INDICE

UNA MATEMATICA DINAMICA (CONEXION CON LA REALIDAD)

(Emma Castelnuovo)

Queridos amigos:

Nos encontramos, una vez más, en un período de crisis en la enseñanza de la matemática. Un período de crisis que podría, quizás, tener en los próximos años un resultado muy positivo.

Todos estamos de acuerdo que hay que cambiar, que necesita nuevos programas una sociedad que se transforma tan rápidamente; pero, para hacer cambios, todavía tenemos que hablar, discutir, tener las ideas más claras. Es justamente por esta razón que aplaudo a esta reunión que comprueba la seriedad y el empeño de los maestros de España.

Ahora bien, yo pienso que, para tener las ideas más claras, lo primero es tener claras las ideas sobre lo que pasó en la historia de la enseñanza de la matemática. Quisiera, por lo tanto, decir algo en pocas palabras de esta historia, buscando destacar sus crisis. Después, vamos a ver cual es el problema actual; a este propósito, diré como veo yo las cosas, mostrando, a través de unos ejemplos en qué sentido me parece se deberían hoy dirigir nuestras investigaciones didácticas.

La historia. Es bien conocido que la instrucción fue, durante muchos siglos, solamente para una élite: los niños de una alta sociedad eran los únicos que podían recibir una educación, o en colegios religiosos o en su propia familia. Por lo que concierne a la enseñanza de la matemática, a nivel secundario, no existía más que un libro: los Elementos de Euclides. Pero, Euclides no había escrito su obra para uso escolar, y el efecto nocivo y nefasto de los Elementos sobre estos alumnos privilegiados apareció muy claro. A este propósito tenemos una declaración muy interesante de un gran matemático del siglo XVIII: Alexis Claude Clairaut. Clairaut dedica su delicioso librito "Los elementos de geometría" a la Marquise du Châtelet, una mujer muy inteligente que sin embargo no estaba en condiciones de penetrar en la obra euclídea. "No es posible -dice Clairaut- que un debutante pueda comprender este libro por el hecho que Euclides empieza con teorías abstractas. Para penetrar en cualquier ciencia es necesario hacer sentir todo el esfuerzo, todo el trabajo que la humanidad hizo durante siglos para extrar la teoría de los concreto, de la realidad.

Los tiempos cambian, las sociedades evolucionan, y al final del siglo pasado muchos paises tienen escuelas públicas para todos los niños. Con las escuelas públicas se establecen programas oficiales y, con los programas, entran en las clases los libros escolares, libros diferentes de país a país. Pero, para la matemática hay un libro único, igual en todas las escuelas de casi todos los paises: los Elementos de Euclides en sus diferentes traducciones, en sus diferentes adaptaciones. Y ahora, en tantos estudiantes, se verifica el mismo efecto que se tenía en los pocos de otro tiempo: un sentido de incomprensión, un complejo de inferioridad que permanece toda la vida y que lleva a declarar "yo,nunca entendía la matemática, no tenía disposición".

Los años corren y el problema de la enseñanza de la matemática no es considerado desde un punto de vista pedagógico y psicológico: lo que dijo Clairaut no deja traza, e igualmente las declaraciones de grandes educadores como Comenius, Pestalozzi, y más recientemente Ovide Decroly, no tienen ningún efecto. Son los matemáticos y los legisladores los que redactan los programas, y ellos, frecuentemente, no tienen una sensibilidad pedagógica: la matemática -dicen- debe ser matemática, y, por lo tanto, necesita empezar con una axiomática, con teorías puras, abstractas. Sin reflexionar que el adjetivo "abstracto" deriva del latin "extractus", y, luego, tiene un sentido dinámico (extraer de lo concreto).

El descontento general lleva, al final de los años cincuenta, a una crisis. Pero, no se trata de una contestación nacida y madurada en el ambiente de los estudiantes o de la sociedad, sino de una contestación que tiene su origen en un hecho totalmente extraño a la escuela: se trata del lanzamiento del primer Sputnik, en 1957, por los rusos. Este lanzamiento provoca en efecto un verdadero choc en los Estados Unidos, también en el ambiente de los matemáticos: porque, si los americanos querían estar al nivel de la tecnología rusa, era necesario formar técnicos, ingenieros, científicos; y, por lo tanto, la matemática debía tener un puesto de relieve también en las escuelas secundarias. Antes que programar nuevos 'currícula', los americanos solicitaron a la OECE que organizara un Congreso internacional con especialistas de todo el mundo a fin de discutir el problema.

