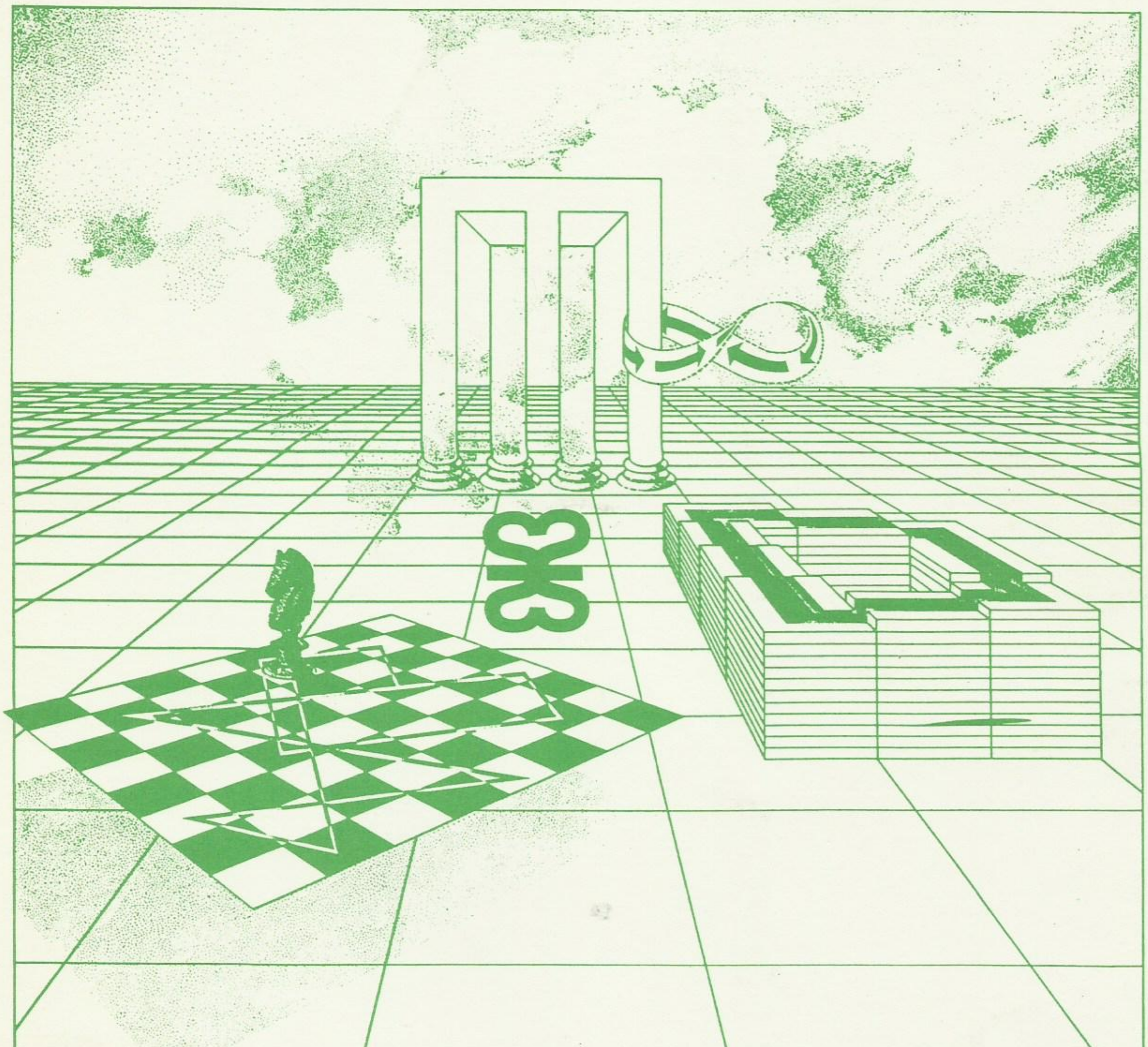
HORIZONS MATHEMATIQUES
à Rennes



I.R.E.M.-A.P.M.E.P. de RENNES
Janvier 1987

SOMMAIRE

TEXTES DES CONFERENCES

COMPTE-RENDUS D'ATELIERS

ACTIVITES DEVELOPPEES A RENNES

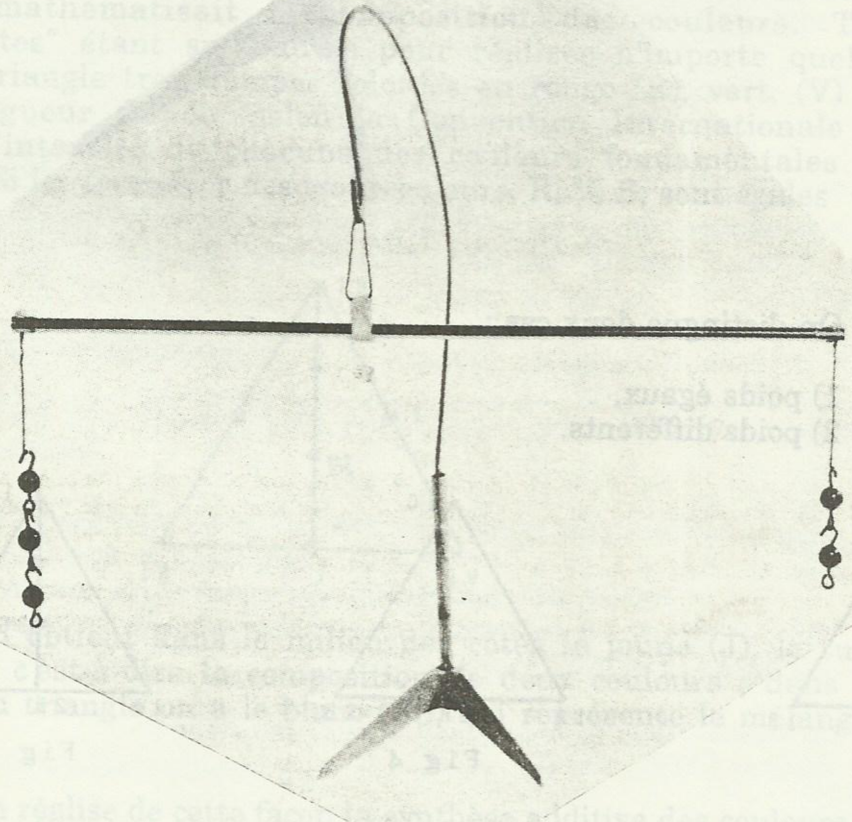
MATHEMATIQUES ET COULEURS

Emma CASTELNUOVO

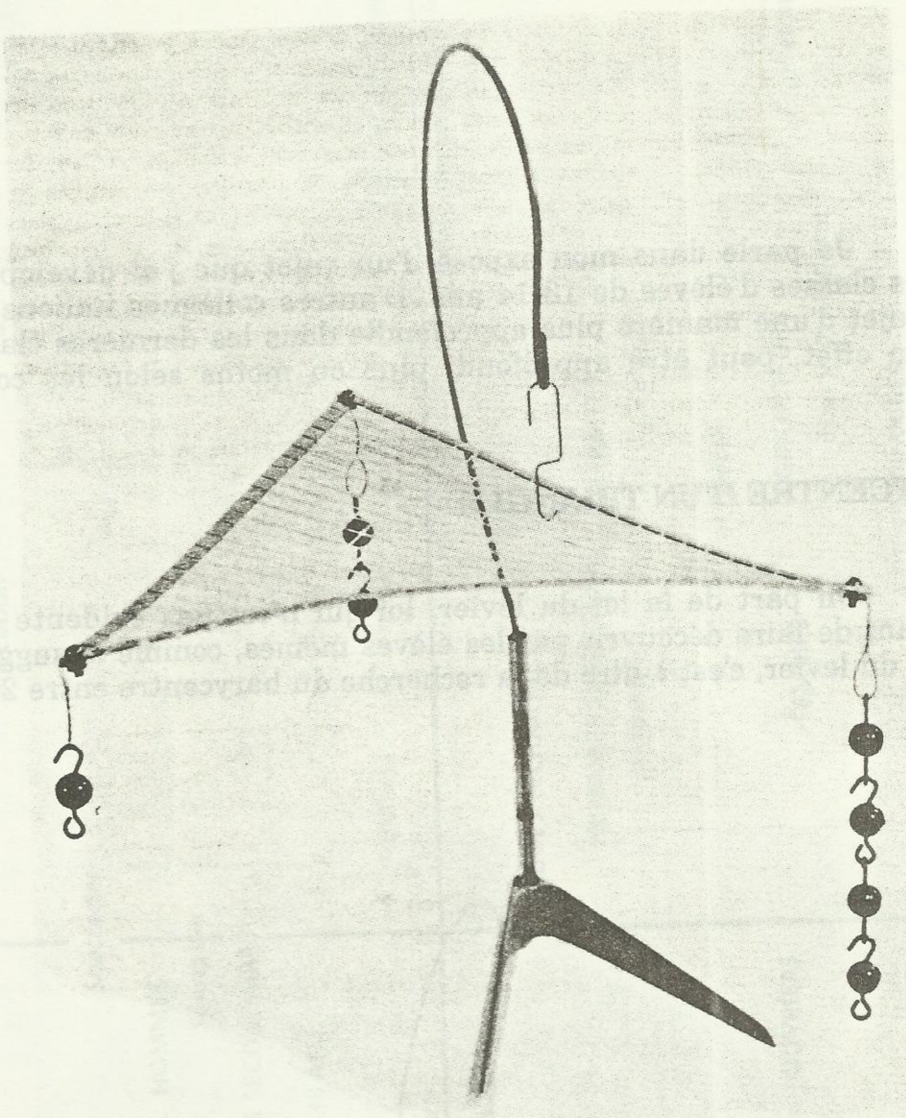
Je parle dans mon exposé d'un sujet que j'ai développé plusieurs fois dans des classes d'élèves de 13-14 ans. D'autres collègues italiens ont développé le même sujet d'une manière plus approfondie dans les dernières classes du lycée. Le sujet, en effet, peut être approfondi plus ou moins selon les connaissances des élèves.

