Università degli Studi di Firenze
Istituto Matematico " Ulisse Dini "

Atti del Convegno Internazionale
" Cultura Matematica e Insegnamento "
nel decimo anniversario della scomparsa di Luigi Campedelli
(30, 31 Maggio, 1 Giugno 1988)

INDICE

LA GEOMETRIA FRATTALE, A SCUOLA

Emma Castelnuovo

E' Luigi Campedelli che mi ha sempre dato un incoraggiamento a sviluppare, nella scuola di tutti i giorni, degli argomenti del tutto estranei ai programmi, degli argomenti "fuori rotta" che potevano portare una luce al corso di matematica troppo spesso pesante e noioso.

Ecco, questo che presento oggi, in un convegno dedicato alla sua menoria, è davvero un argomento che si distacca da qualunque programma, ma che, come dirò alla fine, può dare ai nostri allievi un'idea di "una scienza in costruzione".

Devo dire che il motivo per trattare i frattali a scuola è venuto "dalla base": alcuni ragazzi avevano trovato in qualche rivista delle belle illustrazioni sui frattali (fig. 1 - l'originale è a colori); altri avevano avuto occasione di assistere a un'esposizione sui frattali. Ma, nell'uno e nell'altro caso, quelle illustrazioni affascinanti erano e sono incomprensibili anche per noi insegnanti, se non abbiamo lavorato in quegli argomenti specifici.

Il trovare una linea di pensiero, e quindi didattica, in un argomento così complesso mi ha portato, assieme a degli amici, a un lungo studio sui frattali, dalle prime ricerche dovute a Benoit Mandelbrot negli anni 1975-1979, ai più recenti lavori riguardanti sia questioni teoriche che applicative.

Ma che cosa sono i frattali? e perchè a scuola? Cercherò, nella mia relazione, di dare risposta a queste domande. Seguirò la stessa linea che seguiamo in classe; a scuola -è ovvio- l'argomento viene svolto in varie sedute.

Cominciamo con l'osservare la fotografia di alcuni fenomeni naturali. Le fotografie originali sono a colori.
Nelle figg. 2 e 3 si vede la fotografia di una baia presa da una certa distanza, e, poi, presa "più da vicino"; in

quest'ultima sono ben visibili delle insenature, e si nota che queste insenature hanno, in piccolo, la stessa forma della grande baia.

La fig. 4 mostra la fotografia di un albero: da ogni ramo partono rami più piccoli, da ciascuno di questi, dei rami più piccoli,... ma che mantengono sempre la stessa forma.
Nella fotografia della fig. 5 si vede la disposizione "ricorrente" che assume la sabbia di una zona desertica.

Le forme che s'incontrano nella natura sono spesso ben diverse da quelle che vengono studiate a scuola, e cioè da triangoli, quadrati, cerchi, cilindri...

Come collegare queste forme così diverse? Abbiamo pensato che è il fiocco di neve "stilizzato" (fig. 6) a gettare un ponte fra le due geometrie. Si parte da un triangolo equilatero, e si divide ogni lato in tre parti uguali; si cancella il segmento di mezzo e, in quello spazio, si costruisce un triangolo equilatero, esternamente al primo triangolo; si ripete successivamente questa costruzione.

Uno studio sui perimetri e sulle aree delle successive figure "fiocco di neve" è stato sviluppato alla fine del secolo scorso; l'abbiamo svolto in classe. Ma qui voglio fermarmi su quegli studi, dei nostri giorni, che hanno portato alla creazione di un nuovo ramo della matematica: la geometria frattale.

Limitiamoci a considerare un solo lato del triangolo equilatero (fig. 7). Il segmento è diviso in 3 segmenti uguali, e cancellando il segmento centrale, si costruisce una poligonale formata da 4 segmenti uguali. Poi, partendo da ciascuno di questi segmenti, si ripete la stessa operazione. Ogni volta si passa da 3 segmenti a 4. Si ottengono così delle poligonali con un numero sempre maggiore di lati (fig. 8).