Este Congreso se tuvo en Royaumont (Francia) en 1959. Es justamente en esta reunión cuando se delinea un cambio: es la toma de posición del matemático Jean Dieudonné que marca un corte neto con la tradición. Al grito, que después se convirtió en slogan de "A bas Euclide". Dieudonné impone su fuerte personalidad convenciendo a la mayoría de los participantes a ser portavoces, en su propio país, de la necesidad de abandonar la enseñanza euclídea substituyéndola por una matemática más viva, más motivadora, y correspondiente a la moderna investigación. El estudio de figuras estáticas se debe substituir por la presentación de importantes capítulos como el del álgebra lineal.

Un muy largo seminario de especialistas tenido en el año siguiente, en 1960, en Dubrownik (Yugoslavia) llevó a la redacción de un volumen con sugerencias e ideas sobre nuevos programas, y con recomendaciones de anteponer a un curso tan moderno una premisa a base intuitivo-experimental.

Pero, una cosa fue establecer estas sugerencias, y otra cosa fue lo que pasó en casi todos los paises europeos y no europeos. Porque, para realizar esta unidad de la matemática, se estimó que la cosa mejor era adaptar a la escuela la obra fundamental de Bourbaki, y esto a partir de los doce años. Exaltados y cegados por la introducción de la llamada "matemática moderna", se olvidó la edad del muchacho y muy frecuentemente los maestros se dejaron transportar a una abstracción demasiado avanzada. La axiomática euclídea fue substituida por una axiomática más fuerte, más nociva. Más nociva porque el resultado negativo no afectó solamente a la instrucción matemática sino también a la formación educativa y social. En efecto, obligando a los alumnos a teorías tan generales y abstractas sin ningún recurso a la realidad, se sofocó cada objeción, cada diálogo de los muchachos que, dada su edad, no estaban en condiciones de discutir sobre cosas que no comprendían en profundidad.

Me doy cuenta que estoy refiriéndome al pasado, pero, muchas veces estas tendencias pertenecen también a hoy.

Otra crisis -esta vez en un sentido muy positivo- se verifica hace seis años, en 1976, con ocasión del Congreso Internacional del ICMI, en Kalsruhe (Alemania). Durante este Congreso se tuvo una muy fuerte declaración por parte de un gran geómetra, el inglés Michel Atiyah, quien acusó a los matemáticos especialistas en cosas didácticas de haber suprimido la geometría en las escuelas, porque -dijo- "es precisamente la geometría la que por una parte solicita la intuición y lleva al primer paso hacia el descubrimiento, y, por otra, marca el anillo de conjunción entre el mundo físico y la matemática".

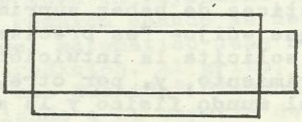
Matemática, mundo físico, sociedad: la responsabilidad de la enseñanza de la matemática en nuestro tiempo. Vamos a reflexionar: nunca como en estos últimos años la cultura científica y, con ésta, la matemática, entra en nuestras casas a través de periódicos, revistas y sobre todo a través de la radio y de la televisión. Es la escuela la que tiene la obligación de poner al ciudadano en condiciones de poder seguir una transmisión televisiva sobre cosas de ciencia. Ahora bien, para que se pueda comprender el sentido de una representación gráfica, para que se pueda entender por lo menos algo de una relación de medicina, para que los planetas y los satélites se aproximen a través de las explicaciones de científicos y periodistas, para que nuestro mundo se haga cada vez más amplio y al mismo tiempo más próximo, es necesario que la persona que escucha y ve tenga un mínimo de formación, tenga unas bases. Pero, esta formación, estas bases no se pueden tener si, en el tiempo de la escuela, no se tuvo la oportunidad de construir gráficos, si no se tuvo la posibilidad de hacer experimentos y si, en el campo de la matemática, los alumnos no tuvieron la alegría de llegar ellos solos, a través de intuiciones y deducciones, al descubrimiento de unas propiedades.

