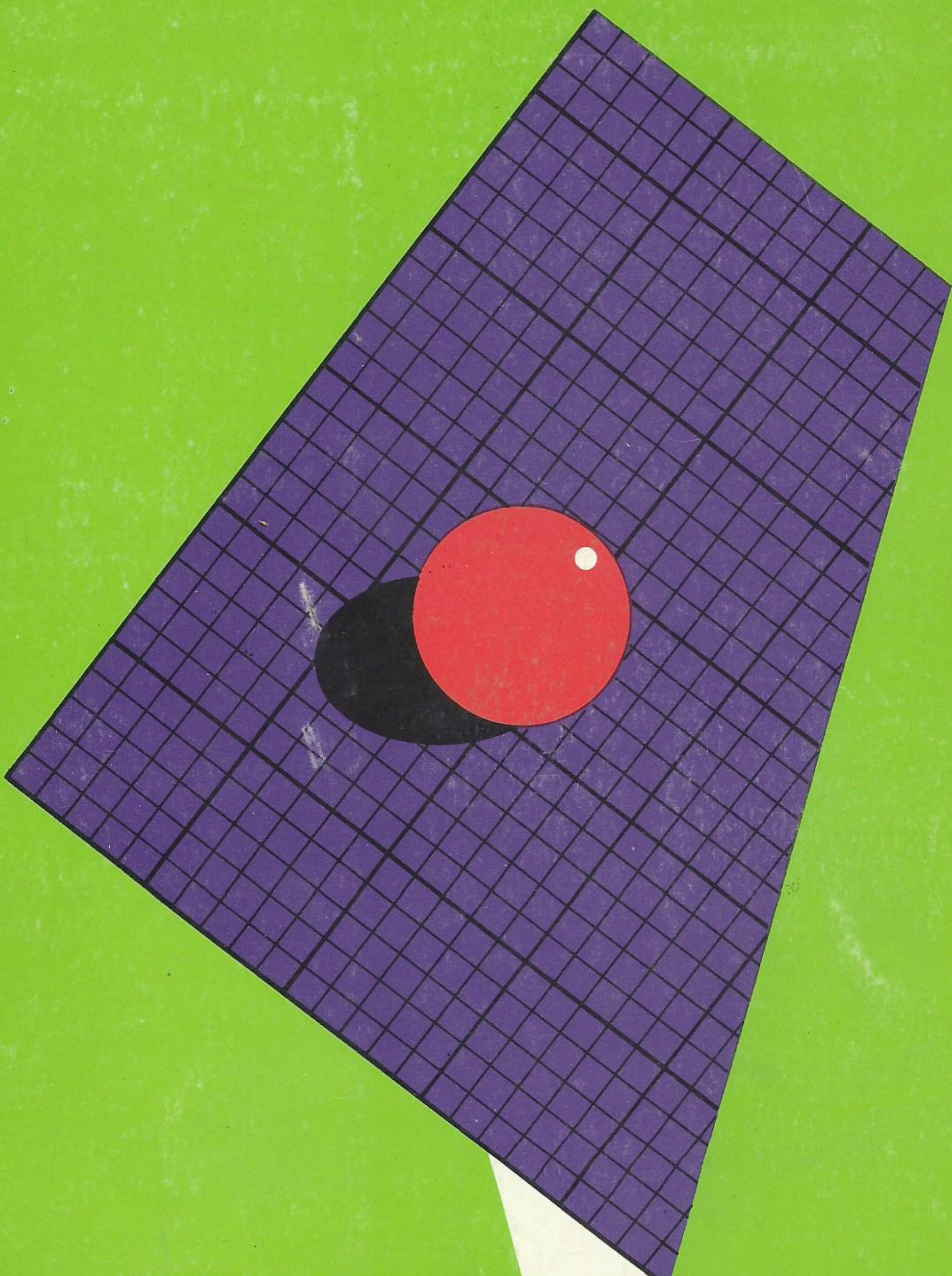
INCONTRI SULLA MATEMATICA 3

Quaderni della Mathesis

Armando Editore



Emma Castelnuovo

L'insegnamento della matematica alla luce dei nuovi programmi. Qualche esempio.