I - BARYCENTRE D'UN TRIANGLE

On part de la loi du levier, loi qui n'est pas évidente et qu'il est donc intéressant de faire découvrir par les élèves mêmes, comme le suggère Jean Piaget. De la loi du levier, c'est-à-dire de la recherche du barycentre entre 2 poids.



On passe à la découverte de la position du barycentre en 3 poids non alignés. On considère un triangle "sans poids", dont la surface est réalisée par un filet à mailles serrées, on applique des poids aux trois sommets et on suspend le triangle de façon qu'il se dispose dans un plan horizontal.



On distingue deux cas :

1) poids égaux.
2) poids différents.

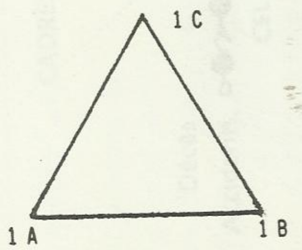


Fig 3

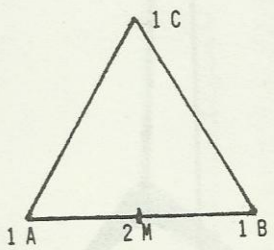


Fig 4

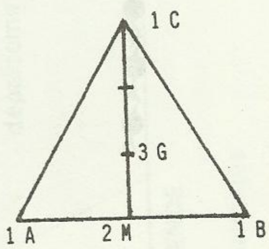


Fig 5

1) Dans le cas de la figure 3, pour découvrir la position du barycentre, on commence par considérer un côté, par exemple AB ; pour la loi du levier, le barycentre se trouve en M (fig.4) avec poids égal à 1 + 1 = 2. Ensuite, on trouve le barycentre du levier CM (fig. 5) : on a le point G, avec poids égal à 1 + 2 = 3. G est le barycentre du triangle. On obtient ainsi le barycentre "géométrique" du triangle.