A fin que la instrucción escolar pueda constituir una base también para la ciencia de mañana, es necesario que esta enseñanza sea activa y viva, es necesario que los alumnos hagan, ellos mismos, las cosas, sea con la mano sea con el espíritu.

Quisiera dar dos ejemplos, tomados el uno de la matemática y el otro de las ciencias experimentales. Pienso que unos ejemplos aclararán mis ideas mejor que unas palabras.

Un problema de matemática

Se parte de la observación de un material, un material muy sencillo: un cordel ligado y bien tendido entre las manos de modo que se realice un rectángulo. Acercando y alejando las manos se obtienen tantos rectángulos. Es claro que el perímetro no cambia: es el cordel. A la pregunta "¿qué le sucede al área?" los muchachos siempre contestan "el área es siempre la misma porque el perímetro no cambia", o dicen "el área es siempre la misma porque como el área se halla 'base por altura', en nuestro caso lo que se pierde en base se gana en altura; luego, hay una compensación".

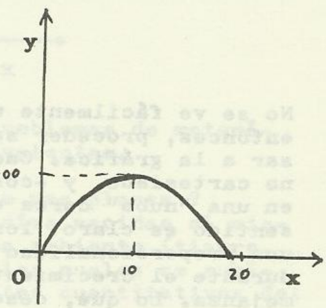


Es interesante no contestar a estas observaciones, sino continuar a "manejar" el cordel hasta llegar al caso límite, cuando una dimensión va a cero: el rectángulo "se aplasta" y... ¿el área? "No hay área -dicen-, pero..." el área no podía desaparecer". Hay en todos los alumnos un sentido de aturdimiento, de incertidumbre. Se observa todavía: el área parte de cero, crece y crece, y después decrece hasta cero. "Es como cuando se lanza una pelota" -dice alguien. Es ahora el momento de pasar al cálculo: se mide el cordel y se consideran varios casos dando a las dimensiones diferentes valores. Se ve que el área cambia y cambia mucho. Se hace una gráfica: es justamente la trayectoria de la pelota; es una parábola.

p = 40 cm.

base	altura	área
0	20	0
1	19	19
2	18	36
:	:	:
9	11	99
10	10	100
11	9	99
:	:	:
19	1	19
20	0	0

x base	y área
0	0
1	19
2	36
:	:
9	99
10	100
11	99
:	:
19	19
20	0



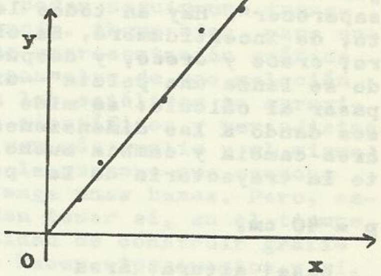
Una curva de la realidad de todos los días, pero que nunca observaban, enriquece ahora sus conocimientos: la parábola en la arquitectura moderna, la parábola en física, las antenas radar, los hornos parabólicos y todas las aplicaciones de la energía solar. Un problema de matemática pura sobre rectángulos isoperimétricos ha abierto el espíritu no solamente a conceptos fundamentales como el de función, con las ideas de caso límite, de invariante, de máximo... sino también a las aplicaciones a las cosas del mundo que nos rodea.

Un ejemplo de ciencias experimentales

Vamos a ver ahora un ejemplo opuesto, es decir como la observación de fenómenos naturales conduzca a matematizar. Vamos a considerar un ejemplo de botánica: ¿cómo crecen las hojas de una planta? y ¿con qué ley?.

Muy frecuentemente se verifica una relación muy sencilla entre la longitud y la anchura máxima de una hoja. Aquí unas hojas de roda que pertenecían a la misma rama: hay hojas más o menos pequeñas, es decir, más o menos jóvenes. Es interesante con los alumnos tomar las medidas de cada hoja. Veamos el resultado:

anchura máx. x	longitud y
2,1	2,8
2,6	3,5
3,2	4,2
3,6	4,9
4,2	5,5



No se ve fácilmente una relación entre x e y. Es interesante, entonces, proceder según métodos de laboratorio, es decir pasar a la gráfica. Cada par de números da un punto en el plano cartesiano, y -cosa imprevista- estos puntos se condensan en una "nube" cerca de una recta que pasa por el origen. El sentido es claro: longitud y anchura máxima están ligadas con una proporcionalidad directa. Es decir la forma de la hoja durante el crecimiento permanece igual: la hoja crece por semejanza. Lo que, desde un punto de vista biológico, significa que el número de las células crece uniformemente en todas las direcciones.