Viene spontaneo di chiedersi: è possibile esprimere questa costruzione con una formula? Possiamo, in qualche modo, collegare 3 con 4?

Presentiamo un altro esempio: la costruzione della "Greca" (nella sua forma più semplice) partendo da un segmento (fig.

9). Dividiamo il segmento in 5 parti uguali e cancelliamo le parti di mezzo; poi, costruiamo una poligonale composta di 9 segmenti.

Come possiamo trovare una formula che leghi 5 a 9?

E ancora un altro esempio. E' proprio questo che ci condurrà alla scoperta di una formula. Dividiamo un segmento (fig. 10) in 3 parti e costruiamo una figura, come quella riprodotta, utilizzando 9 di queste parti. Numeriamo questi segmenti in modo da poter percorrere la poligonale in modo continuo. Ripetendo la stessa operazione su ciascuno dei segmenti che via via si ottengono, abbiamo le figure 11 e 12.

Continuando sempre la stessa operazione, la poligonale tende a una curva: è la famosa curva di Peano. Si tratta di una curva che ricopre il piano, cioè di una curva che passa almeno una volta per tutti i punti di un quadrato. La scoperta di una tale curva provocò, alla fine del secolo scorso, una crisi sul concetto di dimensione e sulla definizione di curva: infatti, se la dimensione di una curva è 1, e la dimensione di una regione piana come il quadrato è 2, come spiegare il comportamento della curva di Peano? Cercheremo di chiarire questa contraddizione provando, intuitivamente, che la curva di Peano passa per tutti i punti di un quadrato.

Ritorniamo alla nostra costruzione: dopo aver diviso un segmento in 3 parti, abbiamo costruito una poligonale composta di 9 segmenti. E ora consideriamo le seguenti figure, ottenute, entrambe, dividendo un segmento in 3 parti uguali (fig. 13). La prima è formata da 9 segmenti, la seconda da 9 quadratini. E' possibile allora stabilire una corrispondenza biunivoca fra i segmenti e i quadratini:

$$\text{segmenti} \rightleftarrows \text{quadratini}.$$

Tale corrispondenza diventa molto chiara se la poligonale è costruita sulla diagonale del quadrato: in tal modo ogni segmento-diagonale corrisponde al "suo" quadratino (fig. 14).

E' chiaro che tale corrsipondenza biunivoca fra i lati della poligonale e i quadratini si mantiene valida quando, ripetendo il processo, i segmenti diventano sempre più piccoli.

Passando al limite, cioè quando la poligonale tende ad una curva, sia la diagonale, che il quadratino tendono ad un punto. Si coglie così, intuitivamente, che la curva "riempirà" il quadrato, perchè verrà a contenere tutti i punti del quadrato. Per questa ragione si è condotti a dire che la dimensione della curva di Peano è 2, come la dimensione del quadrato.

E adesso arriviamo ad una formula: se indichiamo con s il numero delle parti in cui è diviso il segmento iniziale, e con n il numero dei lati della poligonale, si ha:

$$s=3 \quad , \quad n=9 \quad , \text{ e quindi } \underline{n=s^2} \ .$$

Possiamo dire che <u>l'esponente</u> <u>2</u> <u>corrisponde</u> <u>al</u> <u>fatto</u> <u>che</u> <u>la</u> <u>dimensione</u> <u>di</u> <u>questa</u> <u>curva</u> <u>è</u> -come abbiamo scoperto- <u>uguale</u> <u>a</u> <u>2</u>.

Ritornando ora alla costruzione del fiocco di neve, la situazione è la seguente: il segmento è diviso in 3 parti e la poligonale è formata da 4 lati; si ha

$$s=3 \quad , \quad n=4 \ .$$

In questo caso, dunque:

$$n \neq s^2 \ .$$

Non possiamo scrivere $4=3^2$, ma possiamo scrivere

$$4=3^d \ ;$$

si crea -e questo è proprio un atto di fantasia- il simbolo <u>d</u> e si dice che <u>d</u> <u>è</u> <u>la</u> <u>dimensione</u> <u>della</u> <u>curva</u> <u>fiocco</u> <u>di</u> <u>neve</u>.