2) Si les poids ne sont pas égaux, on procède de la même façon. Dans le cas de la figure 6 les poids étant 1, 2, 4 on trouve le barycentre d'un côté (5H) et ensuite le barycentre du levier CH : on a 7G.

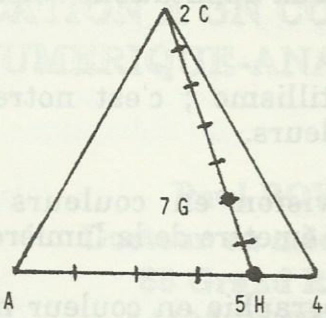


Fig 6

On comprend qu'en changeant la valeur des poids, la position du barycentre change, chaque point du triangle pouvant être un barycentre. Le triangle apparait ainsi comme "pointillé" de barycentres.

A partir de ces notions on pourrait développer, dans les classes supérieures, toute la théorie du calcul barycentrique. Il s'agit d'une géométrie à trois coordonnées, une géométrie projective (Möbius, 1827).

II - APPLICATION AUX COULEURS

Une des applications les plus riches de signification de la théorie des barycentres est la composition des couleurs.

En 1853 H. Grasmann, en se basant sur les travaux de Maxwell et de Helmoltz, mathématisait la composition des couleurs. Trois couleurs "indépendantes" étant suffisantes pour réaliser n'importe quelle couleur, on dispose en triangle trois lampes colorées en rouge (R), vert, (V) bleu (B) d'une certaine longueur d'onde (selon la Convention Internationale de 1931). En changeant l'intensité de chacune des couleurs fondamentales on réalise un colorimètre. Si les intensités des trois couleurs, R, V, B, sont égales :

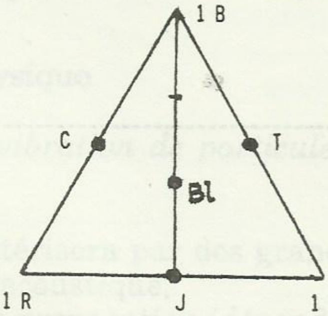


Fig 7

On obtient dans le milieu des côtés le jaune (J), le turquoise (T), le cramoisi (C), c'est-à-dire la composition de deux couleurs ; dans la position du barycentre du triangle on a le blanc (Bl), qui représente le mélange de toutes les couleurs.

On réalise de cette façon <u>la synthèse additive</u> des couleurs.

III - ART, TECHNOLOGIE, VISION DES COULEURS

La synthèse additive des couleurs à partir de trois couleurs fondamentales a donné lieu à deux applications "historiques", à presqu'un siècle de distance l'une de l'autre :

dans l'art : le pointillisme ; c'est notre rétine qui fait la synthèse des couleurs.

dans la technique : la télévision en couleurs ; les grains de phosphore peuvent émettre de la lumière rouge, verte, ou bleu.

(on doit souligner que la photographie en couleur n'est pas une application de la synthèse additive mais de la synthèse soustractive).

De ces problèmes naît, tout spontanément, le problème de la vision des couleurs : comment fait notre oeil pour distinguer une couleur de l'autre ?

Une hypothèse est que cette perception serait dûe à trois terminaisons nerveuses de notre rétine, terminaisons sensibles à l'une ou à l'autre couleur fondamentale.

La vibration d'une, de deux ou de trois terminaisons pourrait donner lieu à la vision de telle ou telle nuance. On expliquerait de telle façon l'anomalie du daltonisme : l'une ou l'autre terminaison pouvant être paralysée.

Ce sont (très récemment) les études développées à la Standford University (E.U.), qui ont basé la perception des couleurs sur des faits chimiques. L'étude sur la vision des couleurs est donc très actuelle, et ceci rend les élèves encore plus intéressés.

Du daltonisme on revient à la mathématique : la transmission héréditaire du daltonisme nous conduit, en effet, à des problèmes de probabilité.

