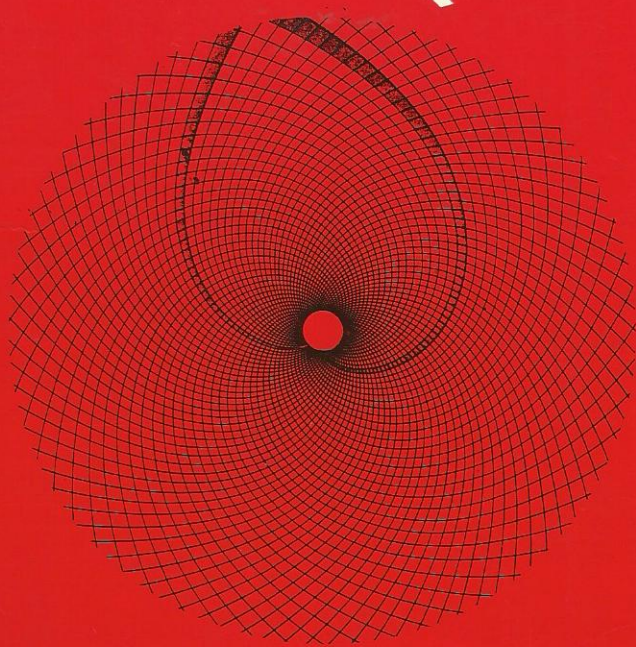


# MATHESIS

SEZIONE PELIGNA - SULMONA -

## INCONTRI con la MATEMATICA 1988/'89



Quaderno **2-3**

## SOMMARIO

- pag.* 5            Prefazione
- pag.* 7            Geometria e creatività: i frattali,  
*di Emma Castelnuovo*
- pag.* 19           Le costellazioni tra geometria e mito,  
*di Sebastiano Conte*
- pag.* 29           Le isometrie piane,  
*di Mario Ferrari*
- pag.* 43           Matematica e lingua  
*di Bruno D'Amore*
- pag.* 61           Le trasformazioni e gli invarianti  
in matematica, *di Walter Maraschini*
- pag.* 67           Gioco, sviluppo, apprendimento,  
attitudini sociali e matematica  
*di Mario Barra*
- pag.* 83           L'angolo dei giochi

# **GEOMETRIA e CREATIVITA'**

## ***I frattali***

EMMA CASTELNUOVO

Il titolo che è stato dato a questo mio intervento è molto bello ma anche molto vasto. Dico subito che non farò un discorso di carattere generale ma mi limiterò a portare un esempio in cui "geometria e creatività" o meglio "logica e fantasia" illuminano in modo straordinario una ricerca, quella dei «frattali», che va sviluppandosi in questi anni.

L'argomento «frattali» è stato ideato e studiato dal matematico francese Benoit Mandelbrot, che lavora da molti anni negli Stati Uniti. Si tratta di ricerche che legano strettamente la matematica con le scienze sperimentali.

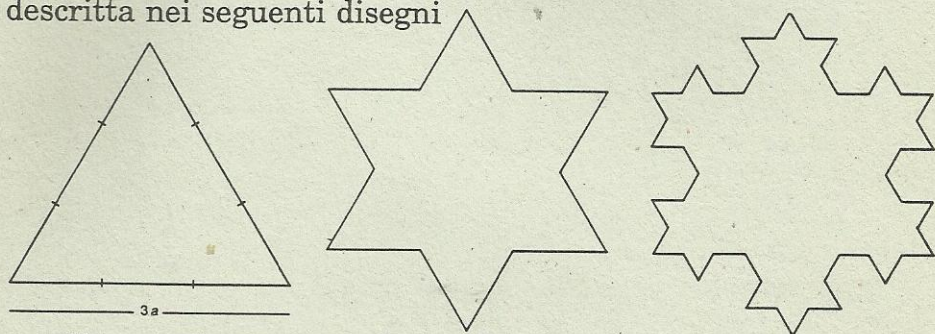
Affascinata da questi lavori e pensando all'interesse che ne potevano avere i ragazzi delle nostre scuole secondarie, ho cercato insieme ai miei amici Claudio e Daniela Gori-Giorgi di renderli alla portata di questi allievi. Daniela ha svolto l'argomento con i suoi studenti di liceo scientifico.

