'uso del corpo o di gesti e strumenti adatti.

La fase successiva del problema del messaggero richiede che l'allievo rappresenti la situazione attraverso un grafico cartesiano: la difficoltà consiste nel disintrecciare le due variabili spazio e tempo che fino a quel momento sono state trattate insieme. Un modo per tenere sotto controllo il grafico e la storia è quello di creare dei 'punti di riferimento': per gli allievi di solito è importante capire quando il figlio del re e il messaggero viaggiano e quando stanno fermi anche stabilendo degli orari. Se immaginiamo di dividere la giornata in quattro parti possiamo dire che la carovana si

mette in marcia alle 6 del mattino e si ferma alle 6 di sera. In questo modo possiamo scandire il grafico in momenti in cui aumentano sia lo spazio che il tempo e in momenti in cui lo spazio rimane invariato e il tempo va avanti. Sul grafico compare così una ritmicità fatta di linee che vanno verso l'alto per indicare la crescita di entrambe le variabili e linee parallele all'asse delle x, quindi orizzontali, che indicano la crescita di una sola delle due, in questo caso il tempo. Questa scansione aiuta a tenere sotto controllo i fatti. Ma mentre la linea che rappresenta ciò che succede al figlio del re ha sempre lo stesso andamento e quindi, una volta individuato il ritmo, va avanti da sola, quella del messaggero presenta qualche difficoltà in più. Come rappresentare il ritorno al castello? Qui di solito emerge il problema più grosso, un misconcetto che può anche risultare di difficile superamento. La linea che tracciamo sul grafico non è il 'percorso', rappresenta la relazione fra due variabili, è un'astrazione del percorso. Questo non è sempre scontato per gli allievi, anche per i più grandi. Gli aspetti percettivi della situazione entrano in conflitto con quelli concettuali e non ci sono stratagemmi didattici per far sì gli allievi non debbano scontrarsi con questa difficoltà. Quindi si affronta con il metodo che dicevo prima: un po' con domande opportune e un po' facendo vedere come si fa. L'errore che fanno gli allievi che non hanno superato questa fase percettiva consiste nel far 'tornare indietro' all'origine dei due assi la linea che rappresenta il messaggero senza tenere conto del fatto che così facendo anche il tempo va indietro. Richiamando gli allievi al significato dei punti, cioè ai valori di x e y dove la linea cambia direzione, quasi tutti si convincono che il messaggero ritorna indietro al castello anche se la linea va avanti: per segnalare il ritorno la linea scende a toccare l'asse delle x.

In questo modo viene condiviso il fatto che l'asse delle x si tocca ogni volta che c'è un ritorno al castello e questo nuovo modello può sostituire gradualmente la precedente convinzione, diventando la chiave per interpretare poi tutto il grafico e usarlo come strumento per risolvere anche il resto del problema cioè trovare gli incontri successivi al primo.

La regolarità di questi incontri dopo 3, 9, 27 giorni suggerisce quasi subito che ci sia una regola moltiplicativa, ma la moltiplicazione è di tipo nuovo, è un $\times 3$ che si ripete sempre. Ecco perché questo problema può servire per introdurre le potenze. Che cosa succederà se la storia continua sempre nello stesso modo? Ci saranno anche un quarto, un quinto, un sesto incontro? Gli allievi costruiscono tutti insieme gli incontri successivi calcolando le potenze di 3 e si accorgono che dopo pochi incontri il tempo che passa è superiore a quello di una vita umana e quindi, ad un certo punto, non ha più senso continuare.

L'intreccio fra momenti individuali e di gruppo e momenti collettivi di scambio e di condivisione ha condotto gli allievi a costruire nuovi saperi: saranno saperi stabili? Dureranno nel tempo?

Io penso di sì perché nella mia esperienza queste situazioni diventano prototipi per quei saperi e vengono richiamati dagli stessi allievi quando si trovano in situazioni simili. "È come la storia del messaggero...".

Questo che ho tratteggiato è un modo di imparare non esclusivamente scolastico, ma è il modo in cui ogni individuo impara, indipendentemente dall'età e dalla disciplina. Ne è la riprova il fatto che anche quando lavoro con gli insegnanti mi trovo ad affrontare gli stessi nodi cognitivi e le difficoltà da superare sono le stesse, anche se alcune conoscenze in più aiutano a superarle più in fretta.

L'aspetto fondamentale, però, che forse contribuisce a creare un vero piacere nel fare matematica è che questo modo di lavorare permette all'insegnante di valorizzare i contributi di tutti gli allievi e lo pone sempre in una posizione di ascolto e di attenzione verso ognuno di essi. E di che cosa hanno bisogno gli allievi, se non, prima di tutto, di essere ascoltati?