Vorrei dire qualcosa sui programmi della Scuola Media, illustrando con alcuni esempi come a me sembra si debba intendere l'interazione fra matematica e scienze sperimentali.

Come sapete, ho passato un'intera vita nella scuola di tutti i giorni, e, anche oggi, ho frequenti contatti con le classi di questa scuola; non dovete aspettarvi perciò grandi discorsi, ma solo un continuo dialogo con i ragazzi.

Interazione matematica-scienze. Si dice: si deve insegnare una matematica che serva da strumento alle scienze sperimentali o, invece, si devono irrigidire le scienze nel quadro di una matematica pura? Insomma, matematica serva o matematica regina delle altre scienze? No, non ritengo valida nessuna di queste due posizioni estreme. Cercherò di chiarire il mio pensiero, le mie idee, attraverso degli esempi che si riferiscono a tutto il triennio.

Parto da questo problema (un problema che può rivolgersi agli allievi della 1ª classe, ma anche a quelli della 2ª o della 3ª; a quelli del corso superiore, e — perché no? — anche agli studenti universitari): ho due fogli di carta uguali, e con questi posso costruire due parallelepipedi a base quadrata, piegando i fogli in quattro parti uguali, in un senso o nell'altro; in un caso ottengo un parallelepipedo alto e stretto, nell'altro, un parallelepipedo più basso ma più largo. Dico, poi, che immagino di incollare un quadrato base all'uno e all'altro parallelepipedo in modo che possano servire da contenitori (figura 1).

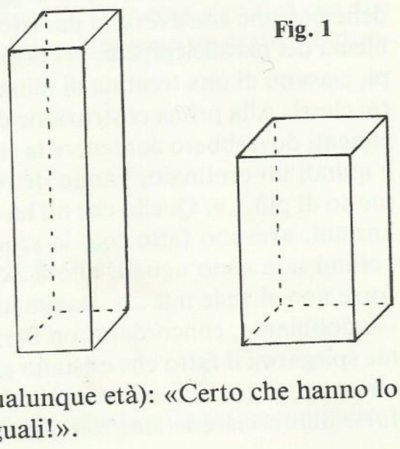


Fig. 1

Chiedo: «questi due recipienti conterranno la stessa quantità di riso? Cioé, avranno lo stesso volume?».

Risposta (uguale in tutti i paesi del mondo, e a qualunque età): «Certo che hanno lo stesso volume, perché sono stati costruiti con fogli uguali!».

Senza fare nessuna obiezione, procedo a costruire degli altri parallelepipedi, partendo, ora, da fogli di carta alti come quelli di prima ma di metà larghezza. Ho di nuovo due contenitori (figura 2), e ora è abbastanza «visibile» che quello stresso e alto contiene meno di quello basso e largo. Ma, alla domanda «avranno lo stesso volume?» si risponde, sempre, «certo, perché siamo partiti da fogli uguali».

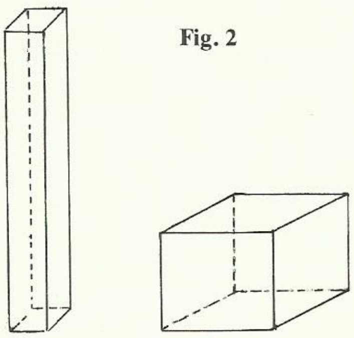


Fig. 2

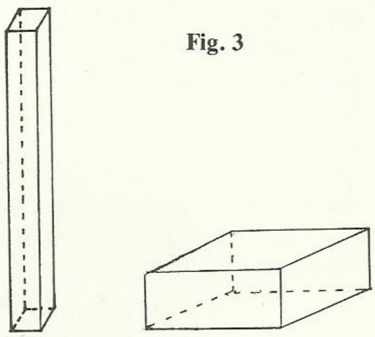


Fig. 3

Per la terza volta ripetiamo la costruzione, partendo ora da fogli di carta della stessa altezza di quelli di prima ma di metà larghezza (figura 3): un parallelepipedo appare come un sottile tubicino a sezione quadrata, l'altro è molto basso ma molto largo. Adesso il confronto fra i due contenitori è veramente chiarissimo: il tubicino, se si taglia e si inserisce in quello largo e basso, occupa solo una parte di quest'ultimo. I ragazzi rimangono scossi: la loro prima percezione ha condotto ad errore; perché? Tante domande, tanti problemi, tante risposte con l'aiuto, anche, di calcoli.