E' chiaro che $d<2$; questo valore corrisponde al fatto che non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra 4 segmenti e 9 quadrati (fig. 15), e quindi, continuando lo stesso processo, la curva fiocco di neve non ricoprirà mai il piano.

Calcolare la dimensione vorrebbe dire "trovare la compattezza" della curva in confronto al quadrato. E' facile calcolare d; si ha

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26\ldots$$

La dimensione d è un numero frazionario compreso fra 1 e 2.

Nel caso della "Greca", essendo

$$s=5 \quad , \quad n=9$$

si ha

$$9=5^d ,$$

e quindi

$$d = \frac{\log 9}{\log 5} = 1{,}36...$$

Anche in questo caso la dimensione è un numero fra 1 e 2.

Quando la dimensione di una curva ottenuta ripetendo un processo "per dilatazione" è compresa fra 1 e 2, la curva non ricopre il piano, rimangono cioè degli "spazi vuoti". In questi casi si ha una curva frattale. Il termine "frattale" è stato creato da Benoit Mandelbrot nel 1975.

L'importanza di questo tipo di curve è dovuta al loro legame con alcuni fenomeni naturali.

Ripensiamo alle insenature delle coste; ai rami degli alberi; alla disposizione ricorrente della sabbia in un deserto; e... andiamo avanti realizzando con il computer graphics alcuni modelli matematici per simulazione. Nella fig.16 si vede la fotografia del modello di un aggregato aerosol, cioè di una sospensione nell'aria di minute particelle solide (in questo caso si tratta di fumo). Il modello è stato costruito sulla base dei movimenti browniani; la sua struttura frattale è impressionante.

Il modello ci ricorda la forma e la disposizione dei rami di alcuni alberi. E ricorda anche il fenomeno fisico dei lampi. E' interessante notare che la fotografia, riprodotta in fig.17, che sembra un lampeggiamento, riproduce invece le linee di frattura di un vetro infrangibile. Ci si rende conto dell'importanza che può avere in tecnologia il fatto di poter prevedere queste linee.

Le figg.18 e 19 si riferiscono a uno studio chimico-geologico. Per liberare da detriti di terriccio i canali che portano il petrolio in superficie si è scoperto che è utile iniettare una soluzione acida. Si è trovato, con particolari tecniche fotografiche, che queste soluzioni acide si diffondono in superficie come indica la fig.18, e in profondità come indica la fig.19. E dunque, ancora una volta, si hanno degli "alberi" con struttura frattale!

E da ultimo, i paesaggi artificiali: la montagna di fig.20 non è la fotografia di una "vera" montagna, ma è ottenuta col metodo frattale, in questo modo: si parte da un triangolo qualunque ABC (fig.21), e su ogni lato si costruice "verticalmente", a partire dal punto medio, un segmento che sia in un dato rapporto col lato su cui è "eretto"; per esempio, nella figura, ciascuno dei tre segmenti è la metà del lato: LP=BL,MQ=AM,NR=CN. Si congiunge l'estremo superiore di ogni segmento con gli estremi del relativo lato; si ottengono così i tre triangoli indicati in neretto (fig.22).

Ripetendo questa costruzione (si può cambiare il rapporto, e si può anche costruire dei segmenti "discendendo in verticale") siamo arrivati, dopo poche ripetizioni a mezzo del computer, alla fig.23 che presenta già l'aspetto di un rilievo montagnoso.

I ragazzi sono eccitatissimi: capiscono, finalmente, la tecnica con cui sono realizzati tanti films.

Vorrei ora, nel terminare, rispondere alla domanda posta all'inizio: perchè i frattali a scuola?

Credo che la risposta venga da sè, e si possa riassumere così:

i ragazzi hanno il modo di

- capire che cosa significa "l'invenzione matematica"
- scoprire le più recenti applicazioni del computer graphics
- assistere alla creazione di un nuovo ramo della matematica, con le sue incertezze, i sui tentennamenti, il suo futuro davvero non prevedibile.

