

# ENSINO DA MATEMÁTICA ANOS 80

*actas do colóquio realizado no  
âmbito do encontro internacional de  
homenagem a José Sebastião e Silva  
Lisboa, 1982*

## ÍNDICE

Introdução .....	1
Entidades Patrocinadoras .....	7
Nota biográfica .....	9
Lista de trabalhos de José Sebastião e Silva .....	13
Nota sobre uma exposição bibliográfica .....	18
Lista de artigos publicados na Gazeta de Matemática .....	23
Comissão Organizadora e Conferencistas Convidados .....	25
CONFERÊNCIAS	
Emma Castelnuovo, <i>Para um ensino da matemática capaz de produzir cultura científica</i> .....	29
D. A. Quadling, <i>Realism in the planing of mathematics curricula</i> .....	43
Maria Paz Jauregui, <i>La enseñanza de la matemática en España durante las dos últimas décadas</i> .....	59
G. Brousseau, <i>Tendences originales des recherches en didactique des mathématiques</i> .....	87
COMUNICAÇÕES - SECÇÃO A - Programas	
Antônio St. Aubyn, <i>Análise da preparação matemática dos estudantes ao entrarem nas escolas superiores</i> .....	121
J. M. Gil, <i>A matemática do ensino secundário no pensamento de Sebastião e Silva e nos anos oitenta</i> .....	131
J. M. de Matos, Maria Clara Almeida, Maria Luisa Teixeira, <i>Algumas reflexões sobre o ensino da Geometria</i> .....	139
Maria Madalena Garcia, <i>Algumas reflexões sobre o ensino da geometria em Portugal</i> .....	148
A. J. Franco de Oliveira, <i>Aspectos lógicos e metodológicos no ensino da matemática</i> .....	157

João Pedro Ponte, <i>Funções no ensino secundário</i> .....	169
Maria Raquel Reis, <i>O binómio lógica-geometria no ensino secundário</i> .....	175
COMUNICAÇÕES - SECÇÃO B - Investigação Pedagógica	
Luís Edmundo Ruivo Domingos, <i>Algumas reflexões sobre uma experiência realizada num grupo de estágio sobre a influência da progressão escolhida no atingir dos objectivos "habituais"</i> .....	185
J. M. Mendinhos, <i>Aumento da exigência - Uma necessidade pedagógica e política</i> .....	195
J. P. Ponte, Paulo Abrantes, <i>Os problemas e o ensino da matemática</i> .....	201
Ana Maria Lopes, J. M. Matos, Maria Violante Mestre, <i>Uma experiência de problem solving</i> .....	215
Marília Themudo, <i>Breve referência a três instrumentos didácticos de cálculo abalógico</i> .....	223
João Filipe Lacerda Matos, <i>A resolução de problemas para "ensinar a aprender" matemática</i> .....	229
Maria Alzira Rose, <i>A propósito do ensino da matemática em Macau: o abaco chinês</i> .....	235
COMUNICAÇÕES - SECÇÃO C - Formação de Professores	
Marcelino Paiva, <i>Formação contínua de professores de matemática do ensino secundário</i> .....	255
Luís Alves Martins, <i>Formação de professores e renovação do ensino</i> .....	261
Paulo Abrantes, J. P. Ponte, <i>Professores de matemática: que formação?</i> .....	269
J. M. Mendinhos, <i>A profissionalização em exercício - Julgamento de um processo</i> .....	293



Actas do Colóquio

"O Ensino da Matemática nos anos 80"

Soc. Port. Mat. Lisboa, 1982

PARA UM ENSINO DA MATEMÁTICA CAPAZ DE

PRODUZIR CULTURA CIENTÍFICA

Emma Castelnuovo

O título desta minha exposição pode parecer banal, e ao mesmo tempo enigmático.

