Costruire il senso del numero
(Building the number sense)
di Donatella Merlo

ABSTRACT
Si propongono alcune riflessioni sull'acquisizione della competenza sul numero, dalla scuola dell'infanzia, mostrando come alcune pratiche didattiche debbano essere rivisitate facendo attenzione agli sviluppi nel lungo periodo delle concezioni sul numero.

We offer some reflections on the acquisition of competence on the number, from kindergarten, showing how some teaching practices should be revisited taking into account developments in the long run about the conceptions of number.

Informazioni su Donatella Merlo
Ha insegnato nella scuola elementare dal 1969 al 2007. Fa parte del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino dal 1988. Ha partecipato a molte sperimentazioni e ricerche nel campo della didattica della matematica e delle scienze. Attualmente si occupa di formazione degli insegnanti. Si interessa anche di informatica e in particolar modo di robotica educativa collaborando con Scuola di Robotica di Genova.

Taught in elementary school from 1969 to 2007. Is part of the Nucleus for Research in Mathematics Education, Department of Mathematics, University of Turin since 1988. Has participated in many experiments and research in mathematics education and science. Currently is involved in training teachers. She's interesting in computer science and especially in educational robotics collaborating with the School of Robotics in Genoa.

Prendo spunto da alcune esperienze di formazione con scuole dell'infanzia e primarie che ho condotto recentemente[1] per aprire una riflessione sui percorsi didattici che portano i bambini all'acquisizione della competenza sul numero. La maggior parte degli insegnanti che ho incontrato fa riferimento, per il numero, a pratiche didattiche consolidate del cui impianto teorico si è ormai persa la traccia; in questo modo si sono creati stereotipi didattici, difficilissimi da scardinare, il cui uso, nel tempo, genera errori concettuali che si ripercuotono seriamente sull'apprendimento.
Nell'affrontare il numero, fin dalla scuola dell'infanzia, ci deve essere la preoccupazione di arrivare a una sistemazione teorica del concetto che diventi competenza matematica spendibile negli anni successivi, nello stesso tempo si deve fare attenzione ai modi di usare il numero, anche da parte di bambini molto piccoli, quando questi sono alle prese con un'attività fra le più

[1] *Ringrazio le professoresse Maria Arcà e Maria Cantoni per le revisioni dell'articolo e soprattutto dell'allegato; alcune delle cose che ho scritto sono il risultato di un confronto avvenuto tra di noi durante i corsi di formazione che abbiamo condotto insieme e rispecchiano i problemi che abbiamo dovuto affrontare durante il lavoro concreto con gli insegnanti.*

spontanee come quella del contare.[2], Il percorso didattico che si propone deve avere senso per i bambini e seguirne la naturale evoluzione, tenendo conto di ciò che già sanno sul numero e di come lo usano spontaneamente

Per illustrare meglio il mio pensiero citerò due elenchi.

Il **primo** elenco riguarda i significati o aspetti del numero che sono, di solito, sintetizzati in queste voci: *numero ordinale, numero cardinale, numero come misura, numero come etichetta, numero ricorsivo.* Questo primo elenco ci parla dei diversi significati del numero come emergono nell'uso.

Questa classificazione è utile per interpretare ciò che succede quando i bambini ragionano con i numeri, ma non dovrebbe portare a percorsi unidirezionali, perché i diversi aspetti non si sviluppano mai separatamente. È il contesto che definisce l'uso di un significato piuttosto di un altro e scoprire che cosa c'è in comune tra un numero etichetta e un numero misura fa parte del percorso di concettualizzazione del numero. Quando i bambini dicono: ho il 25 di scarpe, ho messo 25 palline nella collana, per andare dalla classe al bagno ho fatto 25 passi… il numero è sempre lo stesso ma dietro ognuno di quei numeri ci sono 'azioni' diverse, ragionamenti e procedure diverse.

Ogni numero ha uno scopo e anche ogni attività sul numero che proponiamo ai nostri allievi deve avere uno scopo ... che essi siano in grado di capire. Se un'attività non acquista senso, i bambini non attivano le loro capacità di ragionamento e soprattutto non mettono in campo le loro conoscenze che si sviluppano gradualmente dalle prime esperienze di conteggio e di numerazione proposte nella scuola dell'infanzia. Ciò che cambia, ai vari livelli, è, ovviamente, il livello di concettualizzazione raggiungibile: c'è differenza tra fare esperienza e prendere coscienza, ad esempio, del fatto che il numero 25 detto per un numero di scarpe è lo stesso numero 25 che si usa per numerare le perline di una collana; ma per trovare il punto di contatto bisogna uscire dai contesti in cui si è fatta un'esperienza e varcare una soglia, quella che separa il mondo reale, fatto di oggetti reali e di azioni concrete, dal mondo della matematica, fatto solo di oggetti mentali e di correlazioni logiche tra queste entità.

Il **secondo** elenco è quello dei 5 principi di conteggio di Gelman&Gallistel (1978) (*corrispondenza uno-uno, ordine stabile, cardinalità, astrazione, irrilevanza dell'ordine*) che ci dicono come, attraverso il conteggio, i bambini si impadroniscano del numero. L'azione didattica dell'insegnante, nelle prime fasi, dovrebbe essere imperniata sul far evolvere le strategie di conteggio messe in atto spontaneamente dagli allievi. Se l'obiettivo è costruire un primo nucleo di saperi rispetto al numero riutilizzabile in esperienze successive, non è sufficiente saper 'contare' ma bisogna imparare a 'contare bene', perché il numero che risulta dal conteggio diventa il cardinale della collezione con cui si opera, dal conteggio si passa quindi ai significati del numero.

---

[2] Nella bozza di revisione delle Indicazioni Nazionali del 30 maggio 2012, a pag. 15, nel campo di esperienza per la scuola dell'infanzia 'Numeri, spazio, fenomeni e viventi' vi è un paragrafo dedicato espressamente alla matematica in cui si legge: 'La familiarità con i numeri può nascere a partire da quelli che si usano nella vita di ogni giorno; poi, ragionando sulle quantità e sulla numerosità di oggetti diversi, i bambini costruiscono le prime fondamentali competenze sul contare oggetti o eventi, accompagnandole con i gesti dell'indicare, del togliere e dell'aggiungere....'

Le pratiche didattiche che fanno riferimento ai due elenchi dovrebbero essere unificati in una visione complessiva che permetta agli insegnanti di costruire percorsi coerenti.
I punti nodali con cui confrontarsi riguardano quindi il significato del contare, l'ampliamento del conteggio alle situazioni di misura (grandezze continue) e l'uso di strumenti per contare, come la linea dei numeri, per visualizzare l'ordinamento dei numeri naturali.
Questi tre temi sono ampiamente sviluppati nel pdf allegato.

D. Merlo - 12 luglio 2012

Allegato all'articolo: "**Costruire il senso del numero**"

di Donatella Merlo

Che cosa significa contare

Secondo Gelman&Gallistel i bambini si impadroniscono del significato del numero a partire dalle azioni del contare che contribuiscono quindi alla costruzione dei diversi significati del numero.

Non c'è una didattica dei principi di conteggio, e non avrebbe senso proporla, anche se l'insegnante dovrebbe essere consapevole che in un'azione complessa come il contare si possono scindere componenti diverse che, tutte insieme, concorrono alla costruzione di questa abilità che è alla base della comprensione del numero.