Roma, 24 Novembre 1988

Bibliografia

B.Mandelbrot: "The fractal geometry of nature"; W.H.Freeman, New York, 1983.

Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematical Education, Adelaide 1984. J.P.Kahane: "Mesures et dimensions".

Scientific American, August 1985. A.K.Dewdney: "A computer microscope zooms in for a look at the most complex object in mathematics".

Mathematics Teaching, December 1985. Dick Tahta: "Frontiers of chaos exhibition".

La Recherche, Novembre 1985. R.Jullien, R.Botet, M.Kolb: "Les agregats".

La Recherche, Avril 1986. Y.Sawada, H.Honjo: "D'où vient la forme des dendrites?".

H.O.Peitgen, P.H.Richter: "The beauty of fractals"; Springer, Berlin, 1986 (anche in traduzione italiana presso Boringhieri-Bollati, 1987).

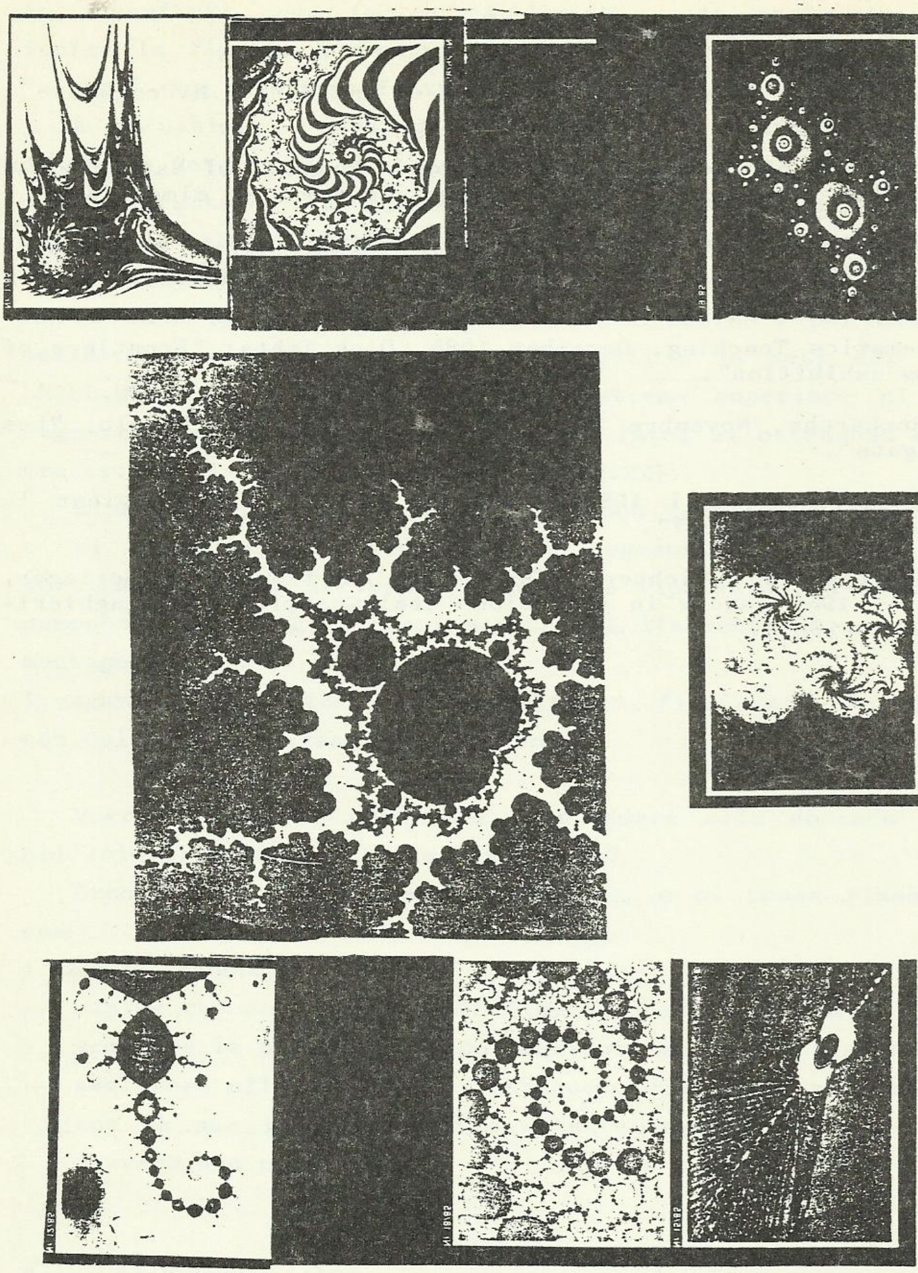

Fig. 1

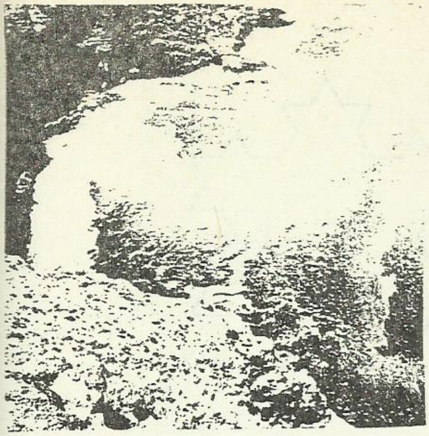

Fig. 2

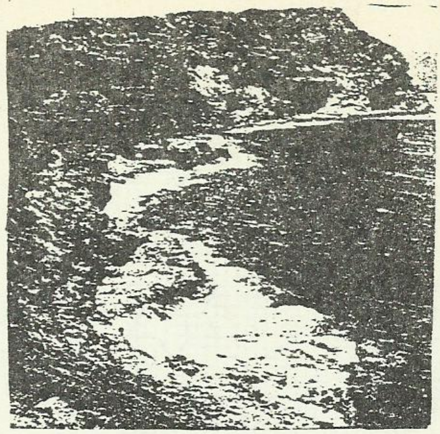

Fig. 3

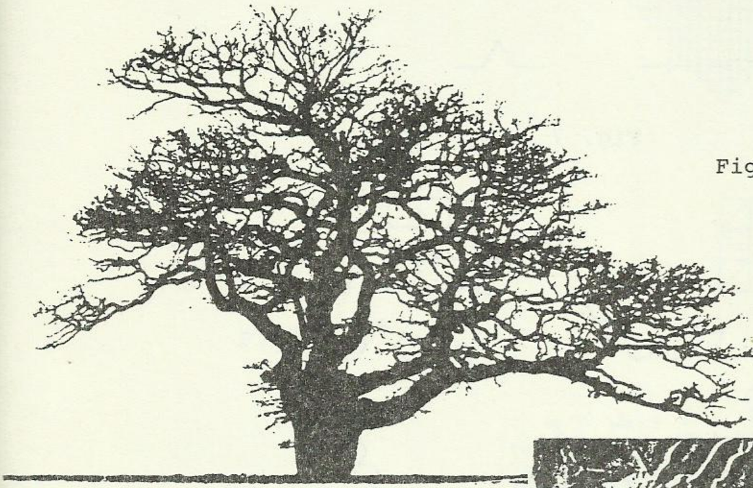

Fig. 4

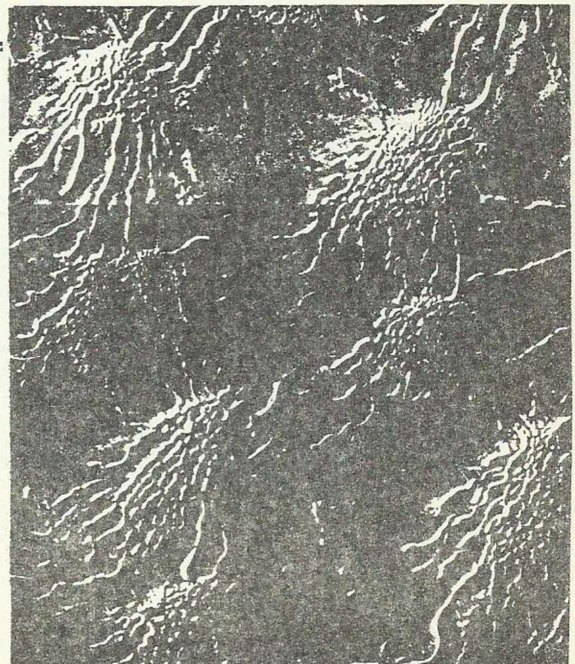

Fig. 5

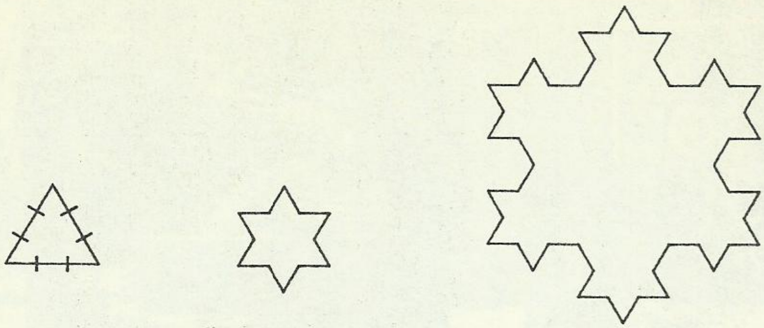