Le sujet est vraiment très riche : de la mathématique à la physique, de l'art à la technologie, de la physiologie pour expliquer la vision des couleurs au daltonisme et donc encore une fois, à la mathématique à travers le calcul des probabilités.

BIBLIOGRAPHIE

CASTELNUOVO Emma et BARRA Mario

La mathématique dans la réalité (traduit de l'Italien)
Editions CEDIC, PARIS.

CASTELNUOVO Emma

"Différentes représentations utilisant la notion de barycentre",
Educational Studies in Mathématics, N.2 ,1969.

SYNTHESE D'UN SON PAR FONCTIONS MATHEMATIQUES

APPLICATION A UN CONVERTISSEUR NUMERIQUE-ANALOGIQUE

Paul ROY
Docteur en médecine
55 Grand Rue
14430 DOZULE

Cet exposé est une présentation :

- d'une technique : la conversion numérique-analogique appliquée à l'étude d'un son,
- d'une idée : l'utilisation des fonctions mathématiques pour créer un signal audible.

Il nous conduira à nous intéresser aux séries de Fourier, aux nombres complexes et à leurs rapports avec notre perception.

INTRODUCTION

Qu'est ce qu'un son et a-t-il une structure mathématique ?

Le son a deux définitions non recouvrantes.

1 - Une définition physique

"C'est une vibration de particules d'un milieu matériel se déplacant de proche en proche".

On le caractérisera par des grandeurs physiques :
- pression acoustique,
- vitesse de propagation (dépendant du milieu),
- période (si le son se répète identique à lui-même après un même laps de temps).

2 - Une définition humaine

"C'est la sensation que l'Homme retire de son environnement grâce à son oreille".

On le caractérisera alors par des notions liées à la sensation humaine :
- hauteur,
- timbre, pureté, etc.

Ces deux définitions n'ont rien de comparable et les **mathématiques** n'y apparaissent pas .

Cependant l'étude d'un son comme être mathématique existe depuis de nombreux siècles, et divers auteurs ont étudié ce phénomène.

Pour comprendre les relations entre mathématique et son on peut revenir à une définition simple de la mathématique :

"C'est la science qui a pour objet l'étude des grandeurs, de leur comparaison, de leur mesure".

Si l'on admet que la mathématique étudie l'abstraction des grandeurs physiques et que l'ouïe est l'abstraction d'un phénomène physique, pourquoi l'ouïe n'aurait- elle pas une structure mathématique ?

Au cours de ce texte on abordera les points suivants :

I - Technique de synthèse d'un son

1 - Le principe de la conversion numérique-analogique

2 - Schéma.

II - Notre programme et son fonctionnement : audition de sons produits à partir de fonctions mathématiques

1 - Les différents éléments de notre programme

2 - Observation des sons produits

III - Développements mathématiques

1 - Séries de FOURIER.

2 - Nombres imaginaires.

IV - Séries de Fourier et perception

1 - Fonctions mathématiques

2 - Sons de synthèse et instruments de musique

Conclusion

Bibliographie

I - TECHNIQUE DE SYNTHESE D'UN SON

On a dit en introduction qu'un son est caractérisé par des grandeurs physiques, notamment la pression acoustique. En enregistrant la pression acoustique produite lors de l'émission du son (avec un micro) on a une image fidèle du son, que l'on peut dans un deuxième temps restituer en reproduisant (par un haut-parleur) la même pression acoustique.

Grâce à des techniques récentes on synthétise un son de toute pièce, un son qui n'a donc pas été préalablement enregistré.

1 - Principe de la conversion numérique-analogique

Le son sera produit à chaque instant par une pression accoustique variable, créée par un haut-parleur.

On part d'une fonction (qu'on peut visualiser par son graphe) donnée point par point, puis mémorisée point par point sous forme binaire.

On envoie ensuite les valeurs échantillonnées point par point dans un convertisseur numérique-analogique.