Il contare non è però l'unico modo con cui i bambini si impadroniscono del numero, ci sono molti fatti di esperienza che si intrecciano nella mente del bambino e poco per volta le cose vanno al posto giusto, perché il bambino trova le correlazioni che funzionano e quelle da scartare. L'insegnante dovrebbe accettare questo 'pasticcio' iniziale e poi districarlo, non fare viceversa, cioè programmare una sequenza istituzionalmente corretta per evitare il pasticcio.

Le attività di classificare gli oggetti (per forma, per colore, per uso) o di metterli in ordine secondo una proprietà individuata (per altezza, per pesantezza, per grandezza..) sono certamente importanti e permettono ai bambini di ragionare sulle proprietà degli oggetti. Se queste attività non portano immediatamente nella direzione delle procedure di conteggio, definiscono però le collezioni su cui poi si andrà ad esercitare l'attività del conteggio e l'uso del numero.

Ma riflettiamo sul concetto di collezione (o di insieme). Il bambino può rapportarsi con una collezione guardandola in diversi modi secondo il tipo di proprietà che ne ha determinato la costruzione. Il fatto di guardarla per 'numerosità' è quasi sempre indotto dalla scuola e sovente dato per scontato, come se per i bambini fosse automatico estrapolare dalla concretezza di quell'insieme di oggetti in particolare la numerosità. Si pensi alle problematiche che sorgono seguendo l'iter didattico della cosiddetta insiemistica basato sulla costruzione di insiemi equipotenti che comporta la definizione del numero naturale come classe. Anche se teoricamente è corretto, praticamente, richiede un livello di astrazione dal concreto degli oggetti che si mettono 'insieme' che bambini di sei anni non possono certamente governare da soli (oggi infatti non si ritiene più opportuno seguire tale strada).

Per collezione, quindi, possiamo intendere sia un insieme di oggetti risultanti da una classificazione in base ad una proprietà (es. una collezione di farfalle, i cubetti da costruzione rossi), sia un gruppo di oggetti - o di loro rappresentazioni - che decidiamo di contare perché in quel momento ci interessa conoscerne la quantità indipendentemente da altre caratteristiche. Guardare per 'numerosità' implica una condivisione di quest'idea da parte dei bambini, esattamente come il guardare per forma o colore, ma richiede anche che il conteggio che ne segue sia motivato. Il bambino deve chiedersi e darsi una risposta: "Perché devo contare questa collezione? Qual è l'obiettivo del mio conteggio?". In altre parole, il conteggio deve far parte di una situazione didattica contestualizzata che gli dia senso.

I bambini imparano il 'numero' usando i numeri e riflettendo sul loro uso in una procedura di conteggio o in altri contesti specifici. Qualche bambino può fare spontaneamente una riflessione sui modi del contare, ma sicuramente non tutti sono in grado di farlo o hanno occasioni per farlo. È su questi momenti del percorso di costruzione di conoscenza che si inserisce la scuola perché essa ha possibilità enormi di intervento sulla condivisione e sulla presa di coscienza degli atti che stanno dietro il contare. Il pregio del lavoro di Gelman&Gallistel è stato di riportare al centro della comprensione del numero la procedura spontanea del contare facendo diventare (di nuovo) il conteggio un'attività fondamentale per l'acquisizione del significato del numero. Noi sappiamo però che ogni concetto si sviluppa e si evolve in un contesto di negoziazione sociale del sapere e quindi è molto importante che il bambino non si limiti al contare in sè, ma possa arrivare a spiegare ad altri come conta e perché, come cambia il modo di contare a seconda della situazione, che cosa rimane uguale in tutte le procedure che coinvolgono il conteggio, e sperimentare come può evolvere il contare se aumentano le sue conoscenze matematiche. Questa riflessione, se avviene in un contesto sociale tra pari, porta più facilmente alla concettualizzazione piuttosto che il contare individuale tout court e l'abitudine alla riflessione sulle proprie strategie di conteggio potrebbe e dovrebbe cominciare fin dalla scuola dell'infanzia.
Contare non è un'attività che si esaurisce con l'apprendimento di una procedura, ma acquista significato se inserita in contesti problematici. Si può così gradualmente passare anche ad un conteggio di altro tipo, in cui non c'è più la finalità della concettualizzazione iniziale del numero, quanto piuttosto la scoperta del significato più ampio di 'ordine di grandezza'.
Parlare di 'ordine di grandezza' anziché di quantità definite fa parte di pratiche quotidiane che ciascuno di noi mette in atto quando deve valutare una quantità o la misura di una grandezza per scopi pratici. La pratica del conteggio si evolve quindi nel senso di includere anche tutte quelle situazioni in cui non interessa o forse non è conveniente o possibile arrivare ad un risultato preciso, ma dove è sufficiente un'adeguata approssimazione. Una situazione problematica che facciamo sempre sperimentare nelle nostre classi è quella denominata 'I chicchi di riso' (UMI-SIS-MIUR, 2003) dove il risultato finale è un numero che va molto al di là della capacità di lettura degli allievi (e spesso anche degli insegnanti!) ed è inoltre difficile da immaginare come quantità concreta. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza coinvolto bisogna cercare termini di paragone reali rifacendosi ad altri oggetti, immaginando ad esempio vagoni di un treno pieni di chicchi di riso e poi, se non basta, treni formati da tanti vagoni pieni di chicchi di riso da arrivare fino alla luna! Costruirsi strategie per padroneggiare gli ordini di grandezza dei numeri e dar loro un significato fa parte del percorso didattico sul conteggio che non si può concludere con la classe prima, ma deve andare avanti nel tempo. Sempre nel testo *Matematica 2001* (UMI-SIS-MIUR, 2003) è riportata un'esperienza per la classe seconda dal titolo 'Quanto è grande cento'... che in classe terza si trasforma in 'Quanto è grande mille': entrambe queste attività stimolano i bambini ad immaginare le quantità espresse dai numeri. Inizialmente il cento o il mille sono solo parole e hanno una funzione evocativa: per i bambini molto piccoli queste parole sono sinonimo di 'grande quantità' spesso indicano quantità che per loro non sono nemmeno 'contabili'. Ad esempio se debbono esprimere con un numero quanti granelli di sabbia ci sono in un bicchiere potrebbero dire 'sono mille' con il significato di 'sono così tanti che non posso nemmeno contarli'. Allo stesso modo attribuiscono il numero mille alle stelle del cielo o ai fili

d’erba di un prato. Ma dal potere evocativo del nome si deve arrivare a controllare l’effettiva “quantità”: come si fa a sapere se sono proprio cento... mille? come ci si organizza per contare queste ‘grandi quantità’? Quante risorse matematiche si mettono in moto e poco per volta l’orizzonte si amplia!
Non si conta solo 'per uno', ma anche per due, per tre, per dieci, con le potenze... usando le dita, la calcolatrice, il computer... stimando mentalmente le quantità ancor prima di avviare il conteggio vero e proprio. Per dare questo ampio respiro alle attività di conteggio è quindi importante che a scuola l'insegnante si prenda cura di queste abilità fin dal loro nascere, ma, nello stesso tempo, abbia in mente un progetto più a lungo termine.