Fig. 6

Fig. 7

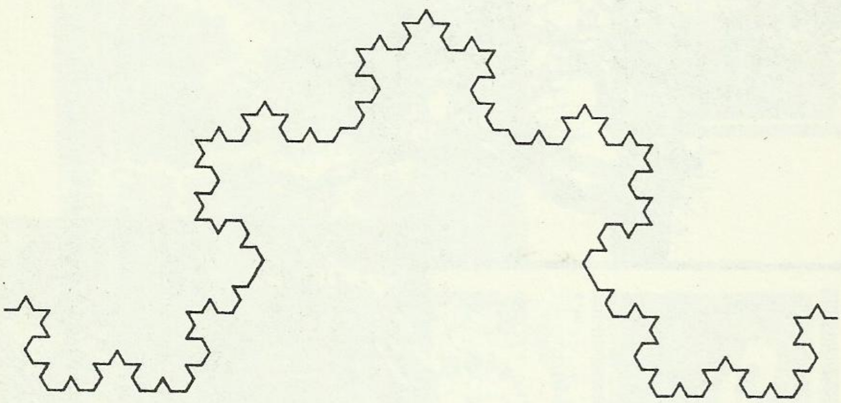

Fig. 8

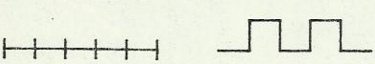

Fig. 9

Fig. 10

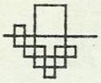

Fig. 11

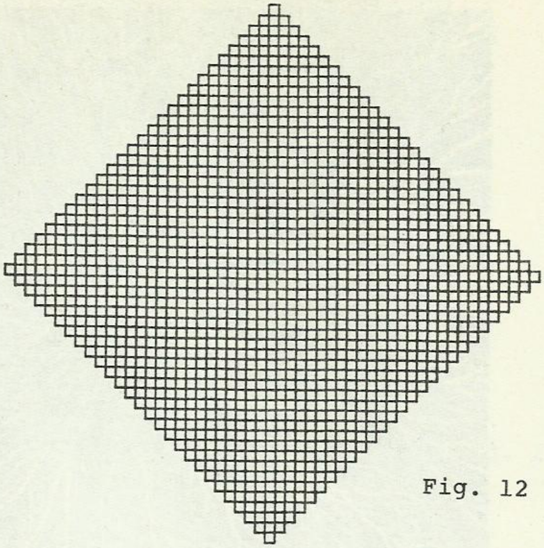

Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14

Fig. 15

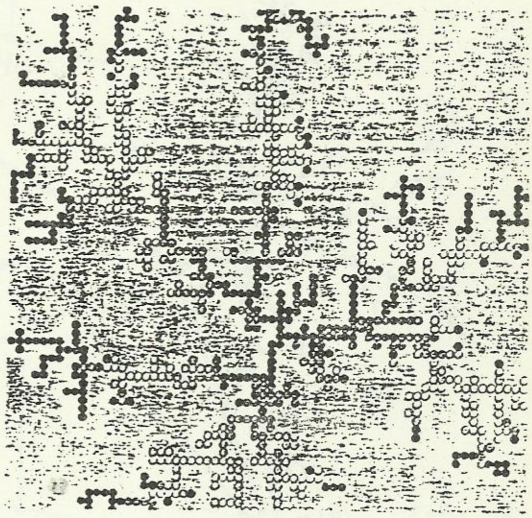

Fig. 16

