WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
IM. KOMISJI EDUKACJI NARODOWEJ W KRAKOWIE

ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY

PRACE Z DYDAKTYKI MATEMATYKI III

KRAKÓW 1986
WYDAWNICTWO NAUKOWE WSP

Spis treści

Emma Castelnuovo

"Savoir voir en mathématiques"
Quelques considérations didactiques sur l'intuition et le raisonnement déductif.............. s. 9

Hans Freudenthal

Structures scientifiques et structure de la science - qu'est-ce qu'elles signifient dans le développement cognitif et dans l'enseignement? s.19

Klaus Härtig

Über Beweise und Beweisen im Mathematikunterricht.
Einige Thesen und Beispiele s.41

František Kuřina

The Didactics of Mathematics and the Mathematics Teaching Practice s.61

Tamás Varga

Mathematics Education in Hungary Today s.75

Werner Walsch

Führt die Verwendung von Taschenrechnern zu einer höheren mathematischen Bildung der Schüler?.... s.87

Emma Castelnuovo
Rome, Italie

„Savoir voir en mathématiques" Quelques considérations didactiques sur l'intuition et le raisonnement déductif

J'aimerais, dans cet exposé, vous parler de quelques sujets développés en classe, des réactions des élèves, et des reflexions auxquelles j'ai été conduite. Les sujets dont je vais parler concernent les notions de volume et d'aire d'une surface; vous reconnaitrez que la façon de les traiter s'inspire aux idées de Galilée et de son école, en particulier de B. Cavalieri et de E. Torricelli.

Et maintenant nous voilà en classe: élèves de 11,12, 13 ans, mais aussi plus âgés; une école qui peut se trouver n'importe ou, en Italie, en Pologne, et aussi au Niger où j'ai eu la chance d'enseigner.

Je dis: "j'ai cette feuille de papier; en la pliant en quatre parties égales, je peux construire des récipients à base carrée. J'obtiens deux récipients différents selon la direction dans laquelle je plie: l'un est plus haut et plus étroit, l'autre plus bas mais plus large" (fig.1). J'ajoute que, une fois que je les ai réalisé, je construis la base de façon à pouvoir vraiment les utiliser comme récipients: on peut y mettre de la farine, du riz, du mil, ou du sable si on est en Niger. Je demande: "ces deux récipients, vont-ils contenir la même quantité de farine?"

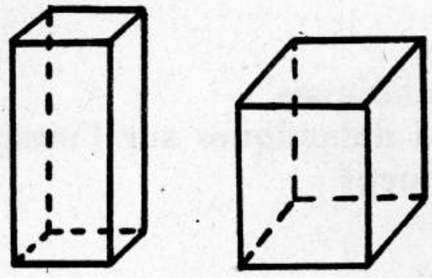

Fig.1

Je m'apercois tout de suite, en observant le regard des élèves, que la question que j'ai posé apparait tout-à-fait absurde: "il est évident - disent-ils - que la quantité de farine est la même, car les deux récipients, on les a construit avec deux feuilles égales!" Alors, sans faire aucun commentaire, je prends une autre feuille, qui à une dimension égale à la précédente, mais qui est plus étroite, et je construis deux autres parallélépipèdes (fig.2), toujours par le même processus. "Et maintenant? "-je demande. La réaction est la même; ils disent: "c'est sûr qu'ils ont le même volume car ce que l'on perd en hauteur on le gagne en base, et donc...".

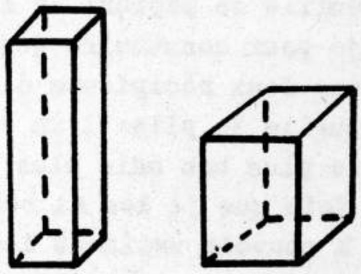

Fig.2

Je continue encore, en partant, cette fois, d'une bande très étroite (fig.3). Des élèves montrent quelque signe de perplexité; ils disent: "dans ce cas, quand-même, on dirait que les deux volumes ne sont pas égaux.

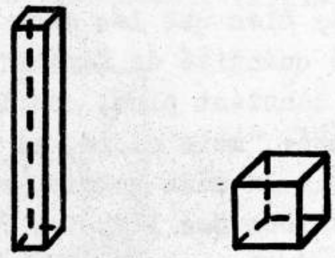

Fig.3

Et maintenant, quittons notre école et donc une ambiance de culture, pour entrer dans tout autre ambiance. J'ai eu, recemment, une expérience exceptionnelle: j'ai passé quelques jours parmi les ouvriers d'une mine de mercure, dans l'Italie centrale. On a fermé cette mine, et on a occupé les mineurs dans d'autres activités: travaux de métallurgie, d'agriculture, etc. C'est justement afin de trouver des activités plus indiquées à chacun de ces mineurs, pour sonder sur leur intérêts, que la direction des mines avait organisé des cours "cuturels"; et parmi ceux-ci il y avait aussi un cours de mathématique. On m'avait demandé d'aller sur place, quelques fois, pour des conseils au jeune professeur de mathématique.