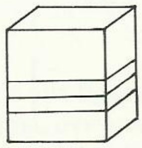
Dicevo all'inizio che problemi di questo tipo si potrebbero porre anche a studenti di un corso superiore, e anche a quelli universitari; lo dicevo perché Paul Libois, il geometra dell'Università di Bruxelles, ha per vari anni posto ai suoi studenti matricole la questione se i due cilindri ottenuti avvolgendo nell'uno o nell'altro senso un foglio di carta avessero lo stesso volume, e molto spesso la risposta era affermativa.

Ma, io ho avuto un'altra esperienza, pochi anni fa, e in tutt'altro ambiente: ero stata chiamata, per «consulenza didattica» ai corsi che si tenevano ad Abbadia S. Salvatore per i minatori delle miniere di mercurio del Monte Amiata; queste miniere sono state chiuse e i minatori messi in cassa integrazione, con corsi di sostegno, prima di indirizzarli a varie attività organizzate sul posto dall'ENI. Si voleva, da me, una consulenza sulla matematica, in verità assai elementare, che veniva insegnata a quelli che si sarebbero dedicati al lavoro delle serre. Ero veramente in soggezione dovendo presentare una qualche problematica a delle persone che avevano passato lunghi anni sotto terra. Ho deciso di presentare il problema dei parallelepipedi, proprio perché mi pareva abbastanza concreto; avevo tre gruppi, ciasuno di una trentina di minatori, e le risposte che ho avuto sono state identiche nelle tre classi. Alla prima costruzione dei parallelepipedi hanno risposto: «sembra che i due recipienti dovrebbero contenere la stessa quantità di farina di castagne»; alla seconda, tutti, e quindi un centinaio, hanno detto: «ora si capisce che quello più basso e più largo pesa molto di più...». Quello che mi ha impressionato è che alcuni di questi operai e molti, i più anziani, avevano fatto solo la scuola elementare, hanno detto: «però se in questo caso i volumi non sono uguali, allora non dovrebbero essere uguali nemmeno nel primo caso; forse non si vede ma...». Ragionamenti, questi, da matematici. Ma allora — ci si chiede —: dobbiamo, concordare con Bertrand Russell quando dice «in verità, io non capisco come spiegarmi il fatto che esistano ancora delle persone intelligenti, e questo dopo aver frequentato scuole elementari, secondarie, e qualche volta anche l'Università!». O dobbiamo forse abbracciare le idee estreme di Ivan Illich su una società senza scuola?

Fa impressione pensare che Galileo ha fatto le stesse, identiche osservazioni a proposito dello stesso problema; dice Galileo che la gente è sempre convinta che i due cilindri ottenuti avvolgendo in un senso o nell'altro due fogli hanno lo stesso volume, ma che, in campagna, si hanno le idee molto chiare perché — dice — «se con il medesimo pezzo di tela se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza della minor misura della tela e con l'altra misura circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposto».

Ma, torniamo nella nostra scuola. Il problema dei parallelepipedi ci fa capire che «la base influisce più dell'altezza» nella formazione del volume; e la formula

$$V = b^2 . a$$



che dà il volume del parallelepipedo avente per base un quadrato di lato *b* e per altezza *a* si può intuire già in 1ª, quando ci si basi sulla concezione di Bonaventura Cavalieri (figura 4).

Fig. 4

Riferendomi ora alle classi successive, e in particolare alla 3ª, penso che siano molto importanti i suggerimenti dati dai programmi: non completare un dato argomento nella 1ª classe ma riprenderlo in tempi successivi, sempre con maggiori approfondimenti. Così, la formula del volume del parallelepipedo verrà considerata anche da un punto di vista dinamico; questa formula assume allora significati diversi a seconda che si fissi come costante l'una o l'altra delle tre variabili. Dalla:

$$V = b^2 . a$$

si ha:

(1) se $b = k$ (costante) e variano $a = x$ e $V = y$,
$$y = kx,$$
y è direttamente proporzionale a x;

(2) se $a = k$ (costante) e variano $b = x$ e $V = y$,
$$y = kx^2,$$
y ed x sono legati da una legge parabolica;

(3) se $V = k$ (costante) e variano $a = x$ e $b = y$,
$$xy^2 = k,$$
e ora si ha una superficie cubica.