Torniamo ora a Gelman&Gallistel ed esaminiamo i cinque principi di conteggio cercando di capire che cosa c’entrano con il lavoro che si fa in classe.
Qual è la prima cosa che bisogna saper fare per contare? **La corrispondenza uno a uno** tra oggetti da contare e “segni”. Non è la corrispondenza uno-uno tra oggetti tipo un piatto/un bambino, ma consiste nell'‘appaiare’ gli oggetti di una collezione con gli elementi di un'altra collezione costituita da segni (anche le parole sono segni) in modo tale che ogni volta uno e un solo segno sia usato per ogni oggetto della collezione da contare. Questo viene fatto dai bambini molto presto quando passano in rassegna con il dito un oggetto per volta e dicono delle parole. Queste parole possono essere numeri non ancora nell'ordine che usiamo noi, potrebbero perfino essere liste di parole inventate da loro usate come i numeri, anche se raramente succede. E quando recitano una conta per decidere un turno di gioco, non mettono forse in pratica lo stesso principio? Infatti i segni devono solo soddisfare questo criterio: essere diversi uno dall'altro ed essere abbinati ad un solo oggetto per volta.

Se la lista che i bambini usano è sempre la stessa, cioè è fissa, vuol dire che hanno anche acquisito **il principio dell'ordine stabile**; potrebbero però usare una lista non convenzionale ma stabile per loro e con questa contare perfettamente; in questo caso il “numero” trovato da un bambino non sempre corrisponderebbe con quello trovato da un altro per la stessa quantità.

Per padroneggiare **il principio di cardinalità** i bambini devono arrivare a concepire che l'ultimo numero che dicono rappresenta anche la quantità di oggetti dell'insieme, ha cioè uno statuto speciale rispetto agli altri numeri della lista; questo si rileva in certi casi quando si sente che lo ripetono con diversa enfasi alla fine della conta: 1 2 3 4 5 6 … 6. Anche il numero scritto sulle carte da gioco o sulle figure e che indica la quantità di oggetti, rappresenta un cardinale e per certe quantità è possibile, in opportuni contesti di gioco, che anche bambini molto piccoli gli attribuiscano questo valore ancor prima di sapere contare la quantità e soprattutto quando sentono di non aver bisogno di contare “un insieme” ormai codificato. Ma un bambino con difficoltà concettuali difficilmente raggiunge questa abilità nella scuola dell’infanzia.
Per verificare fino a che punto padroneggiano questo principio possiamo provare a utilizzare il numero come cardinale chiedendo ad un bambino di portarci ad esempio 8 oggetti. Come fa a portarne proprio 8? Conta 8 oggetti applicando i principi precedenti (uno-uno e ordine stabile) e ce li porta, cioè compie un'azione che richiede che abbia interiorizzato le operazioni di cui sopra.

Se non ce ne porta 8, quasi sicuramente qualcosa non ha funzionato nell'applicazione dei due principi precedenti.
Tutti i bambini alla scuola dell'infanzia dovrebbero arrivare fin qui se si rimane entro un certo ordine di grandezza. In prima elementare i modi per cercare di capire come i bambini padroneggino il numero possono diventare anche più complessi. Un'esperienza che si può proporre è ad esempio questa: dare segretamente ad un bambino un cartellino su cui ci sia scritto un numero chiedendogli di rappresentare quel numero a modo suo (prendendo e mostrando oggetti, facendo salti o passi o giravolte, battendo sul tavolo...) e i compagni devono indovinare che numero sta scritto sul foglietto. Un altro gioco che coinvolge molto i bambini è la produzione di un messaggio segreto per comunicare un numero (ad esempio far conoscere alle cuoche il numero di coperti necessari per il pranzo). Le strategie seguite dai bambini sono di solito molto diversificate: c'è chi scrive semplicemente il numero e magari disegna un piatto per rendere il messaggio più chiaro, c'è chi invece disegna tutti i tavoli con i piatti sopra o scrive la lista dei nomi dei bambini presenti. Il confronto delle diverse strategie permette ai bambini di condividere conoscenze e costruire i primi saperi matematici. Si può così verificare come i modi di concettualizzare quantità, anche indipendentemente dalla concretezza degli oggetti, siano già assolutamente presenti.
Come ho appena esemplificato, qualche bambino può anche andare oltre nella costruzione del concetto di numero, se ad esempio si rende conto che le cose contabili non necessariamente sono solo quelle che si possono prendere in mano. In realtà basta concepire una collezione per poterla contare (**principio di astrazione**): ad es. per dire la frase 'ho due idee in testa' oppure 'faccio quattro salti' occorre che concepisca le idee e i salti come contabili. Comincia quindi a capire che i principi precedenti si possono applicare a qualsiasi collezione di entità. É chi conta che, nell'atto del contare, definisce che cosa è contabile, che concepisce la collezione. E la collezione, in qualche modo, deve anche essere organizzata, strutturata logicamente o spazialmente per poter diventare contabile. Questo richiede che a scuola si svolgano attività mirate a far acquisire agli allievi tecniche di organizzazione spaziale (allineamenti, partizioni...) che i bambini più abili si costruiscono da soli, ma che, per diventare sapere comune, devono essere esplicitate e condivise. In queste attività sulle collezioni si esercitano quindi sia abilità classificatorie sia abilità spaziali.[1]
Anche in questo caso, partire da ciò che i bambini sanno già fare, renderebbe meno noiose e stereotipate le prime attività di matematica e questo sicuramente gioverebbe a tutti.

L'ultimo principio (**principio di irrilevanza dell'ordine**) assicura che in qualunque modo si organizzi la conta di una collezione alla fine si arriva sempre allo stesso numero, cioè non importa da quale oggetto si cominci a contare né in quale ordine o successione si contino gli oggetti. Questo implica che i bambini non vedano i numeri della conta come qualcosa di "appiccicato" agli oggetti e capiscano che non sono obbligati ad etichettare con il numero 'uno' sempre lo stesso oggetto, perché la conta funzioni... e così via per gli altri numeri.
Tutto il discorso fatto mette in evidenza la grande importanza che assume il 'prestare attenzione' a come contano i bambini e a quali strategie mettano in atto, proprio per individuare carenze rispetto ai 5 principi che governano il conteggio.