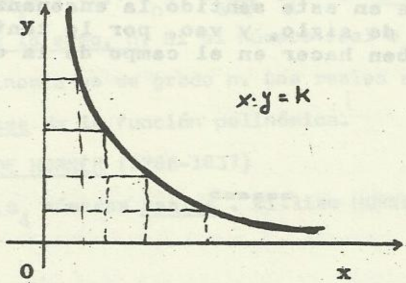
De éste se puede pasar a otros problemas biométricos: generalmente no se verifica, en el crecimiento, una proporcionalidad directa. Es suficiente pensar en el tamaño de la cabeza de un recien nacido comparándola con el tamaño del niño, y ver, en el curso de los años, lo que sucede.

Se tienen así otros problemas biológicos para discutir, y, al mismo tiempo, otros problemas de estadística, de probabilidad, finalmente de matemática.

Volviendo todavía a las hojas, surgen naturalmente muchas preguntas:

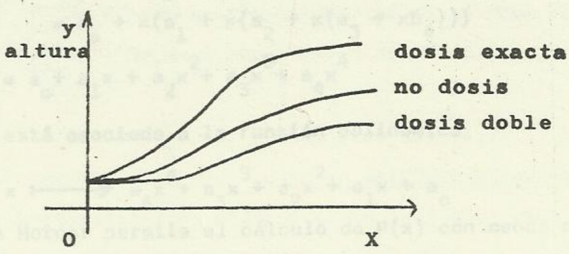
- ¿cómo puede el agua que cae a la tierra subir hasta las hojas?
  Este problema nos lleva a hablar de la capilaridad, a hacer *experimentos*: son suficientes dos vidrios, juntos de

un lado y tenidos poco separados de otro, para hacer un experimento entusiasmante: en efecto, este par de vidrios, sumergidos en agua colorada, se comporta como una serie de tubos con diámetros muy pequeños y sucesivamente crecientes, y por lo tanto evidencian la ley de la capilaridad. Se obtiene una rama de <u>hipérbola</u>. Se descubre la ley de la proporcionalidad inversa.



Se compara este problema físico con problemas de matemática, como el de los rectángulos equivalentes.

- ¿ cuál es la ley que regula la altura de una planta ?
  Se experimenta con tres plantas de judías nacidas el mismo día y que se encuentran en el mismo ambiente (tierra, agua, exposición solar, ...), pero a las cuales se suministran durante nueve semanas diferentes cuantitativos del mismo fertilizante:
  una dosis exacta, un doble y una no-suministración. Se obtienen tres curvas que los muchachos construyeron día tras día.



Está claro que estos experimentos conducen a consideraciones de estadística, de probabilidad, de matemática pura sobre las leyes exponenciales.

De problemas de ciencias experimentales a la matemática, y -como vimos- de la matemática al estudio del mundo real.

Leyes matemáticas y leyes empíricas, gráficas correspondientes a curvas y gráficas de laboratorio. Una enseñanza que se desarrolle a lo largo de estas vías, siempre buscando interacciones naturales, es una matemática que los alumnos tienen la impresión -¡pero no se trata sólo de una impresión!- de construir con sus propias manos, y, por lo tanto, es una matemática que no se puede olvidar. Es una matemática que nunca puede envejecer, y el muchacho, ciudadano de mañana, siempre estará preparado, en el futuro, a utilizarla para resolver problemas que interesan sea a la ciencia pura sea a las aplicaciones.

Yo veo justamente en este sentido la enseñanza de la matemática en este final de siglo, y veo, por lo tanto, las investigaciones que se deben hacer en el campo de la didáctica de la matemática.

======

ACTAS

II jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

tomo I

abril 1982

sevilla