É claro, com efeito, que ao ensinarmos matemática propomo-nos dar uma cultura científica, formar uma mentalidade científica. Foi dito tantas vezes e continua-se a dizer que o objectivo do ensino da matemática é o de acostumar a raciocinar, a deduzir, a preparar para a formulação dum pensamento lógico. Talvez se dissesse demasiado, salientando demasiado o aspecto dedutivo e deixando de parte outros aspectos igualmente importantes. Escreveu José Silva: "A intuição e a preciosa textura eurística são muitas vezes ignoradas, suprimidas, levando assim a uma visão unilateral da construção matemática; porque a matemática não é apenas lógica: é um produto humano e portanto está intimamente ligada às ciências da natureza e da técnica". Ora bem, das três fases: nascimento concreto do conceito ou da lei; idealização matemática; regresso para o concreto através das aplicações, na escola salientou-se sempre, e cada vez mais, a do meio, isto é, a da representação duma matemática pura, abstracta, sem reparar que o adjectivo "abstracto" vem do latim e significa "extraído" (do concreto); quer dizer, etimologicamente tem um sentido dinâmico. E nesse mundo puro, em que se quer que os rapazes não sujem as mãos, foram criadas gerações e gerações de alunos, de homens a quem a escola não deu, a maioria das vezes, uma verdadeira formação científica.

Mas eu acho que, para podermos ver as coisas objectivamente, é preciso ampliar o discurso e ter uma ideia, embora só esboçada a grandes traços, do que aconteceu na história do ensino matemático, pelo menos na nossa velha Europa.

Durante longos séculos a instrução secundária pertenceu a poucas pessoas, a uma elite. Os rapazes recebiam a sua educação em seminários religiosos ou junto da sua própria família onde eram entregues aos cuidados de preceptores. No que diz respeito à instrução matemática só havia um livro: os Elementos de Euclides; este livro constituiu a essência da educação matemática dos jovens. Mas Euclides não escrevera o seu tratado para uso escolar, e houve gerações ininterruptas sobre as quais os "Elementos" exerceram um efeito prejudicial e nefasto. Temos um testemunho do efeito negativo deste livro, precisamente por parte dum grande matemático do século XVIII, A. C. Clairaut. Ele dedicou um delicioso livrinho, os "Eléments de géométrie" à sua amiga Marquise du Châtelet que, embora sendo uma mulher muito inteligente, não conseguia penetrar no espírito do tratado euclidiano. Trata-se de dificuldades evidentes, diz Clairaut: para compreender qualquer ciência não se pode começar com teorias abstractas, mas é preciso fazer sentir todo o esforço, todo o trabalho que se realizou para extrair a teoria do concreto, da realidade. E agora, se continuarmos a percorrer a história, vemos que a sociedade evoluiu e, na maioria dos países europeus, a escola tornou-se, em meados ou fins do século XIX, um organismo de Estado. A instrução já não pertence a poucos privilegiados; fundam-se escolas, estabelecem-se programas e, com os programas, entram nas escolas os livros: livros diferentes dum país ao outro.

Mas para a matemática há o livro único, igual para todos os países - os Elementos de Euclides - em traduções diferentes, em adaptações diferentes. E agora, em muitos alunos, verifica-se o mesmo

efeito que se verificara nos poucos jovens privilegiados de outrora: um sentido de dificuldade insuperável, um complexo de inferioridade, uma frustração que leva a dizer: "Eu, a matemática não a compreendo".

Os anos passam, e o problema do ensino da matemática nos seus aspectos pedagógicos e psicológicos não é sentido. Aquilo que escrevera um matemático como Clairaut não deixa sinais, tal como não são ouvidas as vozes de grandes educadores como Comenius, Pestalozzi e mais recentemente Ovide Decroly que, no começo do nosso século, funda em Bruxelas uma escola em que é atribuída a maior importância à construção matemática mesmo através da interação com as ciências experimentais: é uma escola que se desenvolveu e que deveria ser tomada como modelo.

Para voltarmos aos matemáticos, nem mesmo a voz de um Felix Klein, grande matemático dotado ao mesmo tempo dum agudo sentido didático, consegue vencer as declarações autoritárias da maioria: os programas da matemática devem basear-se num ensino axiomático. Mas eis que, no final da década de cinquenta - aproximamo-nos portanto do dia de hoje e o problema torna-se o nosso próprio problema, e cada responsabilidade a nossa própria responsabilidade - provem do exterior um impulso de mudança. Esse impulso provem do "momento astronáutico": estamos em 1957, ano em que os Russos lançam para o espaço o primeiro 'Sputnik'. Nos Estados Unidos esse lançamento provocou um verdadeiro alvoroço até no meio dos matemáticos: querendo estar a par da tecnologia russa, era preciso formar técnicos, engenheiros, cientistas; a matemática portanto devia ter um lugar de relevo desde os primeiros anos da escola secundária. Foi assim que, em 1959, a pedido dos Estados Unidos a *Organisation Européenne de Coopération Economique* organizou um simpósio internacional em Royaumont (França) para discutir e promover uma renovação do ensino da matemática em todo o mundo. Foi precisa-