---

[1] Sulle collezioni e sugli errori nel conteggio che dipendono dalla loro organizzazione spaziale cfr. Briand (1993)

L’attività ‘Che cosa si può contare’ che ho proposto in diverse situazioni nella scuola dell’infanzia e nella scuola primaria può essere utilizzata sia per testare le conoscenze degli allievi sul numero sia per avviare con loro le prime riflessioni sul significato del numero in diversi contesti sia per farli riflettere sulle procedure di conteggio. I bambini divisi a gruppi ricevono degli oggetti concreti (un giocattolo, un tappo di sughero, una bottiglietta piena d’acqua, un sacchetto di caramelle, il pongo, un mandarino, un pacco di farina...) e una consegna di questo tipo: ‘Che cosa si può contare di questo oggetto? Conta e rappresenta il tuo conteggio in modo che si capisca che cosa hai contato e come hai fatto per contarlo.’ (Fig. 1-2-3-4)

Fig. 1 - Il pongo suddiviso in tante palline (Scuola dell’Infanzia dell’IC di Pianello Val Tidone (PC), ins. Ilaria Cappellano)

Fig. 2 - Il dinosauro e la mano che conta le diversi parti di cui si compone (Scuola materna comunale G. Deledda di Torino, ins. Lucia Ballesio)

Fig. 3 - La polenta contata a ‘manate’ (Classe prima, Scuola primaria Nino Costa Pinerolo ins. Elisa Meoni)

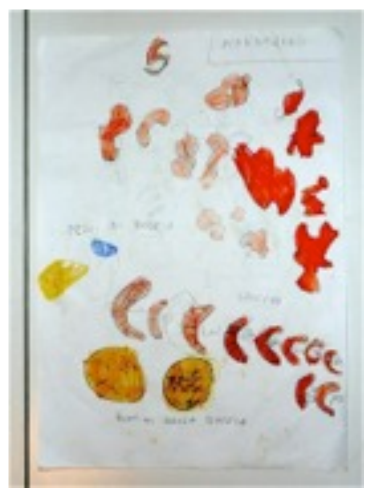

Fig. 4 - Il mandarino scomposto nelle varie parti per poterlo ‘contare’ (Classe prima, Scuola primaria Nino Costa Pinerolo ins. Elisa Meoni).

Mentre la domanda iniziale serve a far mettere a fuoco ciò che di contabile c’è nell’oggetto che hanno ricevuto, la seconda parte della consegna invita a produrre una numerazione e poi a trovare il modo per rappresentarla facendo attenzione alla strategia messa in atto. Le informazioni sulle conoscenze degli allievi e gli stimoli per la riflessione che si ricavano proponendo quest’attività son veramente molti. Gli oggetti che hanno a disposizione sono stati

scelti in modo che siano contemporaneamente presenti sia oggetti su cui può partire immediatamente il conteggio (caramelle) sia oggetti che obbligano a ridefinire le strategie perché la grandezza in gioco non è più discreta ma continua (pongo). Che cosa succede anche con bambini molto piccoli? La richiesta di produrre un numero fa scattare subito l'idea che si debbano fare parti di ciò che sembra 'uno' per poter realizzare il conteggio.
Ed ecco che il pasticcio è servito: ora occorre districarlo con molta pazienza ed attenzione, ripetendo insieme anche più volte le esperienze e ragionandoci sopra, parlando e confrontando strategie e modi di spiegare.

Il conteggio con grandezze continue: la misura
Immaginiamo che un bambino governi benissimo tutti i principi in situazioni di grandezze discrete e quindi produca dei conteggi esatti. Se cambia il contesto che cosa succede? Quali nuove competenze dovrebbe avere quando gli si chiede di contare quanti passi ci sono da un posto a un altro o di dire quanta acqua contiene una bottiglia? Quali nuovi problemi si pongono in queste situazioni? In entrambi i casi questo bambino arriva a produrre un numero, ma nel secondo caso, in modo più complesso, per farlo consapevolmente dovrà arrivare a comprendere che si trova di fronte a ciò che noi chiamiamo 'grandezza'(nel primo caso una lunghezza, nel secondo una altezza o un volume). Inizialmente, nel contare i passi, egli può porsi nella stessa situazione di contare scalini, molto diverso è il secondo caso. Non si tratta più di organizzare una collezione spazialmente o logicamente ma di costruire la collezione operando un confronto. In questo caso non è detto però che la presa di coscienza effettiva del problema di misura sottostante, del fatto che sta operando un confronto, arrivi contestualmente all'abilità di contare passi o bicchieri di acqua (azioni che possono compiere con una certa padronanza anche bambini molto piccoli). Non necessariamente quindi le due competenze sul contare, nel discreto e nel continuo, si acquistano in sequenza: si possono contare i passi o i bicchieri d'acqua o gli oggetti facendo riferimento a idee diverse, ma quasi nello stesso tempo. Il 'bisogno' dell'unità di misura probabilmente viene dopo, come si può verificare facilmente osservando come a loro poco importi di definirla, proprio per il cambiamento concettuale che ancora non hanno raggiunto.
Come ho più volte rilevato, tutto dipende molto dal fatto che l'insegnante riesca e in quale modo a compiere con gli allievi delle opportune riflessioni sulle esperienze fatte e nelle fasi di lavoro che seguono il momento dell'azione concreta.
Mentre per contare passi, forse non serve avere il senso del misurare perché il bambino in realtà conta 'gesti' che sono discretizzati dalla loro ritmicità, nel 'contare' acqua intervengono altri fattori.
Riporto alcuni stralci da una discussione avvenuta in una sezione di cinquenni[2] per esemplificare meglio ciò che avviene.
I bambini stanno cercando di dire quanta acqua c'è in un contenitore e la 'contano' usando dei bicchieri di plastica.
... Ma non l'abbiamo contata giusta perché qui ce n'è tanta e qui ce n'è poca... dobbiamo contare l'acqua uguale un bicchiere intero

[2] Scuola dell'Infanzia Collodi del 1° circolo di Spinea (VE), Insegnanti Marica Loppo e Margherita Martinis

…nooo! nei bicchieri è sbagliata la misura, questo è (il bicchiere) l'originale, solo questo è quello giusto da guardare (intende confrontare), devi prendere l'originale e prendi un altro e li metti vicini ... se sono uguali lo metto là e ne prendo un altro, poi un altro…
…Dobbiamo fare i bicchieri pieni di acqua uguali
…uguali si vede dall'altezza
…così non li conteremo mai, forse dobbiamo sentire il peso dobbiamo prendere una bilancia e mettere sopra i bicchieri e la bilancia ti dice quanto alta è l'acqua ….se vedi i numeri della bilancia se un bicchiere è alto e uno basso i numeri sono diversi ..solo fare la riga non si capisce niente
…Ci serve la bilancia perché se l'acqua è bassa e alta non contiamo la stessa acqua e fai fatica a vedere quanta è. Con la bilancia vedi il numero, vedi se pesa uguale.

Un altro gruppo che deve quantificare un foglio di carta decide di tagliarlo a pezzi e poi numera i pezzi ad uno ad uno. L'insegnante commenta dicendo: "I bambini tagliano dei pezzi di carta senza porsi il problema se i pezzi debbano o meno essere uguali... quello che era stato evidente e intuitivo per l'acqua (e lo sarà per il pongo) sembra non esserlo più per il foglio di carta... sembra non valgano le stesse regole..."
Infatti i bambini dicono:
…i pezzi di carta non sono tutti della stessa misura
…è giusto perché tanto sono tutti quadrati
…Non serve uguali, basta farli come vogliamo
….non importa che i quadrati della carta siano uguali, basta contarli