Devo subito dire che il nostro lavoro non è stato semplice, anche se, come vedrete, si riduce a una breve trattazione; ma la breve trattazione, che ci proponiamo del resto di completare, ha portato per lunghi mesi a una sottile ricerca didattica, volendo tradurre in modo elementare lo spirito di un lavoro dove s'intrecciano logica e fantasia, e spesso non si avverte dove finisce l'una e ha inizio l'altra.

Cominciamo da un'osservazione sulle forme che si trovano in natura, messe a raffronto con le figure che intervengono nel corso ordinario di geometria; a scuola si parla del triangolo, del quadrato, del cerchio, del cono,... La natura, invece, presenta delle

forme molto più complesse; talvolta, queste forme, sembrano ripetere lo stesso motivo in scale differenti. Basta pensare a un tratto di costa frastagliata quando venga osservato da un aereo da altezze diverse: a grandi altezze la costa sembra liscia ma, a mano a mano che ci si abbassa si notano insenature con dettagli che sembrano ripetersi; o pensare ai rami di un albero che danno luogo a ramificazioni sempre più piccole ma con lo stesso motivo; o esaminare con un microscopio un fiocco di neve cambiando la potenza della lente.

È proprio la regolarità di un cristallo di neve che aiuta a matematizzare forme e trasformazioni che si verificano in natura. Cominciamo dunque dallo studio matematico di un fiocco di neve (risale a Keplero e a Gian Domenico Cassini, 1600), e cioè da una matematica classica. La costruzione di un fiocco di neve è descritta nei seguenti disegni



Si parte da un triangolo equilatero di lato  $3a$ . Si divide ogni lato in tre parti uguali, e sulla parte di mezzo, presa come base, si costruisce un triangolo equilatero, togliendo la base. Si continua così il processo ottenendo dei poligoni con lati sempre più piccoli. I valori dei lati e dei perimetri sono i seguenti:

$$\text{Lati: } 3a, a, \frac{a}{3}, \frac{a}{9}, \dots$$

$$\text{Perimetri: } 9a, 12a, 16a, \dots$$

È chiaro che la lunghezza dei perimetri cresce indefinitamente; si direbbe che altrettanto avviene per le aree. Calcoliamo le successive aree a partire da quella del triangolo. Si ha:

$$A_1 = \frac{9}{4} a^2 \sqrt{3} , A_2 = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} , A_3 = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} , \dots$$

La somma di queste aree risulta:

$$A = \frac{9}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} + \frac{4}{27} a^2 \sqrt{3} + \dots$$

Si tratta, a parte il primo termine, di una progressione geometrica infinita di ragione  $\frac{4}{9}$ . Quindi l'area totale è data da:

$$A = \frac{9}{4} a^2 \sqrt{3} + \frac{\frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{18}{5} a^2 \sqrt{3}$$

Si scopre così che l'area totale non è infinita! Al limite il suo valore supera solo di poco una volta e mezzo l'area  $A_1$  del triangolo da cui siamo partiti.

Queste considerazioni "classiche" intorno all'infinito affascinano sempre i ragazzi.

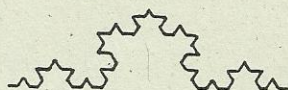
Facciamo ora un passo avanti; un passo che ci condurrà a ricerche più recenti e, ancora una volta, a indagare sulla natura.

Consideriamo un solo lato del triangolo: abbiamo diviso il lato in 3 segmenti uguali e, cancellando la parte centrale, abbiamo costruito una poligonale formata da 4 segmenti



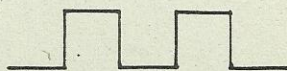
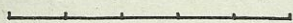
Poi, partendo da ogni segmento, si ripete la stessa operazione. Continuando lo stesso processo otteniamo delle poligonali con un numero sempre maggiore di lati; al limite otteniamo una

curva: *la curva fiocco di neve.*



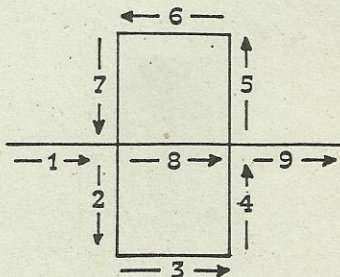
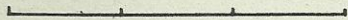
Viene spontaneo di chiedersi: è possibile esprimere questa costruzione con una formula? Possiamo, in qualche modo, esprimere 3, numero delle parti in cui è diviso il segmento iniziale, con 4, numero dei segmenti che otteniamo ogni volta?