mente neste Simpósio que foi ganhando forma uma mudança de rumo: é a posição tomada pelo matemático Jean Dieudonné que marca o ponto de partida para um afastamento nítido do ensino tradicional: proclamando primeiro "abaixo Euclides" (palavras que mais tarde se haviam de tornar um lema) Dieudonné impôs a sua vincada personalidade convencendo a maioria dos participantes a tornarem-se porta-vozes, nos respectivos países, da necessidade de abandonar totalmente o ensino euclidiano para o substituir por uma matemática mais viva e estimulante, ligada à investigação moderna. Ao estudo de figuras estáticas dever-se-á substituir o estudo de grandes capítulos como o da álgebra linear; mas para compreender a fundo esses grandes assuntos, sugeria-se (estou a ouvir a voz de Gustave Choquet) que se desenvolvesse durante alguns anos um ensino com base experimental ou semiexperimental. Tais ideias foram especificadas por uma apropriada Comissão depois dum longo seminário que se realizou em Dubrovnik (Jugoslávia), em 1960. Foi publicado um volume que deveria servir como guia para a redacção de programas e livros de texto nos diferentes países: álgebra, geometria, análise, já não constituíam compartimentos estanques, sendo pelo contrário postas em relevo as suas fortes interacções, e até aquelas aplicações que poderiam constituir motivação para a introdução dos vários assuntos. Mas uma coisa foi a divulgação destas ideias e outra foi a sua realização efectiva na maior parte dos países europeus e não europeus. Porque, para realizar essa unidade da matemática, julgou-se em muitos países que a coisa melhor seria adaptar para a escola a obra fundamental de Bourbaki, a partir da idade dos 12 anos! Na exaltação e na cegueira da introdução na escola da chamada "matemática moderna", do "ensemblisme à tout prix" (segundo as palavras de Freudenthal) deixou-se de considerar a matéria vivente, os rapazes, a quem este ensino se dirigia. Chegou-se - como me escrevia Silva precisamente naqueles anos - "a fazer crescer os ra-



pazes numa planície matemática esterilizada e esterilizadora, capaz de sufocar qualquer objecção, qualquer diálogo". Porque - dizia ele - "se quisermos que o ensino da matemática seja autenticamente vivo e fecundo, deveremos apresentar uma ciência que se faz e não uma ciência já feita. A matemática não deve desprezar o concreto, a matemática deve estar ligada à realidade física em que o pensamento matemático mergulha as suas raízes. E é sobretudo a geometria que serve de modo natural para a ligação entre o mundo físico e a abstracção".

Ora bem, tais ideias manifestadas por José Silva no quadro da modernização do curso de matemática, amadurecem e influenciam até matemáticos que não se ocupam de questões didácticas: alguns anos depois, o geómetra inglês Michel Atiyah, numa conferência proferida no Congresso do ICMI de Karlsruhe sobre "tendências da matemática pura" acusa os matemáticos de terem posto de parte a geometria no ensino secundário, ao passo que "é precisamente a geometria - diz ele - que suscita até nos rapazes muito novos a intuição criadora e também serve para ligar o mundo físico com o da abstracção".

A matemática, o mundo físico, a sociedade; a responsabilidade do ensino da matemática na década de 1980. Procuremos reflectir: nunca como nos últimos dez anos a cultura científica, e juntamente com ela a matemática, penetrou em todas as casas através de jornais, de revistas, e sobretudo através da rádio e da televisão. Constitui um dever da escola, e refiro-me em particular aos primeiros anos do ciclo secundário, pôr o cidadão em condições de seguir uma transmissão televisiva sobre assuntos de ciência. Para que se possa compreender o sentido das representações gráficas que se vêem no ecrã, para que se possa apanhar pelo menos em parte o sentido de certas investigações no campo médico, para que planetas e satélites natu-

rais se aproximem cada vez mais de nós através das explicações de cientistas e jornalistas, para que o nosso mundo se torne cada vez maior mas ao mesmo tempo menos afastado, é preciso que quem ouve e vê tenha uma formação mínima, tenha bases. Mas essa formação, essas bases, não se podem adquirir ouvindo ou olhando passivamente: os gráficos não se compreendem se anteriormente, na altura da escola, faltou a ocasião de os construir; uma observação ou uma experiência científica descrita por palavras não se compreende sem termos nós, os professores, ensinado a observar e experimentar; um raciocínio lógico subtil não pode ser seguido se não tivermos acostumado os rapazes a tirar, de determinadas hipóteses, determinadas consequências; e uma descoberta devida à intuição e à fantasia do cientista aparecerá menos brilhante e menos sugestiva se, na altura da escola, os rapazes não tiverem, dentro das suas possibilidades, exercitado a mente neste sentido, em suma, sem terem eles próprios tido o prazer de chegar à descoberta.