Vogliamo ora occuparci del caso più semplice, il caso (1). Che cosa significa che due grandezze sono direttamente proporzionali? Si riesce a capire attraverso un grafico e attraverso esempi e contro-esempi.

Studio dunque la legge

$$y = kx$$

dando ad k un valore qualunque, per esempio ponendo $k = 2$.

Si ha

$$y = 2x$$

Do ad x vari valori, per esempio interi, e costruisco la tabella e il grafico qui indicati

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
:	:
-1	-2
:	:

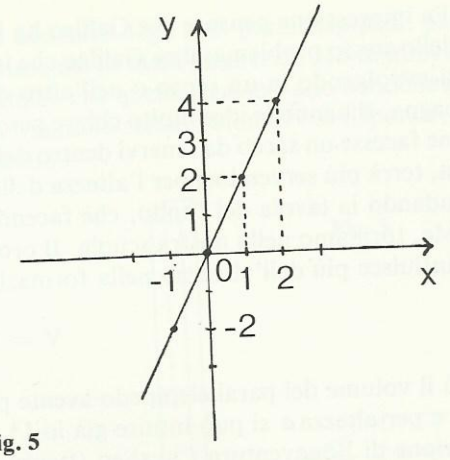


Fig. 5

Noto che al raddoppiare di x, anche y raddoppia, al triplicare…

Il grafico è una retta per l'origine.

Mi chiedo: e se non passa per l'origine, la retta rappresenta sempre delle grandezze direttamente proporzionali?

Scrivo

$$y = 2x + 3,$$

e costruisco, come prima, tabella e grafico

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
:	:
-1	1
:	:

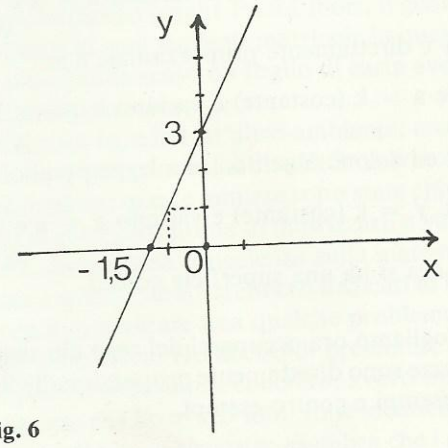


Fig. 6

non è vero che al raddoppiare di x anche y raddoppia, …

Le grandezze non sono direttamente proporzionali; il grafico è una retta ma non passa per O.

Però, non rimane in mente che poco se non si fanno, dei due casi, degli esempi interessanti. Quali? La farina, il cui prezzo è direttamente proporzionale al peso? Lo spazio percorso da una vettura che si muove di moto uniforme? No, di questi esempi non rimane niente o perché sono banali o perché sono difficili. Ci vogliono degli esempi forti.

Porto due esempi, presi dalla realtà.

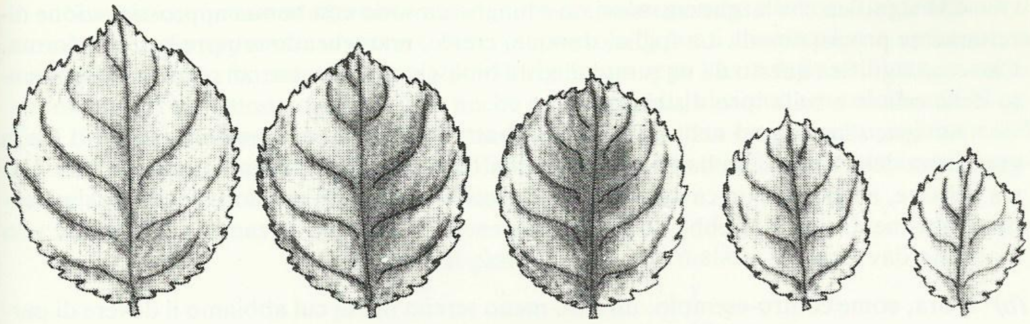


Fig. 7

(a) Le foglie. Le foglie di molte piante crescono per similitudine. Mi riferisco alla figura 7: le foglie ivi riprodotte appartengono allo stesso ramo di una pianta di rosa (ma, ovviamente, si potrebbe prendere una pianta di alloro o di...). I ragazzi misurano, lavorando ciascuno sulle proprie foglie, larghezza massima e lunghezza (conviene, per raggiungere una certa precisione, disporre le foglie su carta millimetrata). Costruiscono così una tabella come quella qui riprodotta e che si riferisce alle foglie di fig. 7; nel nostro caso si hanno le seguenti misure in centimetri.