Ciò che dicono i bambini è la dimostrazione di come sotto le operazioni che compiono per contare ci sia una presa di coscienza ancora parziale del significato matematico. L'insegnante dovrà spingerli a confrontare le situazioni e farli riflettere sulle operazioni che compiono per cercare gli elementi comuni e le differenze nei diversi casi, soprattutto dovranno capire che l'obiettivo della quantificazione non è l'oggetto in sé, ma una grandezza.
Tornando all'acqua, si tratta di capire che per riprodurre una quantità di acqua che non ha forma propria occorre un contenitore che, non appena viene individuato, partecipa alla costruzione mentale di un 'campione'. Bambini molto piccoli sono influenzati, nel definirne una quantità, proprio dalla forma del contenitore per cui la stessa acqua se travasata in un contenitore più stretto e più alto diventa 'di più' perché aumenta l'altezza del livello. I bambini confrontano questa altezza e non il volume, come emerge anche dal brano di discussione presentato prima.
Versando l'acqua in un bicchiere, si assume l'acqua in esso contenuta come campione 'condiviso' di 'quantità' che si andrà poi a confrontare. Solo quando il bambino sarà in grado di cogliere il discorso nella sua complessità, ciò che farà non sarà più un semplice conteggio ma una vera e propria misura. Quindi ciò che si realizza dicendo quanta acqua c'è in una brocca, o quanto zucchero contiene una ciotola o quanto è lunga una strada non è una semplice operazione finalizzata al conteggio, è qualcosa di molto di più e di molto diverso. A un certo punto del loro percorso cognitivo, mediato dagli interventi intenzionalmente costruiti dall'insegnante, i bambini saranno in grado di comprendere la necessità di 'confrontare' caratteristiche omogenee delle cose

per la necessità di riprodurre o comunicare una misura e lo faranno, direttamente o indirettamente, con un metodo ben preciso ed essendone consapevoli.
Come dice bene Marchi (Manara&Marchi, 1993), il problema della misura nasce dall'esigenza del confronto e dalla capacità di costruirsi gli strumenti per operarlo: "Naturalmente la parola confrontare non significa nulla se non si precisa il criterio, gli strumenti con cui si opera."

Sempre nella stessa sezione di cinquenni, per 'confrontare' l'acqua, ad un certo punto i bambini decidono di usare la bilancia e stabiliscono come trasformare in numero il risultato del confronto. E quel numero diventa a sua volta il termine di paragone per riempire correttamente i bicchieri con la stessa quantità di acqua. In conclusione, con queste operazioni non solo essi rendono 'contabile' ciò che prima pareva non esserlo, ma traducono con un numero il risultato di un confronto; questo numero esprime quante volte si deve ripetere il campione per ottenere quel risultato.
Per i bambini l'importanza dell'unità di misura viene dopo, in un primo momento probabilmente capiscono solo che stanno contando quante volte devono ripetere una stessa azione come vuotare il bicchiere o tagliare a pezzi la carta, ma ancora non hanno preso davvero coscienza del perché compiono quell'azione. Il contare è inizialmente più legato ai gesti, alle operazioni che si fanno per ottenere un risultato numerico, che alla necessità di 'misurare' la grandezza fisica su cui stanno operando. I bambini possono compiere azioni che raggiungono un risultato, che per loro è una cosa concreta, anche senza un'effettiva presa di coscienza. Anche dire che il bicchiere non va bene e che forse sarebbe meglio usare il cucchiaio, non necessariamente indica la conquista di quello che davvero vi soggiace, ma lo fanno, e questo 'fare' sfocerà poi nell'azione consapevole, soprattutto se il lavoro a scuola andrà in quel senso e non darà per scontato ciò che scontato non è. È quindi molto importante che ciò sia ben chiaro per l'insegnante, con tutte le conseguenze 'complesse' che ne derivano, per uscire, come vedremo tra poco, dai numeri naturali.
Il numero che si trova al termine di un conteggio che nasce dal confronto può non essere sempre lo stesso perché dipende dall'unità di misura che è stata scelta. Partendo dalla stessa grandezza, quindi, si può arrivare a numeri differenti. Come varia il numero è un problema interessante da porre ai bambini: Che cosa ti aspetti che succeda se invece di contare la polenta a bicchieri la conti a cucchiai? Troverai un numero più grande o più piccolo? Perché? Questo apre a ragionamenti di proporzionalità che, lavorando in una situazione di confronto e quindi di rapporti, acquistano un grande significato.
Ma, ritornando a quel che dicevo prima, c'è ancora un altro problema da affrontare: non solo le unità di misura devono essere sempre uguali cioè si deve riempire il bicchiere sempre nello stesso modo, si devono fare i passi sempre lunghi uguali …, ma il numero che si usa, in questo tipo di conteggio, non è più un numero naturale, **è un numero razionale**, è il rapporto tra due grandezze, la grandezza da misurare e l'unità di misura scelta; il risultato del conteggio, infatti, difficilmente è un numero come 3, molto più spesso è un numero del tipo 3 e un pezzettino… 3 e mezzo ecc. Anche bambini di cinque anni si accorgono che non è più come prima e dicono: "Servono più numeri per dire le cose che stanno in mezzo…"[3]

---

[3] Riporto la frase da una discussione fatta dall'insegnante Anna Aiolfi nella Scuola dell'infanzia Andersen del 1° circolo di Spinea (VE).

Questo passaggio ad un altro insieme numerico, che costituisce un ampliamento dei naturali, deve essere ben chiaro nella mente degli insegnanti perché altrimenti di rischia di trasmettere ai bambini l'idea che 'quel che avanza' non faccia parte della quantità da contare/misurare o sia una specie di accessorio che posso mettere da parte, che, appunto, non conta. Ogni grandezza va quantificata (e può essere quantificata) nel modo adatto.
È evidente che un bambino di 5 anni non è in grado di padroneggiare i concetti che permettono di definire correttamente le parti di un intero, ma sicuramente si accorge che se i bicchieri non vanno più bene per contare l'acqua allora può usare i cucchiai e magari contare a bicchieri e cucchiai. E quanti cucchiai di acqua ci vogliono per riempire un bicchiere? Da una situazione si passa a un altra e poco per volta si costruisce l'idea che quando si misura non si finisce mai di fare parti e che queste diventano sempre più piccole finché si è contato tutto.
Quindi non ha senso interrompere il discorso all'unità di misura principale, occorre dare l'idea che si possono fare parti più piccole e che quelle parti più piccole è conveniente che siano in relazione con quelle più grandi contate prima. Facendo questi conteggi, non si costruisce solo l'idea di unità di misura, ma di 'sistema di misura', cioè di un insieme di unità diverse in relazione fra loro, e che è questo che ci permette di quantificare grandezze continue.
La costruzione delle abilità di misura va di pari passo con la definizione di questo nuovo insieme numerico che, diventati più grandi, potrà essere conosciuto in tutte le sue sfaccettature. Ad esempio i bambini poco per volta capiranno il senso delle cifre dopo la virgola e il loro collegamento con la scansione in sottomultipli successivi, relativamente all'unità di misura scelta. Fin dall'inizio però è importante trasmettere l'idea che i numeri razionali nascono da un rapporto fra due grandezze, di cui una è presa come unità, che questa, a sua volta, può essere frantumata in parti più piccole per misurare gli 'avanzi' e che questo processo teoricamente non ha fine. Mentre imparano a misurare, i bambini si appropriano del significato dei numeri razionali e piano piano intuiscono le differenze tra questi numeri e i naturali, che non consiste solo nel fatto percettivamente evidente che questi numeri hanno la virgola; ad esempio, attraverso opportune esperienze, si possono anche accorgere che in questo insieme numerico non ha senso parlare di numero precedente e numero successivo perché tra un numero razionale e l'altro ci sono infiniti numeri, è un insieme 'denso', anche se è ancora numerabile.