Para ensinarmos a "saber ver", quero dizer, "ver com os olhos físicos e ver também com os olhos da mente" é preciso que ensinemos a fazer as coisas: a observar, experimentar, raciocinar, intuir. Cabe ao ensino da matemática e das ciências experimentais proporcionar essa formação. Surge porém uma objecção espontânea: querendo formar um cidadão, isto é, um homem capaz, no futuro, de seguir pelo menos os factos mais importantes que dizem respeito às descobertas científicas, que tipo de instrução lhe havemos de fornecer na escola, dado que a ciência se encontra em tão rápida evolução? A cultura de hoje será, afinal, também uma cultura para o dia de amanhã?

Eu gostaria de trazer aqui dois exemplos, um tirado da matemática e outro das ciências experimentais; acho que servirão melhor que as palavras para esclarecer o meu pensamento.

Os dois exemplos referem-se em particular ao primeiro ciclo da escola secundária: idade dos alunos, entre 11 e 14 anos.

*Um exemplo tirado da matemática*

Os conceitos de área e perímetro, e de volume e superfície confundem-se muitas vezes, até entre adultos. Convem portanto não "mantê-los separados", como se faz em geral, mas pô-los em comparação.

Eis um problema que diz respeito aos conceitos de área e perímetro, um problema aberto que, por isso mesmo, pode levar para muito longe.

Mostra-se aos rapazes um rectângulo realizado com um cordel atado, mantido bem esticado entre os dedos das duas mãos. Afastando e aproximando as mãos e portanto, mantendo os dedos de cada mão mais próximos ou mais afastados, obtemos tantos rectângulos. Tais rectângulos têm, obviamente, o mesmo perímetro: o cordel. Se perguntarmos: "a área permanece igual ou muda na passagem dum rectângulo para outro?" a resposta é sempre a mesma: "com certeza - dizem os alunos - a área permanece igual, não pode mudar porque o perímetro é sempre o mesmo"; ou então dizem: "a área não varia porque, obtendo-se a área do rectângulo multiplicando a base pela altura, no nosso caso acontece que, ao diminuir a altura a base aumenta, e portanto há uma compensação".

Sem respondermos nada a estas observações, continuaremos a "manipular" o cordel fazendo de modo que a altura continue a diminuir chegando ao caso limite: o rectângulo tem tendência para se "esmagar" sobre a base, a altura tende para o zero, e portanto a área também tende para o zero. Então? A área muda: "contudo não mudava..." dizem eles. É muito interessante observar as reacções dos meninos.

dos países mais variados: os nossos países e os países em vias de desenvolvimento. As reacções são idênticas, como se o meio, a educação, as tradições não tivessem nenhuma importância. Nota-se em primeiro lugar um sentido de espanto, de desapontamento. Depois a observação faz-se mais aguda: em que maneira muda a área? A partir do caso limite a área vai aumentando até chegar ao máximo (o caso do quadrado) e depois decresce chegando ao zero, no outro caso limite. "É tal qual o caso de se atirar uma bola", diz alguém.

Então passa-se para o cálculo. O cordel, isto é, o perímetro, tem tantos centímetros; pode haver tantos casos, dando à base e portanto à altura, diferentes valores. Calcula-se a área, e agora damos conta da grande mudança. Faz-se um gráfico: uma curva que não conheciam, apesar de fazer parte da realidade de todos os dias - a parábola - vai enriquecer os seus conhecimentos. Os alunos sentem-se solicitados a olhar, a pensar: a parábola na arquitectura moderna, a parábola na física, as antenas do radar, os fornos parabólicos e as aplicações da energia solar. Um problema de matemática pura abriu a mente para o mundo que nos rodeia. Importa considerar que foi precisamente a um problema de figuras isoperimétricas que Galileu dedicou um diálogo inesquecível, que acaba assim: "a gente está convencida - diz ele - que se duas pragas tiverem o mesmo perímetro também a área nelas contida deverá ser igual. Haverá quando muito quatro entre cem pessoas com ideias claras acerca deste problema:"