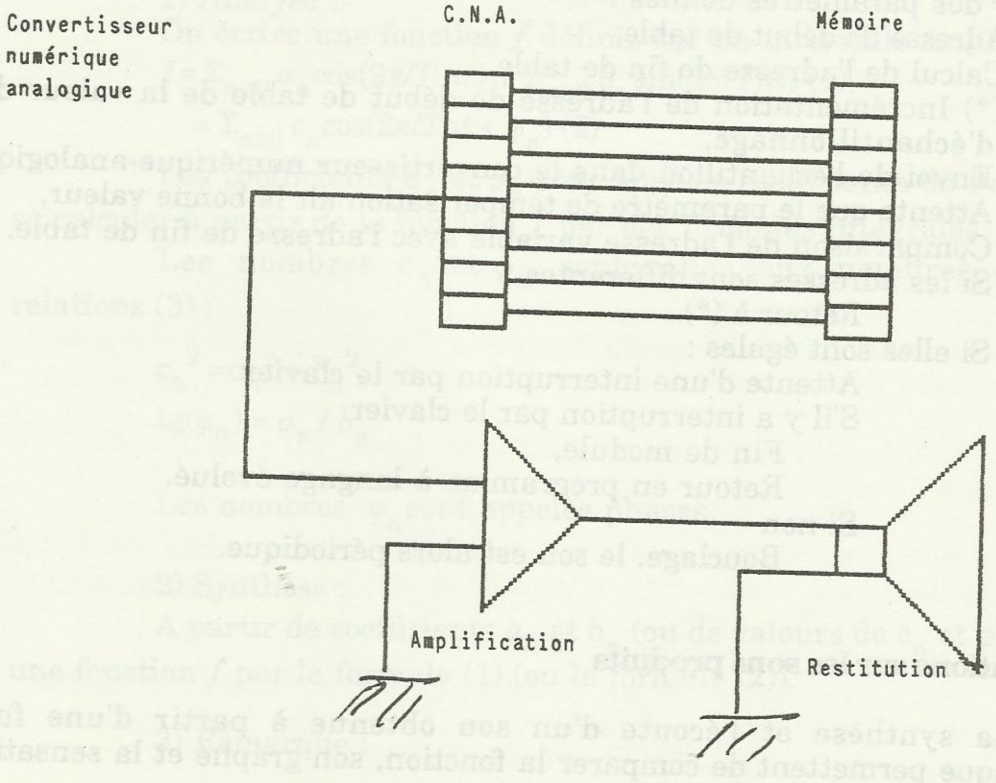
Celui-ci assurera la transformation de la valeur binaire reçue en tension électrique analogique de sortie. Cette tension sera la valeur analogique exacte de la fonction.

Un haut-parleur assurera à son tour la transformation tension-pression acoustique.

Le son produit sera le fidèle reflet de la suite de points mémorisée, donc de la fonction de départ.

2 - Schéma

Le *schéma* visualise ces principes.



II - LE FONCTIONNEMENT DE NOTRE PROGRAMME : AUDITION DE SONS PRODUITS A PARTIR DE FONCTIONS MATHEMATIQUES

Notre programme part de fonctions mathématiques données en machine et les transforme en son. Il s'agit donc d'un programme qui permet d'écouter des fonctions mathématiques données d'avance soit par une formule soit par un graphe. Il est implanté sur TO7 70.

1 - Les différents éléments de notre programme

Une partie du programme est réalisé dans un langage de programmation, l'autre en assembleur.

Les commandes du programme, faites en *langage de programmation* permettent :

- de choisir une formule mathématique,
- de choisir les valeurs des paramètres,
- de calculer et de mémoriser les échantillons,
- de visualiser le graphe,
- de les envoyer dans le convertisseur avec trois paramètres d'écoute :
  1) nombre total d'échantillons
  2) temporisation : paramètre mesurant le temps qui doit s'écouler entre chaque échantillon
  3) pas d'échantillonnage.