La successione dei numeri e la relazione d'ordine

Quando il bambino dice la filastrocca dei numeri sa che c'è un ordine definito dei numeri naturali. Quest'ordine dipende dalla regola con cui si costruisce la serie dei numeri naturali. Immaginiamo di aver attribuito il numero cardinale 5 ad un gruppo di 5 oggetti. Che numero viene dopo 5? Per costruire il successivo di un numero devo aggiungere uno. Quindi ogni numero naturale deriva da quest'operazione: +1. Due numeri che sono in relazione con questa regola sono uno il precedente e uno il successivo della serie dei numeri naturali. Non sarebbe così se trattassimo i numeri razionali, come abbiamo visto prima.
Alcuni ricercatori, analizzando il lavoro di Gelman&Gallistel, hanno verificato che la scoperta di questa relazione è fondamentale anche per l'acquisizione del principio di cardinalità. Un bambino acquista consapevolezza di questa relazione quando si accorge che un numero è più grande se compare 'dopo' nella lista che usa per il conteggio e che andare avanti di una parola corrisponde ad aggiungere una unità. I passi per arrivare a questa consapevolezza variano da bambino a

bambino: alcuni da principio sanno valutare quantità differenti, cioè sanno che quattro biscotti sono più di tre, ma non realizzano l’idea che si passa da tre a quattro aggiungendo uno (un biscotto). Quindi c’è anche il percorso complementare: andare avanti di un’unità (un biscotto) corrisponde all’andare avanti di una parola (numero). Abbinando questi fatti a quanto detto prima sul ruolo dell'ultimo numero della conta si ha la costruzione completa della cardinalità.
D'altra parte la costruzione dell'insieme dei naturali come insieme ordinato si basa proprio su una relazione di ordine che consente di decidere chi viene prima e chi viene dopo in base ad una regola.[4]
Lo strumento didattico che permette di visualizzare concretamente la relazione d’ordine è la retta numerica che non manca mai sulle pareti dell’aula nelle prime classi di scuola primaria e fa la sua comparsa, spesso, già nella scuola dell’infanzia. Peccato però che negli anni successivi, quando sarebbe forse più utile, spesso sparisca... Siccome la retta numerica non è solo uno strumento, ma anche un oggetto matematico con caratteristiche ben definite, il suo uso va introdotto con un certa cautela. L’uso della retta numerica, infatti, può aprire la visuale verso nuovi insiemi numerici, tra cui quello dei razionali, accompagnando i modi di ‘contare’ propri della misura, di cui abbiamo parlato prima.
Per capire come possa essere utilizzato nelle classi successive alla prima e con quali scopi, ma soprattutto quali idee matematiche si trasmettano agli allievi usando questo strumento, conviene cominciare dall’inizio cioè da come si costruisce la linea dei numeri.

Il primo problema da affrontare è quanto sia naturale o comprensibile per un bambino trasformare un numero in una lunghezza. Questo può avvenire grazie al fatto che tra l'insieme dei numeri e l'insieme delle 'lunghezze' esiste questo collegamento: se sommo due lunghezze, il risultato è ancora una lunghezza, c’è un elemento neutro che è la lunghezza nulla, la somma è associativa e commutativa, in breve le operazioni che posso fare con le lunghezze sono simili a quelle che posso fare con i numeri naturali e posso passare da un sistema all’altro senza fare errori.[5] Questo però di solito non è esplicitato e si dà per scontato che per gli allievi sia spontaneo questo 'parallelismo': contare 3+2 con i numeri 'è come' prendere un segmento di lunghezza 3 e sommarlo ad un segmento di lunghezza 2 perché avvicinando i due segmenti si ottiene un segmento di lunghezza 5 (è la stessa operazione che sta dietro l'uso dei regoli Cuisinaire!). Questo ragionamento sulla relazione tra lunghezze e numeri è alla base della

[4] Bisognerebbe predisporre attività significative anche sull’uso dei numeri ordinali, argomento che spesso viene affrontato solo tramite schede, per farne capire i legami con i numeri cardinali e le differenze determinate da questo modo di guardare e di usare i numeri, non solo per la diversità delle parole utilizzate. Cosa significa uno e cosa significa primo? Che collegamento c’è e quali differenze notiamo nel ‘comportamento’ di questi nuovi numeri?

[5] La stessa operazione che solitamente si fa con le lunghezze si potrebbe fare altrettanto bene con pesi o volumi scoprendo così che il peso 1 + il peso 2 dà come risultato il peso 3 o che il volume 2 + il volume 4 dà come risultato il volume 6: in teoria se la proprietà è di tipo *estensivo,* cioè dipende dalla massa del campione, il parallelismo tra numeri e misura delle grandezze funziona esattamente come per le lunghezze, se invece la proprietà è di tipo *intensivo*, come la temperatura, il parallelismo non funziona più perché una temperatura 1 sommata ad una temperatura 2 non dà sicuramente una temperatura 3. C’è da chiedersi come mai a scuola si utilizzi sempre la lunghezza come modello per le attività sul numero come misura. È solo un espediente didattico che, come molti altri, potrebbe essere abbandonato o ci sono ragioni pratiche, culturali, percettive, pedagogiche...? La discussione è aperta, ma intanto possiamo osservare che mentre con le lunghezze la posizione dei numeri risulta vincolata, e quindi si può usare la retta numerica come modello, utilizzando i pesi o i volumi i numeri risultano liberi e la ri-costruzione del loro ordinamento dovrebbe basarsi su ragionamenti meno dipendenti da aspetti percettivi e più legati al significato.

costruzione della linea dei numeri, ma sotto questa rappresentazione si celano ben altri misteri e nascono problemi di una certa rilevanza.
La lunghezza di un segmento è un invariante (Manara&Marchi, 1993) che può essere rappresentato con un numero. Se si rappresenta solo con numeri naturali è ovvio che si opera una restrizione, cioè si considerano solo le lunghezze che siano un multiplo dell'unità di misura scelta rappresentata dal segmento di lunghezza 1.
Concretamente che cosa avviene quando si costruisce in classe la linea dei numeri? Si trasforma una lunghezza in numero, 'camminando' lungo una retta, attraverso una procedura di 'misura'. C'è però consapevolezza di questo fatto o la linea è solo una rappresentazione fine a se stessa?
Proseguendo nelle attività con i bambini è facile maneggiare i 'segmenti' (o i regoli) e domandarsi se sia possibile costruirne altri, per esempio, 'lunghi' quanto due messi assieme. È a questo punto che l'insegnante deve sapere bene che quest'operazione è possibile grazie all'isomorfismo (il 'parallelismo' tra numeri e lunghezze si definisce così) con l'operazione di addizione nei naturali. La complessità di quest'uso delle lunghezze per rappresentare numeri deve però emergere e diventare poco per volta patrimonio anche degli allievi. E allora, contemporaneamente o di seguito, si dovrà parlare di misura della lunghezza di un segmento come risultato del confronto con un segmento campione, e che il numero ottenuto dal conteggio dice quante volte si deve ripetere il campione per ottenere la nuova lunghezza.
Queste due cose, che s'intersecano nelle attività concrete proposte a scuola, consentono di sostituire alla 'lunghezza' astratta di un segmento il numero che dà la sua misura e, proprio grazie all'isomorfismo, di sostituire con un'addizione la procedura concreta di allineamento di segmenti uno dopo l'altro.