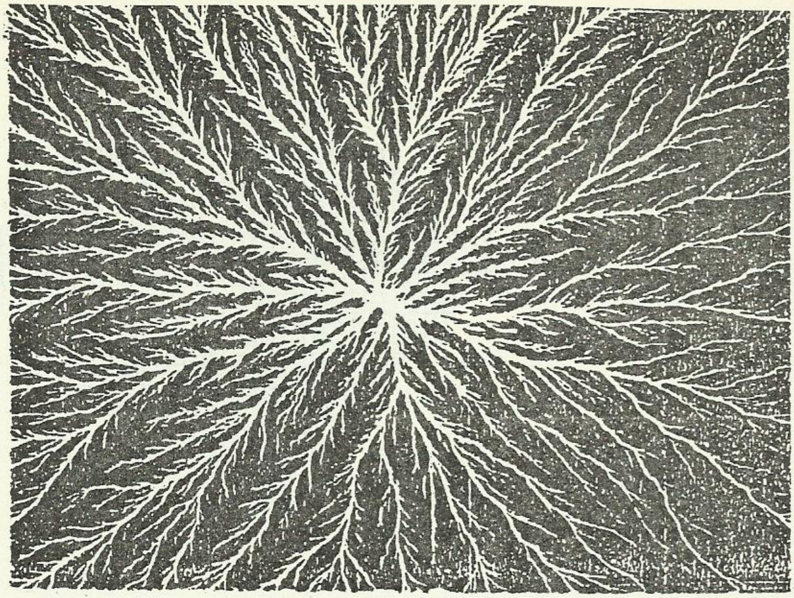

Fig. 17

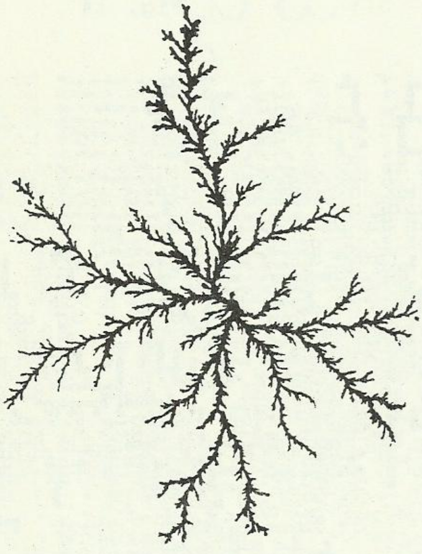

Fig. 18

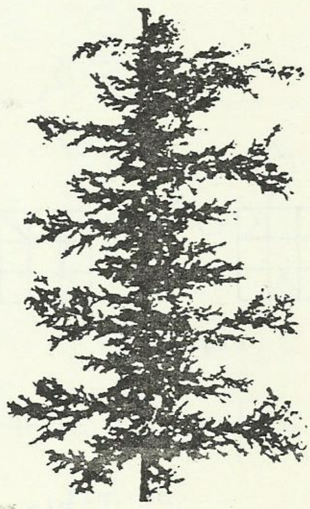

Fig. 19

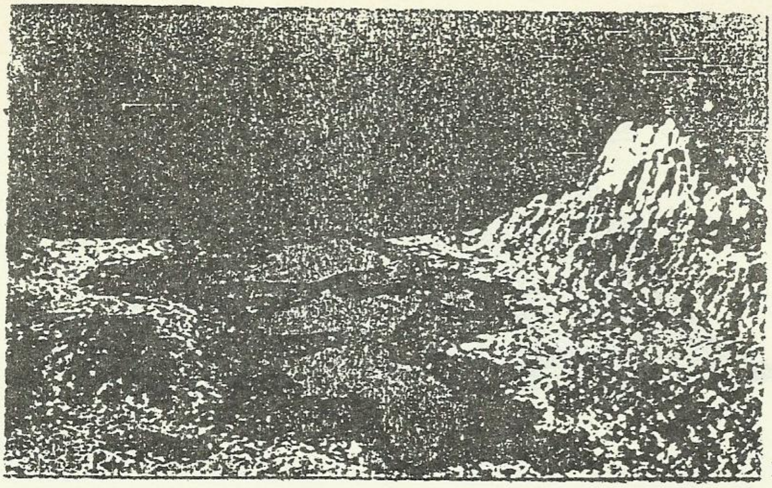

Fig. 20

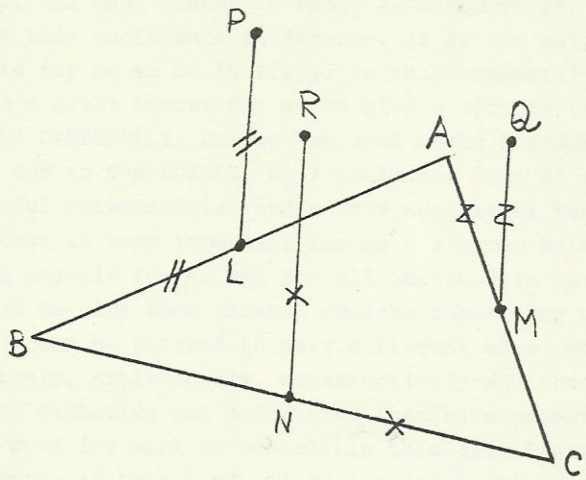

Fig. 21

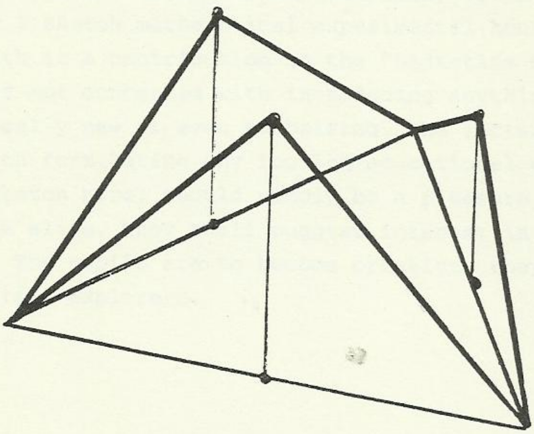

Fig. 22

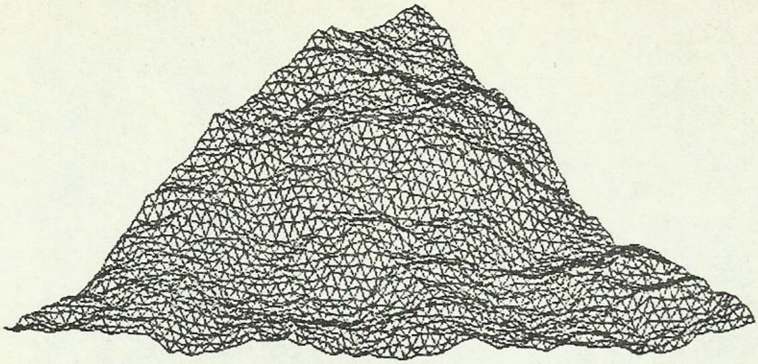

Fig. 23