Le *langage machine* ou *assembleur* permet d'effectuer la création du son à partir des paramètres donnés :

- Adresse de début de table,
- Calcul de l'adresse de fin de table,
- (*) Incrémentation de l'adresse de début de table de la valeur du pas d'échantillonnage,
- Envoi de l'échantillon dans le convertisseur numérique-analogique,
- Attente que le paramètre de temporisation ait la bonne valeur,
- Comparaison de l'adresse variable avec l'adresse de fin de table.
  Si les adresses sont différentes :
    Retour à (*)
  Si elles sont égales :
    Attente d'une interruption par le clavier
    S'il y a interruption par le clavier
      Fin de module,
      Retour en programme à langage évolué.
    Si non
      Bouclage, le son est alors périodique.

2 - Observations sur les sons produits

La synthèse et l'écoute d'un son obtenue à partir d'une fonction mathématique permettent de comparer la fonction, son graphe et la sensation qui résulte de son écoute.

Il est assez difficile de rendre compte des sensations produites ; les personnes intéressées à faire cette expérience peuvent s'adresser à l'auteur qui possède des enregistrements des sons produits par différentes fonctions.

1) On peut percevoir la différence entre *son* et *bruit*. Une fonction correspondant à des valeurs aléatoires entendue avec un grand paramètre de temporisation est un bruit. En diminuant le paramètre de temporisation (passage de 255 à 1) on passe de la sensation de bruit à la sensation de son périodique avec un timbre particulier.

2) Prenons l'exemple de quelques fonctions mathématiques :
-une fonction circulaire produit des sons ressentis comme "purs",
-une fonction tangente produit un timbre très différent.

3) On peut faire l'observation suivante: certaines fonctions dont les graphes sont différents produisent des sons proches, voire identiques comme par exemple les fonctions $\Sigma a^n \sin(n\omega t)$ et $\Sigma a^n \cos(n\omega t)$.

III - DEVELOPPEMENT MATHEMATIQUES DE LA STRUCTURE D'UN SON

Voyons maintenant ce que disent les mathématiciens sur le son, ce qui nous aidera dans le prochain paragraphe à comprendre les phénomènes que nous venons d'observer.

1 - Séries de FOURIER

D'après Joseph FOURIER (1768-1830) "sur un intervalle quelconque toute fonction peut se décomposer en une série infinie qui ne contiendra que des sinus et des cosinus d'arcs multiples, et chaque coefficient est une aire définie".

1) Analyse :
On écrira une fonction f définie sur un intervalle de $[0,T]$ sous la forme
$f = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n \cos(2\pi/T\, nt) + \Sigma_{n\geq 0}\, b_n \sin(2\pi/Tnt)$ (1).
$= \Sigma_{n\geq 0}\, c_n \cos(2\pi/Tnt + \varphi_n)$ (2)

Les coefficients a_n et b_n sont appelés coefficients de Fourier. Ils peuvent se calculer à partir de la fonction f par des formules intégrales.

Les nombres c_n et φ_n sont reliés aux nombres a_n et b_n par les relations (3):
$c_n^{\,2} = a_n^{\,2} + b_n^{\,2}$,
$\mathrm{tg}(\varphi_n) = a_n / b_n$.

Les nombres φ_n sont appelés phases.

2) Synthèse :
A partir de coefficients a_n et b_n (ou de valeurs de c_n et φ_n) on peut définir une fonction f par la formule (1) (ou la formule (2)).

3) Remarque :

D'après Fourier ce théorème peut s'appliquer à toute fonction :
- "soit que l'on puisse en exprimer la nature par les moyens de l'analyse",
- "soit qu'elles correspondent à des courbes dessinées arbitrairement".

2 - Utilisation des nombres complexes

Un nombre complexe (ou "imaginaire") est un nombre de la forme $x + iy$ ou x et y ont des valeurs réelles et où i est par définition un nombre dont le carré est -1.

Un nombre complexe z peut s'écrire sous plusieurs formes :

$z = x + iy$

$z = \rho(\cos(t) + i \sin(t))$

qu'on peut encore écrire

$z = \rho e^{it}$ (forme d'EULER).