Je dois vous dire que jamais dans ma vie d'enseignant je me suis trouvée tellement perplexe et intimidée; je me demandais: par quelle question, par quel sujet pourrais-je intéresser des gens qui ont passé une grande partie de leur vie dans les entrailles de la terre? Il me semblait que n'importe quel problème devait leur apparaître tout-à-fait hors de la dure réalité. Finalement j'ai pris la décision de commencer par le problème des récipients. Il y avait une centaine de mineurs, partagés en trois groupes; j'ai donc répeté le sujet trois fois. Et voici les réactions: à propos de la première construction des parallélépipèdes ils disent: "il paraît que les deux récipients doivent contenir la même quantité de farine". Pour la seconde construction, la réaction est immédiate de la part de tous; celle-ci: "maintenant on voit très bien que les deux récipients ne contiennent pas la mêmé quantité de farine! C'est le récipient bas et large qui contient plus, car il pèse beaucoup plus!" Quelqu'un a ajouté: "mais alors, si dans ce cas les deux récipients n'ont pas le même volume, aussi dans le premier cas ils ne pouvaient pas l'avoir; mais, à coup d'oeil on ne le voyait pas!"

J'étais fort impréssionnée. Ensuite, en revenant en pensée à cette réaction, un beau dialogue de Galilée m'est venu à l'esprit: Galilée demande à ses interlocuteurs si les deux cylindres obtenus en roulant une feuille de papier dans l'un ou dans l'autre sens ont ou n'ont pas le même volume; réponse: c'est sûr que le volume est le même car les feuilles sont égales. Et voici la réaction de Galilée: vous avez des difficultés à voir clair mais le peuple ne se trompe pas; les paysans savent très bien que pour ramasser le grain dans des sacs faits par la même toile, il vaut mieux enrouler la toile dans le sens de la longueur plus petite, car, dans ce cas, le sac contient plus.
Réfléchissons: le "savoir voir en mathématique" vient, aussi, de la manipulation d'un concret, d'une expérience qui conduit, à la suite, à idéaliser, à généraliser, bref, à faire de la mathématique.

Et en effet, en revenant aux mineurs, le problème des récipients était devenu, aussi chez eux, un problèmé mathématique. Car quelqu'un avait dit: "mais, comment faire dans le prémier cas à comprendre que les deux volumes ne sont pas égaux, car l'oeil, dans ce cas, n'arrive pas à le voir?" Un type plutôt rude avait dit: "moi, je le vois ainsi: lorsque la base monte le long de la hauteur pour former le volume, on comprend que l'étendue de chaque couche est plus importante que l'épaisseur". Il y a dans cette perception l'idée de Bonaventura Cavalieri: le volume d'un parallélépipède est conçu comme la base qui balaye le solide en montant le long de la hauteur (fig.4).

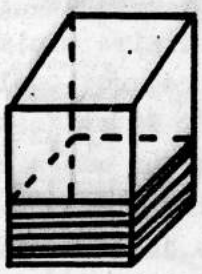

Fig.4

Je passe à un autre problème concernant toujours volumes et aires de surfaces. Ceci: j'ai 8 cubes égaux, et je veux, en les utilisant tous, construire des parallélépipèdes (fig.5). Il est évident que tous auront le même volume; c'est 8.

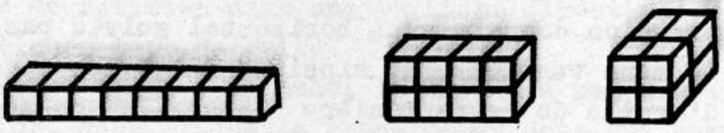

Fig.5

On demande: "la surface de ces parallélépipèdes, est-elle toujours la même?" Pour se faire comprendre, il faut préciser; il faut dire qu'on doit penser à la surface exposée à l'air. Il est facile de se rendre compte qu'il n'y a pas toujours le même nombre de carrés "extérieurs" dans tous les cas; et on comprend que le parallélépipède qui a l'aire minimum est le cube, car c'est le cube qui réalise la surface "la plus enserrée". Il faut dire que ce problème est aussi important d'un point de vue pratique; c'est en effet le problème qui se posent les fabriques de boîtes: quelle forme convient-il donner à un parallélépipède qui doit avoir une certaine capacité si on veut épargner du carton? On devrait donner à la boîte une forme cubique.