Façamos agora umas observações sob o ponto de vista didáctico: um rectângulo não é com certeza uma figura interessante; mas um rectângulo que varia, que se transforma continuamente, é algo fascinante. Porquê? À parte o lado psicológico da atracção exercida pelo movimento, neste caso o interesse provem dum grande conceito que as-

soma pela primeira vez: o conceito de *função*. E juntamente com ele, a intuição incôscia dum teorema fundamental de análise, o teorema de Rolle, que sugere a existência dum máximo de área em paridade de perímetro; somos levados a falar de optimização.

Pode-se replicar que é difícil, que são conceitos melindrosos. "Ninguém pode negar - dizia Silva - que se trata de conceitos melindrosos. Mas lembremo-nos de que o efeito das grandes ideias é como o ar forte da serra que primeiro atordoa mas depois estimula e reforça".

O problema do cordel levou-nos a passar das questões de matemática pura para a observação da realidade que nos rodeia. Queria agora dar um exemplo oposto: mostrar como a partir da observação dum fenómeno natural até os meninos são levados a raciocinar matematicamente.

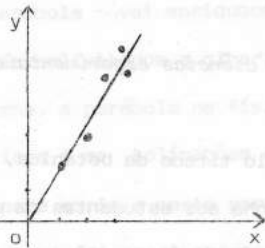
#### *Um exemplo tirado das ciências experimentais*

Quero apresentar um exemplo tirado da botânica, do tipo dos exemplos que José Silva propunha aos estudantes na altura que, nos anos 50, ensinava no Instituto Superior de Agronomia, aqui em Lisboa. O exemplo que faço é tão simples que pode ser estudado até com rapazes de 12 e 13 anos.

Como crescem as folhas? A que lei estão submetidas? Muitas vezes verifica-se uma simples relação entre o comprimento duma folha e a sua largura máxima. Eis aqui umas folhas de roseira tiradas do mesmo ramo: há umas muito pequenas, isto é, muito novas, e há outras maiores, isto é, muito velhas. É interessante medir com os alunos o comprimento e a largura máxima de cada folha. Eis aqui o resultado da medição das folhas:

largura máxima x	comprimento y
2,1	2,8
2,6	3,5
3,2	4,2
3,6	4,9
4,2	5,5

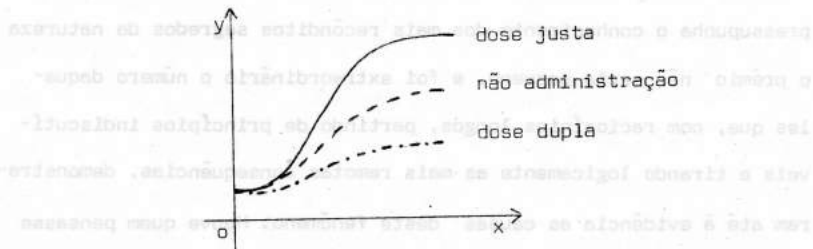
Pergunta-se aos alunos se vêem alguma relação entre  $x$  e  $y$ , mas a resposta é sempre só esta: ao aumentar a largura, aumenta também o comprimento. Com efeito, não aparece logo uma relação mais precisa. Então procede-se segundo os métodos de laboratório: transferem-se aquelas para o plano cartesiano. Eis o que se obtém:



Obtem-se uma "nuvem" de pontos que se acumulam nas proximidades duma linha recta que passa pela origem. Então o significado torna-se claro. Comprimento e largura estão ligados, aproximadamente, por uma lei de proporcionalidade directa, isto é, a folha cresce mantendo a forma, o que quer dizer que o número das células cresce uniformemente.

Daqui passa-se para outros problemas de biometria: a natureza não procede muitas vezes segundo crescimentos uniformes, do que derivam outras interpretações matemáticas e outros problemas de estatística e probabilidade.