Presentiamo un altro esempio: la costruzione della "Greca" (nella sua forma più semplice) partendo da un segmento. Dividiamo il segmento in 5 parti uguali e cancelliamo le parti di mezzo; poi, costruiamo una poligonale composta di 9 segmenti.



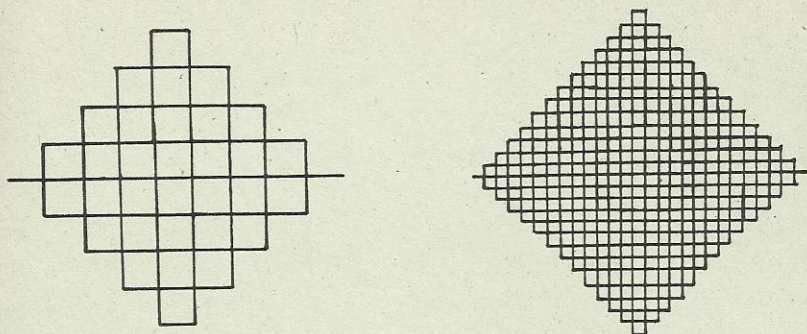
Come possiamo trovare una formula che leghi 5 a 9?

E ancora un altro esempio. È proprio questo che ci condurrà alla scoperta di una formula. Dividiamo un segmento in 3 parti e costruiamo una figura, come quella riprodotta, utilizzando 9 di queste parti.



Numeriamo questi segmenti in modo da poter percorrere la poligonale in modo continuo.

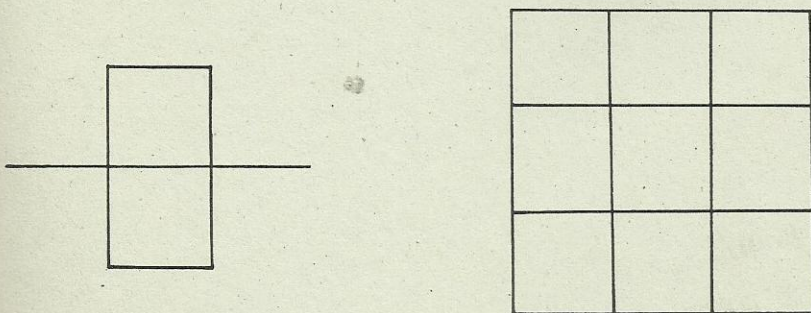
Ripetendo la stessa operazione su ciascuno dei segmenti che via via si ottengono, abbiamo le seguenti figure:



Continuando sempre la stessa operazione, la poligonale tende a una curva: è la famosa *curva di Peano*. Si tratta di una curva che ricopre il piano, cioè di una curva che passa almeno una volta per tutti i punti di un quadrato. La scoperta di una tale curva provocò, alla fine del secolo scorso, una crisi sul concetto di dimensione e sulla definizione di curva: infatti, se la dimensione di una curva è 1, e la dimensione di una regione piana come il quadrato è 2, come spiegare il comportamento della curva di Peano?

Cercheremo di chiarire questa contraddizione provando, intuitivamente, che la curva di Peano attraversa tutti i punti di un quadrato.

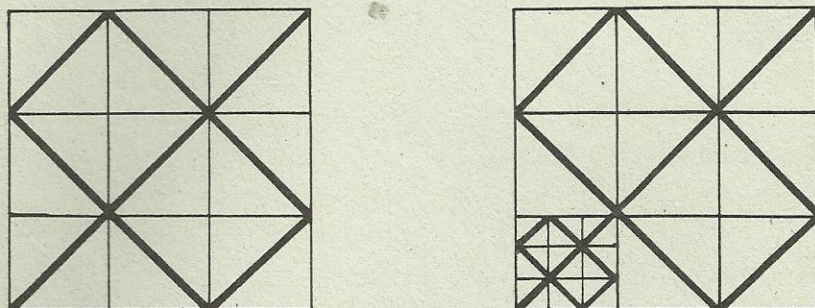
Ritorniamo alla nostra costruzione: dopo aver diviso un segmento in 3 parti, abbiamo costruito una poligonale composta di 9 segmenti. E ora consideriamo le seguenti figure, ottenute, entrambe, dividendo un segmento in 3 parti uguali.