Et maintenant nous allons élargir ce problème. Il est spontané de penser aux différentes formes de la surface enveloppant un certain volume. On se demande: le cube aura-t-il toujours la propriété d'avoir l'aire minimum? Maintenant, où devrions-nous poser notre regard? Quel matériel peut nous donner un appui perceptif? Si on doit réaliser des différentes formes il faut avoir un matériel qu'on puisse manipuler: par exemple un bloc d'argile. J'ai donc dans mes mains un bloc d'argile, et je peux lui donner des différentes formes en construisant ainsi des différentes surfaces. Parmi ces surfaces il y aura aussi le cube.

Et voilà, ce cube d'argile, il vient spontané de le comprimer à fin de réaliser une surface encore plus enserrée. Mais, le comprimer comment? On comprend que ce bloc, on le doit comprimer entre les deux mains en exerçant une force qui agira tantôt dans une direction (par exemple horizontale) et tantôt dans la direction ortogonale à celle-ci (et donc verticale). Il faudra ensuite recommencer par une compression dans le sens horizontal suivie par une autre dans le sens vertical, et ainsi de suite. En modelant notre bloc d'argile de cette manière "naturelle" on sent que, petit à petit, on obtient une surface toujours plus régulière, et que, donc, on s'approche de la sphère.

Mais, est-il vrai? la sphère, a-t-elle, à l'égalité de volume, l'aire minimum? Comment démontrer mathématiquement la validité de cette perception, de cette intuition physique? Il y a une démonstration qu'on peut présenter à des différents niveaux scolaires, et que, à mon avis, traduit le modelage fait "à la main". Cette démonstration se base sur le

Principe de Cavalieri: si des surfaces, sectionnées par des plans parallèles à un plan donné, donnent lieu à des sections équivalentes, alors les surfaces ont le même volume.

Ce principe, dont on voit une illustration dans la fig.6, a une évidence immédiate, si on pense à la signification du volume comme quantité de matériel: la quantité,

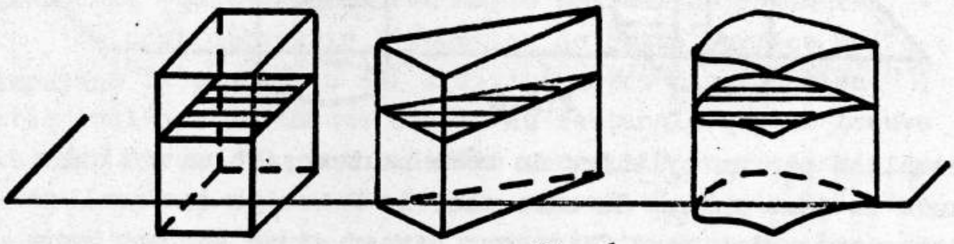

Fig.6

dans tous les cas, est évidemment la même. On part donc du cube et on va démontrer que, peu à peu, pour l'intermédiaire de transformations successives, on arrive à une sphère équivalente à l'aire plus petite. Les transformations qu'on opère ont toutes le caractère suivant: on passe d'une surface à une autre en imposant à la nouvelle surface d'avoir un axe de rotation dans une certaine direction. Je vais m'expliquer tout de suite.

Voici (fig.7) un cube; le cube n'a pas des axes de rotation. Nous allons le transformer dans une surface qui

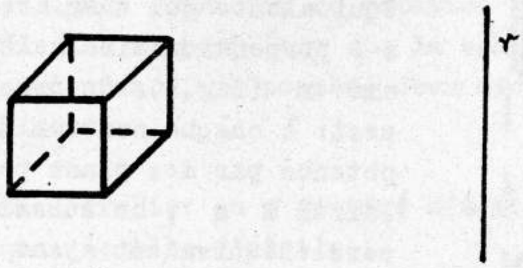

Fig.7

a un tel axe dans une direction choisie à notre volonté, par exemple la direction r ortogonale à une face. On coupe le cube(fig.8) par des plans ortogonaux à cette direction; on obtient des carrés égaux. Voilà, à chaque carré on substitue un cercle equivalent qui a son centre sur la droite r . Le cube - on le comprend tout de suite - sera

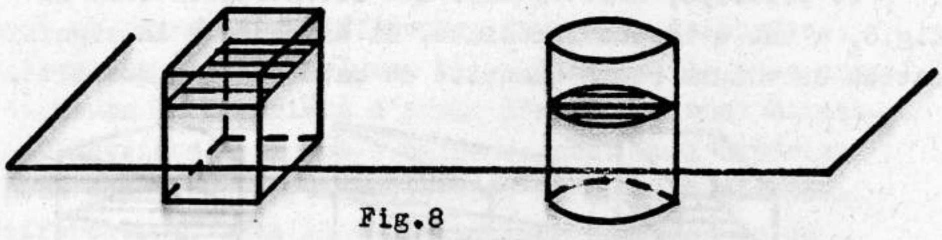

Fig.8

remplacé par un cylindre du même hauteur; et ce cylindre aura le même volume du cube pour le Principe de Cavalieri. Cette opération nous fait donc passer d'une surface sans axe de rotation, comme le cube, à une surface équivalente, le cylindre, qui a un axe de rotation. Quoi dire de l'aire? Réfléchissons: la surface du cylindre est sans doute plus petite car on a substitué à chaque carré un cercle équivalent et qui a donc un périmètre plus petit(1). On se base sur la conception des "indivisibles courbes" de Torricelli: on pense la surface du cylindre comme formée par des "fils disposés en forme de cercle".