Mas voltemos para as plantas e vamos reflectir ainda acerca do problema do crescimento: como cresce em altura uma planta? Que influência pode ter no crescimento a subministração dum fertilizante? Eis uns gráficos que se referem ao crescimento de plantinhas recém-nascidas de feijão, submetidas a condições de ambiente idênticas, mas às quais foram subministradas doses diferentes dum mesmo fertilizante num período de nove semanas: a dose justa, uma dose dupla e uma não administração.



Trata-se de três curvas exponenciais que foram construídas pelos rapazes, na base de tantas medições. É claro que o facto experimental leva a considerações de estatística, de probabilidade, de matemática pura relativamente às leis exponenciais, levando portanto às considerações mais abertas.

Em conclusão: leis matemáticas e leis empíricas, gráficos correspondendo a equações e gráficos de laboratório. Uma matemática capaz de se desenvolver ao longo destas directrizes muitas vezes em interacção, é uma matemática que os rapazes têm a impressão - mas não se trata só duma impressão! - de construir com as suas mãos e que portanto não poderá ser esquecida. É uma matemática que não envelhece e o rapaz, futuro cidadão, estará sempre pronto, amanhã, a servir-se dela para outros problemas que abrangem a ciência pura e as aplicações. A cultura matemática de hoje será válida também

para o homem de amanhã, se for dada numa forma construtiva.

Quero agora acabar lendo uma página humorística de que José gostava muito porque - dizia ele - representa verdadeiramente a realidade do nosso ensino. É uma página escrita no final do século passado por um pedagogo italiano, Aristide Gabelli:

"Conta-se que uma vez foi proposto por uma Academia um prêmio para quem soubesse achar as razões pelas quais um peixe morto pesa mais que um peixe vivo. Naturalmente para uma investigação que pressupunha o conhecimento dos mais recônditos segredos da natureza o prêmio não seria pequeno, e foi extraordinário o número daqueles que, com raciocínios longos, partindo de princípios indiscutíveis e tirando logicamente as mais remotas consequências, demonstraram até à evidência as causas deste fenómeno. Houve quem pensasse na alma e nos espíritos vitais que, à maneira duma bexiga num corpo imerso na água, aligeiram a matéria; outros pensaram no movimento que, por causa do atrito com a atmosfera, provoca uma certa suspensão. Em resumo, cada um deu a sua opinião em conformidade com a filosofia natural professada. Um só, homem naturalmente grosseiro e de pouca fé, antes de começar a emitir silogismos, achou que devia pôr na balança um peixe vivo e, depois de o matar, o pôs novamente nela, achando que tanto pesava vivo como morto.

Aumentar a pouco e pouco o número das pessoas que se lembram de pesar o peixe antes de acreditar ou de querer demonstrar que o peixe morto pesa mais que o vivo, é a finalidade principal da instrução".

Decorreu um século, e temos que reconhecer que muito caminho foi feito; mas muito ainda fica por fazer. "Devemos trabalhar - dizia José no final desta leitura - para que a cada rapaz, da cidade como do



campo, seja dada a possibilidade de pesar o seu peixe!"

Atas do Colóquio

7º Encontro de Antropologia em São Paulo

Hoje, nos anos 80, sinto que nos devemos cada vez mais inspi-  
rar nestas suas ideias!

REALISM IN THE PLANNING OF INTERMEDIATE CURRICULA

Douglas A. Gusdill

Cambridge Institute of Education, Cambridge, U.K.

From time to time in every country an opportunity arises to re-  
consider the intermediate curriculum, either in whole or in part. In  
France, for example, the mathematics programs in the collèges and  
lycées has been changing over the last few years from a very abstract  
and didactic presentation of the subject to one emphasizing activity  
and applications. In the Republic of Ireland similar changes have  
come to the Ministry of Education by teachers' groups which may well  
result in a substantially new curriculum for the senior cycle in ad-  
vanced subjects and the production of new text books. Even in England,  
where no national curriculum exists and where schools have a freedom  
to devise their own programs to an extent which their colleagues  
in other countries find scarcely credible, the government has taken  
steps which may have a profound influence on the teaching of mathe-  
matics to pupils aged 11-16 by the end of the present decade.

I hope that you will allow me to begin by saying something about  
this English situation before dealing with broader issues of curri-  
culum in an international context. Not only is it the system which  
I know best but also, in speaking of my own country I can feel free  
to be more critical and outspoken in my opinions, without running the  
risk of offending my friends who work in other traditions.

In English the principle of controlling the secondary school  
curriculum is the national examination system. Pupils may sit for ex-