Qui nasce il secondo problema da affrontare, il significato che assume lo zero in un contesto di misura. Probabilmente fino a quel momento lo zero era conosciuto dagli allievi solo per la sua cardinalità, ora essi dovranno adattare il vecchio modello al nuovo e dare senso a quella 'cardinalità nulla' in un contesto differente in cui entrano in gioco questioni di ordinamento, di proporzionalità, di rapporto. I bambini possono 'giocare' con la retta dei numeri, in un primo momento per costruirla allineando segmenti tutti uguali e poi per 'numerare' i segmenti sommandoli: a partire da un punto di inizio, che in modo abbastanza spontaneo diventa lo zero, potranno costruire un segmento 'lungo' 1, 2, 3, … n volte un campione, mettendo in corrispondenza biunivoca gli estremi di quei segmenti con i naturali che in tal caso ne danno anche la misura.
Un'attività che ho sperimentato più volte per introdurre la retta numerica, facendo attenzione all'intreccio di tutti questi diversi aspetti, è quella denominata 'Il tempo di una fiaba' (UMI-SIS-MIUR, 2003) in cui i bambini sono invitati a rappresentare il tempo della storia dei tre porcellini, opportunamente adattata, su una retta. Il percorso didattico suggerito è molto complesso per cui rimando al testo, ma mi preme sottolineare come introducendo la retta in questo contesto le necessarie operazioni di 'discretizzazione' aprano verso la misura e quindi costruiscono fin dall'inizio un significato corretto dei numeri che si leggono sulla retta. Con questa attività i bambini costruiscono una retta da 0 a 7 che numera i giorni in cui si svolge la storia (dal lunedì alla domenica) e sanno perfettamente che cosa rappresenti lo zero perché sono loro che decidono

Fig. 5 - La linea del tempo della storia dei tre porcellini con i disegni che rappresentano i fatti successi in ogni giornata collocati al mattino, al pomeriggio, alla sera... (Classe prima Scuola primaria Nino Costa, Primo circolo didattico di Pinerolo, Ins. Delia Turina)

Fig. 6 - I bambini fanno rotolare la ruota della giornata divisa in settori (mattino, pomeriggio...) e segnano con tacche verticali la fine di ogni parte. Solo la fine di ogni giorno viene numerata progressivamente e nasce così l'esigenza di mettere zero all'inizio della retta. (Classe prima della Scuola primaria di Agazzano (PC), Ins. Valeria Perotti)

di metterlo per indicare con la prima tacca l'inizio del tempo della storia. Ma tra 0 e 1 c'è altro tempo... e poco per volta quel tempo in mezzo diventerà anche nuovi numeri. (Fig. 5-6)

Dopo questa attività, la retta deve essere poco per volta decontestualizzata per diventare un oggetto matematico. Per evidenziare che la 'lunghezza' del segmento campione determina la tacca verticale espressa con il numero 1, io abituavo i miei allievi a dire 'uuuuuno' facendo scorrere il dito dallo zero all'uno. Mi sembrava che in questo modo fosse più chiaro che stessero numerando segmenti, non punti etichettati da un numero; così facendo, pensavo di aiutarli nella concettualizzazione del numero come misura perché da un lato fissavo il significato dello zero come punto di partenza e dall'altro li obbligavo a mettere sempre in relazione i numeri con le grandezze misurate.

Il terzo problema che vorrei evidenziare nasce, forse, dal nome stesso: il fatto che si parli comunemente di 'linea' dei numeri' anziché di 'retta' è secondo me abbastanza significativo perché questa terminologia richiama in mente solo lo strumento per contare che, tracciato sul pavimento o sul quaderno, visualizza, come ho spiegato prima, l'ordinamento dei numeri fino a n (il valore di n dipende dall'età degli allievi) e permette di eseguire dei calcoli velocemente alleviando il carico cognitivo generato dalla 'fatica' di ricordare i numeri con cui contare. Gli allievi, per usarla correttamente con questo scopo, devono però padroneggiare il seguente ragionamento: per fare 3+2, devo partire dalla posizione del numero 3 e poi spostarmi di 2 posizioni verso destra senza contare il numero (la posizione del...) da cui parto. Quindi il primo numero dell'addizione rappresenta uno stato iniziale, mentre il 2 è un operatore che, preceduto dal segno 'più', produce lo spostamento di uno spazio per volta verso destra e, preceduto dal segno 'meno', lo spostamento verso sinistra. Chiarire che i due numeri, il 3 e il 2, in questo caso, hanno 'statuti diversi' è forse utile (Vergnaud, 1985), ma non porta necessariamente a una

concettualizzazione corretta. Secondo me, sarebbe molto più semplice ragionare su che cosa rappresentano veramente i numeri su quella retta.
Che cosa significa ‘partire dal 3’? Sulla linea dei numeri, i simboli numerici occupano una posizione che si raggiunge solo partendo dallo zero e in realtà sono delle ascisse. La linea non va concepita dagli allievi come un insieme di indicatori di posizione statici, un insieme di punti dati, ma come uno strumento ‘dinamico’, non perché il 3 si raggiunge facendo tre ‘salti’ da 0 a 3 (cosa che peraltro non viene mai fatta quando il 3 è considerato il numero di partenza), ma anche perché cambiando l’unità di misura che rappresenta la lunghezza 1, la lunghezza che rappresenta il 3 cambia, pur mantenendo lo stesso valore numerico. Se la lunghezza 3 sommata alla lunghezza 2 permette di raggiungere la lunghezza 5, si ristabilisce il parallelismo (isomorfismo) tra somma di lunghezze e somma di numeri e le cose vanno a posto. (Fig. 7)

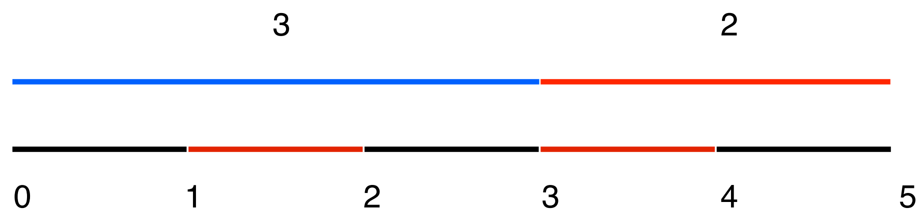

Fig. 7 - Il 3 è rappresentato da un segmento di lunghezza 3 e il 2 da un segmento di lunghezza 2 che uniti permettono di arrivare alla tacca del 5 sulla retta.

A seguito del contare non si costruisce solo l’idea del numero, si mettono anche le basi per la nascita dell’aritmetica. Se ho due ceste di mele e voglio sapere quante ne posseggo in tutto, posso rovesciarle da qualche parte e contare l’insieme che così ho creato. Nello stesso tempo, se ho già contato le mele di ciascun cestino, posso discutere il fatto che ottengo lo stesso risultato se prendo uno dei due cardinali noti e ‘conto’ di seguito al primo numero tante unità quante mi dice il secondo. Quei segmenti sulla retta divengono poco per volta esattamente come mele nei cesti, con un supporto ‘grafico’ forte perché l’addizione si mette in parallelo al camminare a tappe, all’aggiungere passi.
Si entra così nel mondo delle operazioni con tutte le loro interessantissime proprietà e la matematica si amplia in un percorso che non si conclude mai: ad esempio, da questa esperienza, dovrebbe subito nascere l’esigenza di ‘guardare’ all’operazione inversa, come altra faccia dello stesso operare, cosa che purtroppo non fa parte della prassi didattica usuale.