La prima è formata da 9 segmenti, la seconda da 9 quadratini. È possibile allora stabilire una corrispondenza biunivoca fra i segmenti e i quadratini:

segmenti  $\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array}$  quadratini.

Tale corrispondenza diventa molto chiara se la poligonale è costruita sulla diagonale del quadrato: in tal modo ogni segmento-diagonale corrisponde al "suo" quadratino.



È chiaro che tale corrispondenza biunivoca fra i lati della poligonale e i quadratini si mantiene valida quando, ripetendo il processo, i segmenti diventano sempre più piccoli. Passando al limite, cioè quando la poligonale tende a una curva, sia la diagonale che il quadratino tendono a un punto. Si coglie così, intuitivamente, che la curva "riempirà" il quadrato perché verrà a contenere tutti i punti del quadrato. Per questa ragione si è condotti a dire che la dimensione della curva di Peano è 2, come la dimensione del quadrato.

E adesso arriviamo a una formula: se indichiamo con  $s$  il numero delle parti in cui è diviso il segmento iniziale, e con  $n$  il numero dei lati della poligonale, si ha:

$$s = 3, \quad n = 9 \quad \text{e quindi} \quad n = s^2$$

Possiamo dire che *l'esponente 2 corrisponde al fatto che la dimensione di questa curva è - come abbiamo scoperto - uguale a 2.*



Ritornando ora alla costruzione del fiocco di neve, la situazione è la seguente: il segmento è diviso in 3 parti e la poligonale è formata da 4 lati; si ha

$$s=3, n=4.$$

In questo caso, dunque:

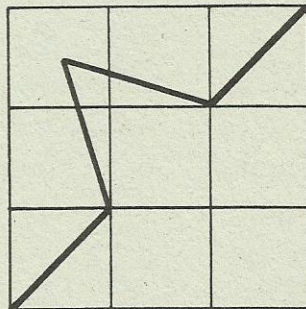
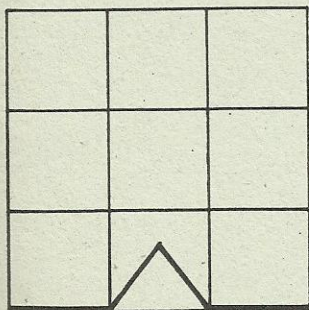
$$n \neq s^2$$

Non possiamo scrivere  $4 = 3^2$ , ma possiamo scrivere

$$4 = 3^d$$

si crea - e questo è proprio un fatto di fantasia - il simbolo  $d$  e si dice che  $d$  è la *dimensione della curva fiocco di neve*.

È chiaro che  $d < 2$ ; questo valore corrisponde al fatto che non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra 4 segmenti e 9 quadrati, e quindi, continuando lo stesso processo, la curva fiocco di neve non ricoprirà mai il piano.



Calcolare la dimensione vorrebbe dire "trovare la compattezza" della curva in confronto al quadrato. È facile calcolare  $d$ ; si ha

$$d = \log_3 4 \quad \text{o} \quad d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26.$$

La dimensione  $d$  è un numero frazionario compreso fra 1 e 2.

Nel caso della "Greca", essendo

$$s=5, n=9$$

si ha  $9 = 5^d$  ,

e quindi

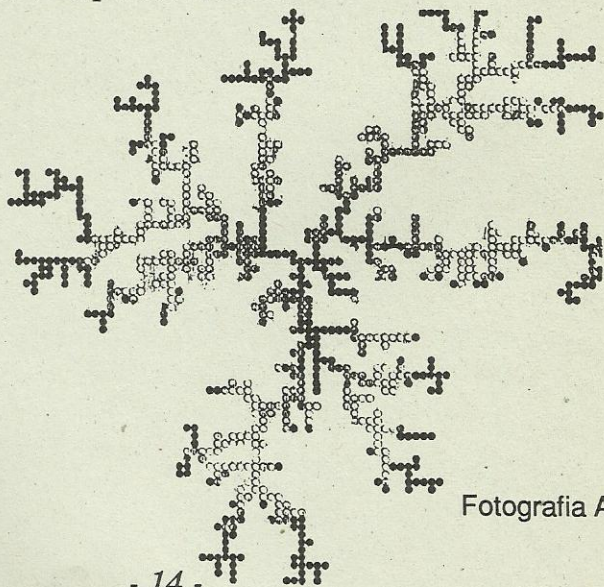
$$d = \frac{\log 9}{\log 5} = 1,36 \dots$$

Anche in questo caso la dimensione è un numero fra 1 e 2.