Cette forme d'EULER permet de remplacer les opération sur les fonctions cosinus et sinus par des opérations sur les nombres complexes.

Pour calculer le développement d'une fonction en série de FOURIER on peut calculer une série de nombres complexes correspondante, et on prend pour fonction la partie réelle de la série de FOURIER complexe

$$\Sigma_{n\geq 0} c_n e^{i(2\pi nt/T + \varphi_n)}$$

Il peut être simple pour créer une fonction de prendre la partie réelle d'un fonction complexe : par exemple la fonction $1/(1-z)$ a, pour z de module inférieur à 1, un développement en série $\Sigma_{n\geq 0} z^n$. On trouve donc, si z varie sur un cercle de rayon a , des coefficients c_n égaux à a^n et des phases φ_n égales à 0. Le son produit par cette fonction est particulièrement agréable à l'audition.

IV - SERIES DE FOURIER ET PERCEPTION

1 - Fonctions mathématiques

Les fonctions trigonométriques simples dont les fréquences sont multiples les unes des autres sont appelées :

fondamentales si $n = 1$,

harmoniques si n est un nombre entier supérieur à 1.

Toute fonction est donc décomposable d'après FOURIER en somme de fondamentale et d'harmoniques.

Reprenons l'exemple des perceptions liées à l'audition de fonctions mathématiques.

Une fonction circulaire a un développement en série de FOURIER comportant un seul terme non nul : à l'audition ce son est ressenti comme pur, fondamental.

La fonction tangente a un développement en série de FOURIER en sinus, avec tous les coefficients égaux à un. Toutes les harmoniques y sont présents également. Le son n'est pas ressenti comme pur.

Les fonctions sommes des deux séries $\Sigma\, x^n \sin(n\omega t)$ et $\Sigma x^n \cos(n\omega t)$ ont même coefficients de Fourier c_n et ne diffèrent que par les phases. Elles sonnent de façon tout à fait identique à l'oreille.

Ces phénomènes ont une explication anatomique. Les membranes de l'oreille entrent en résonnance avec des sons purs. La partie vers l'apex entre en résonnance seulement avec les sons graves, la base de l'oreille interne aussi avec les sons aigus. L'ouïe opère donc le "calcul" des coefficients de FOURIER.

Par contre l'oreille négligerait la phase. Ce point aurait besoin d'être confirmé par d'autres expériences. Il semblerait que la perception de la phase soit liée au mécanisme de l'audition avec les deux oreilles et soit faite par le cerveau. Il serait intéressant de développer notre travail dans cette direction en envoyant des sons "décalés" dans les deux oreilles, par exemple la partie réelle et imaginaire d'une même fonction complexe.

2 - Sons de synthèse et instruments de musique

Les sons produits par les différents instruments de musique comportent à la fois des fondamentales et des harmoniques. C'est la combinaison de ces fondamentales et de ces harmoniques (c'est-à-dire au fonds les valeurs des coefficients de FOURIER) qui donne à chaque instrument son timbre caractéristique.

En dosant convenablement chaque harmonique on pourrait recréer par synthèse les timbres des instruments existants.

Il faudrait reconstituer pour chaque instrument les fonctions correspondant aux trois phases d'un son :

l'attaque ,
le développement,
l' extinction.

Ceci représente un travail considérable qui n'a pas en soi de raison d'être car il est préférable d'utiliser de bonnes techniques d'enregistrement.

En ce qui nous concerne, nous pensons que l'intérêt des techniques de synthèse des sons est plus de créer de nouvelles sonorités que de reconstituer celles qui existent.

CONCLUSION

Nous souhaitons que notre travail illustre la toute-puissance de la notion de série de Fourier et de nombre complexe. Les rapports entre notre perception et ces concepts mathématiques sont profonds et encore mystérieux.

BIBLIOGRAPHIE

BROWN Franck

La musique par ordinateur. Que sais-je? PUF.

I.R.E.M. de Basse Normandie

Cahier du groupe Math et Musique n°1,

OURY Gérard

Livre technique du TO7,