Risolti tutti i problemi a cui ho accennato, la linea dei numeri può diventare il punto di partenza per molte situazioni problematiche interessanti.
Mentre gli spostamenti verso destra sono in pratica senza fine, quelli verso sinistra hanno come termine ultimo lo zero che rappresenta una specie di barriera ... a meno di introdurre i numeri negativi molto presto, come peraltro sarebbe auspicabile, per dare senso ad alcune esperienze che i bambini fanno abitualmente come leggere le misure di temperature ‘sotto lo zero’, segnare i debiti che accumulano giocando a figurine ecc.

La retta, già nella sua prima costruzione, evidenzia che tra un numero naturale e il successivo c'è uno spazio vuoto... ma è veramente vuoto? I discorsi fatti prima sui razionali si possono riprendere anche dagli spunti offerti dalla retta dei numeri intesa come oggetto matematico. È quindi uno strumento che 'pone problemi' forse più che risolverne... e questo di per sé non sarebbe un male. Ciò che mi preoccupa è legato non tanto allo strumento in sé quanto all'uso che se ne fa.[6]
Un problema interessante che gli allievi stessi si pongono - mi riferisco ovviamente alla mia esperienza - semplicemente giocando con questo strumento, è quello di provare ad immaginare quei famosi numeri che stanno 'in mezzo', a cui abbiamo accennato raccontando della linea del tempo nella storia dei tre porcellini. Ad esempio, che numeri ci sono tra 1 e 2? Il fatto che tra 1 e 2 ci sia un segmento può far maturare l'idea che quello 'spazio' sia fatto di qualcosa, cioè che possa essere una specie di contenitore per altri numeri da associare non più alle tacche individuate con la scelta dell'unità di misura, ma a tacche 'interne'. A qualcuno potrebbero venire in mente 'numeri nuovi' come 1 e mezzo, 1 e tre quarti... 1,5 ..., frazioni e numeri decimali. Trasformare un numero in una lunghezza consente di passare dal discreto al continuo e quindi si ritorna alle situazioni che ho descritto nel paragrafo precedente e, in ultima analisi, di nuovo ai numeri razionali e alle loro proprietà.
Quest'attività di ricostruzione della retta con l'aggiunta dei nuovi numeri può partire da situazioni problematiche in cui la scrittura del numero decimale si affronta insieme alla costruzione del suo significato come quella intitolata 'I numeri decimali', sempre reperibile fra gli esempi di *Matematica 2001* (UMI-SIS-MIUR, 2003), che ho avuto modo di sperimentare più volte sempre con ottimi risultati. Il problema di sommare numeri naturali come 2 e numeri razionali come 1,5 nasce in un contesto nel quale gli allievi sono stimolati a produrre strategie spontanee che fanno riferimento alla loro conoscenza dei numeri: la struttura dei numeri naturali costituisce in un primo momento un ostacolo per la comprensione dei decimali, ma dal confronto delle strategie e dalla negoziazione dei significati emerge poi la visione corretta.
Come collocare 1,5 - che significa 1 e mezzo - sulla retta? La discussione su questo fatto conduce a una esplicitazione del significato della rappresentazione simbolica e del suo collegamento con la costruzione degli insiemi numerici. In questo modo gli allievi gradualmente, in un percorso che non ha mai fine, arriveranno a concepire la 'retta continua', in cui i 'buchi' lasciati dai razionali si riempiranno di nuove entità, i numeri irrazionali.
La retta diventerà quindi, come deve essere, la rappresentazione grafica dei numeri reali.

Bibliografia

Alibali, M. W., Di Russo, A. A. (1999). "The function of gesture in learning to count: more than keeping track", in: *Cognitive Development*, 14, 37-56, Elsevier, Cambridge, MA
Arzarello, F. & al. (2010). *Matematica: non è solo questione di testa*, Erickson, Trento
Bartolini Bussi, & al. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21, Modena

[6] L'uso didattico più ricorrente è finalizzato, come ho già detto, a supportare i bambini nel conteggio al fine di migliorarne le prestazioni e se ne consiglia l'uso anche con bambini aventi difficoltà specifiche nell'apprendimento; a mio avviso occorrerebbe però evitare che un uso meccanico ne snaturasse totalmente il significato matematico.

Briand, J. (1993). *L'énumération dans le dénombrement des collections: Un dysfonctionnement de la trasposition didactique*, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux (Directeur de Thése: M. Guy Brousseau)
Fuson, K. C. (1988), *Children's counting and concepts of number*, New York, Springer-Verlag
Gelman, R., Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts
Lakoff, G., Nùñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being,* Basic Books (trad. italiana, Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica, Torino, Bollati Boringhieri, 2005)
Lucangeli, D., Tressoldi, P. E. (2002). "Lo sviluppo della conoscenza numerica: alle origini del 'capire i numeri'", in: *Giornale Italiano di Psicologia* a.XXIX, n.4, dicembre
Maldera, A. (2005). "Continuo e discreto: atteggiamenti cognitivi per descrivere il mondo", in Mazzoli, Paolo (a cura di), *Capire si può*, Roma, Carocci Faber
Manara, C.F., Marchi, M. (1993). *L'insegnamento della matematica*. Editrice La Scuola
Merlo, D. (2009). "Il laboratorio di Matematica nella scuola primaria", in: *Conferenze e Seminari 2008-2009 Associazione Subalpina Mathesis*
Merlo, D. (2010). "Che cosa si può contare: un percorso didattico e formativo per costruire il senso del numero" in: *Conferenze e Seminari 2009-2010 Associazione Subalpina Mathesis*
UMI-SIS-MIUR (2003), *Matematica 2001: Raccolta di attività di supporto curriculare per la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado* – Pubblicazione MIUR, nell'ambito del protocollo d'intesa UMI-SIS-MIUR (a cura di G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, O. Robutti) (il volume è accessibile e interamente scaricabile accedendo al seguente indirizzo http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2001/matematica2001.html)
Piaget, J., Szeminska, A. (1976). *La genesi del numero nel bambino*, Firenze, La Nuova Italia
Pontecorvo C., Ajello A. M., Zucchermaglio C. (1991). *Discutendo si impara*, Interazione sociale e conoscenza a scuola, Roma, La Nuova Italia Scientifica
Sarnecka, B., Cerutti, A., Carey, S. *Unpacking the Cardinal Principle of counting: A Last-Word Rule + the Successor Function*, http://www.cogsci.uci.edu/cogdev/Sarnecka/
Steffe, L.P., & al. (1983). *Children's counting types. Philosophy, Theory, and Application.* Praeger Scientific Publisher, New York
Vergnaud, G. (1985). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della Matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. in: Artusi Chini, L. (a cura di). *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna, Zanichelli
Vygotskij, L. S. (1987). *Il processo cognitivo*, Torino, Universale Bollati Boringhieri
Vygotskij, L. S. (1992). *Pensiero e linguaggio*, a cura di L. Mecacci, Bari, Biblioteca Universale Laterza