Larghezza max: x	Lunghezza y
2,1	2,8
2,6	3,5
3,2	4,2
3,6	4,9
4,2	5,5

Si chiede ai ragazzi: «vedete qualche relazione fra x e y?». Rispondono che si nota che all'aumentare dell'una aumenta anche l'altra; in effetti, non è facile scoprire subito una legge. Procediamo allora con i metodi tipici dei laboratori: riportiamo cioé quei numeri in grafico. Si ottengono 5 punti (figura 8), e si nota che quei punti si addensano vicino a una retta passante per l'origine; si tratta della retta d'equazione $y = \frac{28}{21}x$, ossia $y = \frac{4}{3}x$:

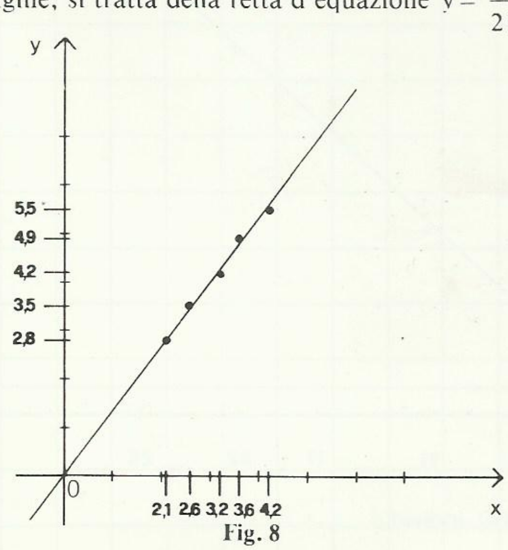


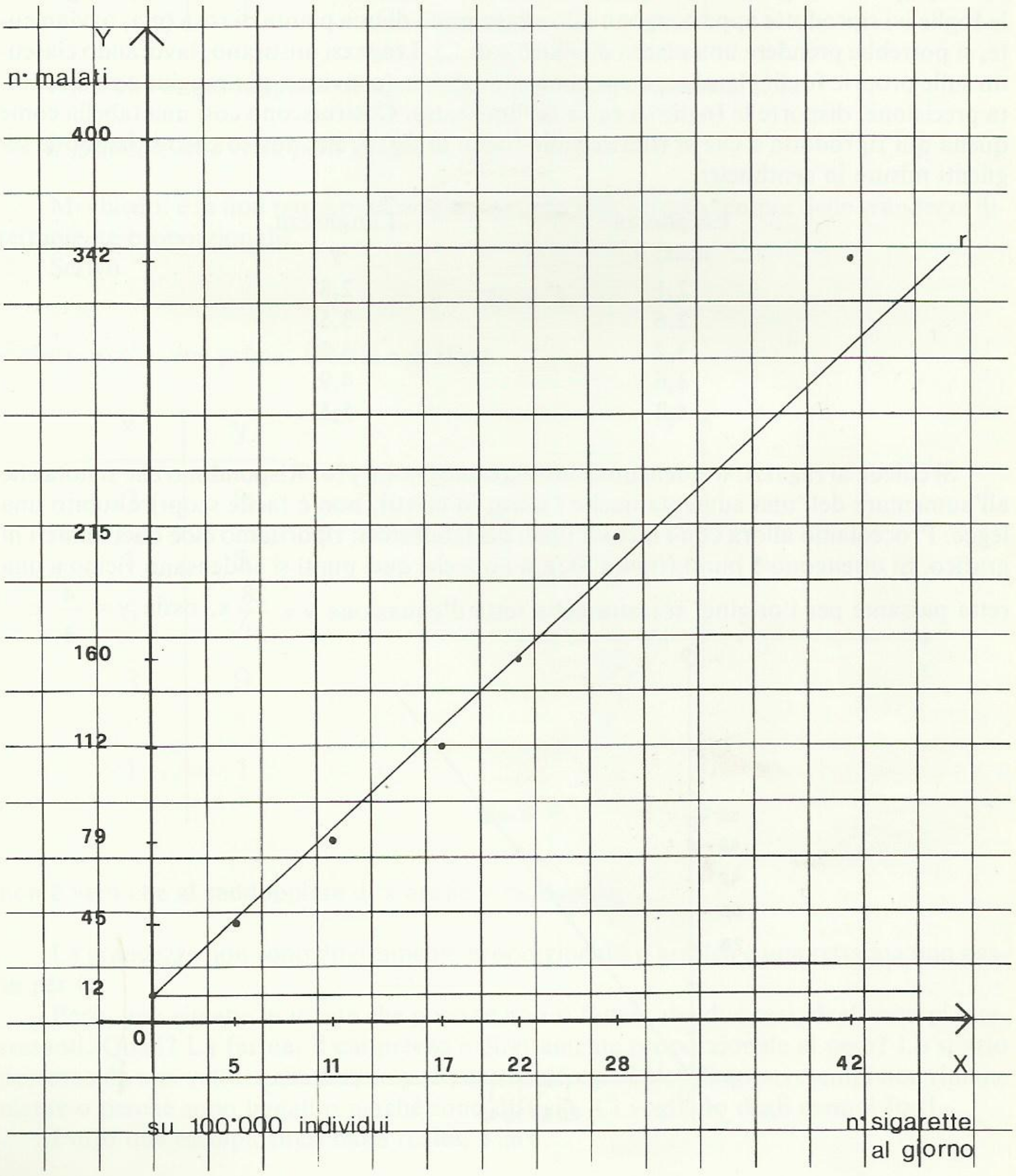
Fig. 8

Ciò significa che larghezza massima e lunghezza sono con buona approssimazione direttamente proporzionali. La foglia, dunque, cresce, mantenendo sempre la stessa forma. Che cosa significa questo da un punto di vista biologico? Si discute coi ragazzi sull'aumento delle cellule e sulla loro distribuzione.

Avviene sempre così nella natura? No: basta pensare a come varia il rapporto fra la grandezza della testa di un bambino appena nato e il suo corpo all'aumentare dell'età. Basta pensare, anche, che un cavallo (prendo un esempio da Galileo) non cresce per similitudine, altrimenti non potrebbe da adulto sostenersi sulle quattro zampe. Gli esempi non mancano davvero.