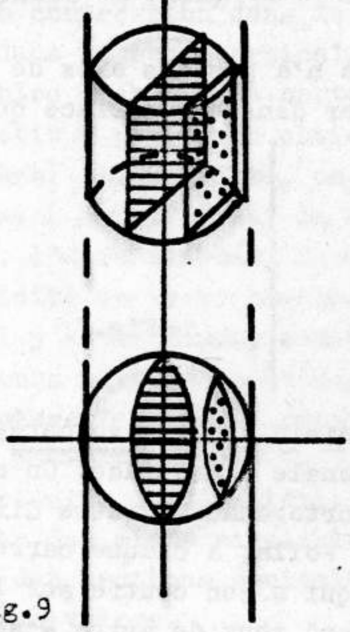

Fig.9

Et maintenant encore un pas en avant: on part du cylindre et on le transforme en une surface équivalente qui a un axe - soit s - perpendiculaire à l'ancien axe r (fig.9). On procède comme ceci: à chaque section du cylindre obtenue par des plans perpendiculaires à s, on substitue un cercle équivalent ayant son centre sur la droite s. Or, cette fois, les sections du cylindre ne sont pas égales: il s'agit de rectangles qui ont une dimension toujours égale à la hauteur du cylindre, et l'autre dimension, une corde de la

(1) Les élèves connaissaient cette propriété concernant le cercle.

base, change de zéro à une longueur maximale qui correspond au diamètre de la base. Nous obtenons une surface de rotation autour de s , formée de cercles dont le plus grand est équivalent au rectangle maximal du cylindre.

On peut découvrir l'équation de cette surface en imposant la condition qui a dirigé notre construction: l'équivalence de chaque cercle au rectangle qui se trouve au même niveau. Du point de vue perceptif on reconnait que cette surface a une forme "plus arrondie" que le cylindre équivalent; du point de vue mathématique nous trouvons que l'aire de cette surface est plus petite que celle du cylindre car on a substitué des cercles à des rectangles équivalents.

Le processus va continuer toujours par la même méthode: on prend comme nouvel axe l'ancienne droite r , qui est perpendiculaire à s , et on construit une surface équivalente à la dernière; la nouvelle surface aura une aire plus petite que la précedente, et ainsi de suite. Nous réalisons de cette façon une succession de surfaces équivalentes qui ont une aire, au fur et à la mesure, plus petite. Le processus s'arrêtrà lorsq'on arrivera à une surface ayant comme axe de rotation soit r soit s; et cette surface ne peut être que la sphère car la sphère est l'unique surface qui possède deux axes de rotation perpendiculaires.

Ici on s'arrête: on a terminé d'arrondir, par la mathématique, le bloc d'argile...

Et moi, je m'arrête aussi, mais avant de terminer je voudrais faire quelques observations d'ordre didactique. Je voudrais dire qu'on peut faire intuire cette démonstration déjà à un age de 12-13 ans et, à cette age là, elle solicité d'une façon très forte la vision spatiale; on peut la présenter à l'age de 16-17 ans, et les élèves restent fort impréssionnés par la puissance d'une méthode qui semble suivre le modelage d'un matériel. Mais il serait très intéressant de développer cette démonstration dans un cours universitaire où on pourrait, d'une part, présenter des raisonnements subtils sur des questions d'existence d'un minimum, et d'autre part, étudier d'un point de vue analytique et géométrique les différentes surfaces qu'on obtient dans les successives transformations. Il s'agit donc d'un sujet qui offre des différentes possibilités d'investigation. A mon avis, jamais, ni moins dans un cours universitaire, on devrait abandonner ce caractère intuitif, cette manipulation du concret (même si elle est seulement imaginée) qui ne salit pas les mains, mais qui, au contraire, conduit d'une façon naturelle au "savoir voir en mathématique".

Je me sens assurée dans ces idées, car c'est justement la conclusion à laquelle arrive A.Z.Krygowska dans un document officiel d'il y a quelques années; elle dit:

- "on doit faire des mathématiques élémentaires un instrument largement utilisable soit dans l'étude théorique soit dans l'activité pratique";
- "on doit toujours mettre en relief dans l'étude des mathématiques les aspects humains et affectifs et les aspects du travail créateur, à savoir la beauté de la construction et l'émotion de la recherche".

Ces "postulats", comme elle les a appelés, moi, je les ai assimilés comme quelque chose de moi-même.