Quando la dimensione di una curva ottenuta ripetendo un processo "per dilatazione" è compresa fra 1 e 2, la curva non ricopre il piano, rimangono cioè degli "spazi vuoti". In questi casi si ha *una curva frattale*. Il termine «frattale» è stato creato da Benoit Mandelbrot nel 1975.

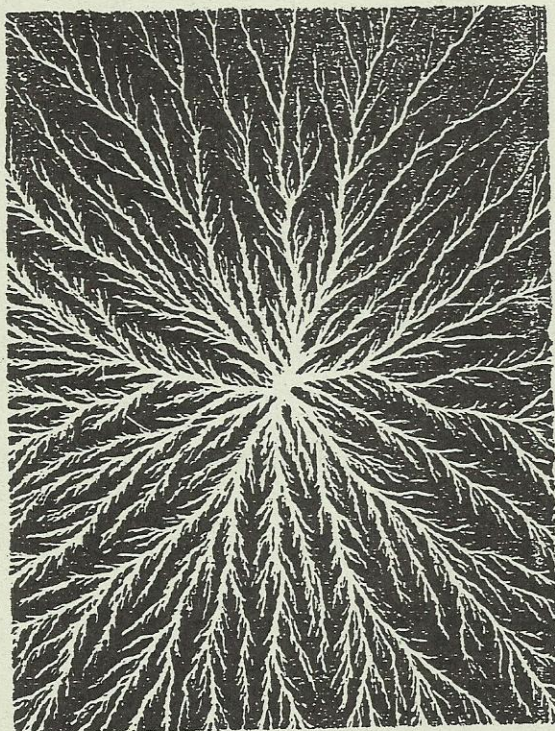
L'importanza dei frattali è dovuta al loro legame con alcuni fenomeni naturali. E, proprio allo scopo di studiare questi legami, si è realizzata, recentemente, la simulazione di alcuni fenomeni naturali.

Nella fotografia (A) si vede il modello di un aggregato aerosol, cioè di una sospensione nell'aria di minute particelle solide o liquide (in questo caso si tratta di fumo nell'aria). Il modello è stato costruito sulla base dei movimenti browniani; la sua struttura frattale è impressionante.



Fotografia A

È interessante notare che la fotografia (B), che sembra un lampeggiamento, o ci ricorda la forma e la disposizione dei rami di alcuni alberi, riproduce invece le linee di frattura di un vetro infrangibile. E ci si rende conto dell'importanza che può avere in tecnologia il poter prevedere queste linee.

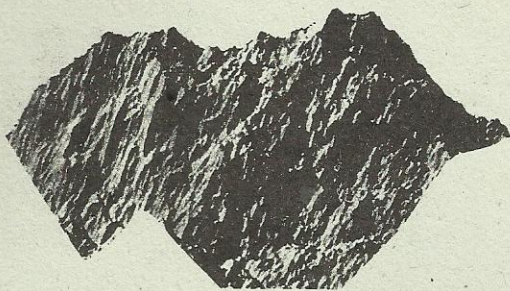


Fotografia B

Un'altra applicazione della geometria frattale deriva dal modello per simulazione di una massa di nuvole sulla base di osservazioni attraverso radar e satelliti; si riesce così a investigare in qual modo tale massa di nuvole tende ad allargarsi e a spostarsi. Il giorno in cui questi studi saranno messi a punto, le previsioni del tempo potrebbero subire una vera rivoluzione.

È interessante realizzare fino a che punto può essere viva e "reale" una simulazione ottenuta per mezzo della geometria

frattale: nessuno potrebbe dire che il paesaggio riprodotto nella fotografia (C) è "artificiale"!



Fotografia C

Credo davvero che non ci sia bisogno di dire come la matematica "pura" e la matematica "applicata" che intervengono in questo argomento riescano ad entusiasmare anche gli allievi più freddi.

*EMMA CASTELNUOVO*

*(Relazione tenuta a Rimini nell'ottobre 1986, in occasione del Convegno "Viaggio a Mathelandia", pubblicata nel volume "G. Aloisio (a cura di), Matematica fra rigore e fantasia, Franco Angeli Editore, Milano, 1989".)*