(b) E ora, come contro-esempio, un caso meno sereno ma di cui abbiamo il dovere di parlare, anche perché, fra l'altro, si dovrebbero interessare gli allievi all'igiene.

Ecco un grafico preso da una rivista medica americana.



Si riferisce *al numero di malati di carcinoma ai polmoni messo in corrispodenza con il numero di sigarette fumate al giorno.* Si ha una nuvola di punti che si addensa vicino a una retta; questa volta la retta non passa per l'origine ma sega l'asse delle ordinate in corrispondenza di 12. Questo significa che, anche non fumando, ci si può ammalare; ma 12 casi su 100.000 sono pochi se confrontati con gli altri casi: la retta cresce molto rapidamente!

Si potrebbe, se non riesce troppo difficile, basarsi sulla tabella corrispondente al grafico e scrivere l'equazione di quella retta:

n° sigarette al giorno x	n° malati y
0	12
5	45
11	79
17	112
22	160
28	215
42	342

(su 100.000 individui)

Vorrei concludere, e la conclusione è chiara: con esempi di questo tipo, presi dalla natura e dalla realtà di tutti i giorni, anche se è cruda, la matematica assume il suo valore di strumento. Ma è una matematica che, anche vista sulle formule e quindi in modo astratto, affascina gli allievi per il suo aspetto dinamico: perché è il concetto di funzione, fulcro della matematica e delle scienze sperimentali, che viene a imporsi e a trascinare, fin dall'inizio del corso, anche il ragazzo più indifferente. E questo è bello.