matematica e cultura 2003

a cura di Michele Emmer

Springer

Indice

matematica e Venezia

verso Pechino 2002

matematica e teatro

matematica e fumetti

Aprire lo sguardo tramite la matematica

Emma Castelnuovo

La prima cosa che devo chiarire è il titolo; che cosa significa? In generale, guardo, osservo, e poi passo dal concreto all'astratto, cioè matematizzo il fenomeno osservato. Oggi, però, il senso dell'osservazione si è molto ridotto. Riflettiamo: si è stimolati ad osservare da un cambiamento, dalla variazione di un fenomeno; e oggi tutto è in movimento, e, quindi, si dovrebbe essere particolarmente sollecitati. Ma non è così: accade infatti che le variazioni, per esempio quelle che osserviamo sullo schermo televisivo, avvengono in maniera così rapida che si coglie lo stato iniziale e quello finale, mentre tutto il resto ci sfugge.

Inoltre, per osservare, occorre ricordare. Ma la memoria è una facoltà che si va perdendo, dato che non ne abbiamo più bisogno: sono i mezzi tecnologici sempre più raffinati che sostituiscono la memoria e permettono al nostro cervello di dimenticare.

Viene in mente Platone che, nel *Fedro*, afferma che l'invenzione della scrittura è stata grandissima, ma questo strumento – dice – cancella la vera memoria.

Ecco, è proprio per motivare l'osservazione che viene in aiuto la matematica. Questo è il significato del titolo della relazione.

Fra le tante problematiche che possono stimolare il senso dell'osservazione ne presento una che si può trattare in classe a vari livelli di età, ad iniziare dai 9-10 anni, e che interessa sempre gli allievi sia perché suscita interrogativi in campo matematico sia perché stimola a "guardare fuori".

Il problema riguarda i concetti di area e di perimetro, e precisamente i rettangoli isoperimetrici.

Si realizzano dei rettangoli tenendo ben teso, fra le due mani, un pezzo di spago legato. Avvicinando e allontanando le mani, il rettangolo assume varie forme, fra cui quella quadrata. Si chiede: "questi rettangoli che hanno come perimetro il pezzo di spago, hanno anche la stessa area?". In tutti i paesi del mondo la risposta è affermativa: "certo, perché il perimetro è lo stesso", o "l'area non può cambiare perché... come potrebbe uscire dal recinto?" o "l'area non cambia perché, quando cambia la forma del rettangolo, quello che si perde in base si guadagna in altezza", e così via.

Queste sono le osservazioni fatte dai ragazzi di oggi, ma risultavano le stesse anche al tempo di Galileo; osserva infatti Galileo (in *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze*) che la maggior parte della gente "ignora che può essere un recinto uguale a un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello".

Ma torniamo a noi: è solo l'osservazione dei casi limite (il rettangolo "si stilizza" nell'altezza, oppure "si schiaccia" sulla base) che porta a dubbi: "sì, l'area cambia". Si passa allora ai numeri: se, per esempio, lo spago è lungo 40 cm, il semiperimetro è di 20 cm. Si calcola allora l'area in vari casi, e ci si convince che il cambiamento è molto rilevante (vedi Tab. 1).

L'area parte da zero e a poco a poco aumenta per poi tornare a zero. Raggiunge il massimo nel caso del quadrato, cioè quando la base è uguale all'altezza. Ma la tabella di numeri diventa espressiva soprattutto se viene tradotta in grafico (Fig. 1); un grafico che ci fa pensare al lancio di una palla.

La curva ottenuta è un arco di *parabola*.

Alla domanda, fatta in classe negli anni Sessanta ai ragazzini di 10-11 anni "avete mai sentito parlare di parabola?" qualcuno timidamente diceva che "sì, in chiesa". Si riferiva alla parabola nel Nuovo Testamento, o, talvolta, il parroco per dare un'idea dello sviluppo della vita, aveva detto che è come una parabola: si nasce e poi si cresce sia fisicamente che intellettualmente, e poi si muore... Si trattava quindi di una rappresentazione spirituale. Comunque, davanti al grafico che traduceva il problema sulle aree dei rettangoli, gli allievi degli anni Sessanta rimanevano abbastanza perplessi.

Oggi, e ormai da qualche anno, non si oserebbe mai domandare se conoscono il vocabolo "parabola". Ma oggi rimangono ancor più sbalorditi! "L'hanno detto in TV – dicono – che si riceve una parabola in regalo se... Ma cosa c'entra la parabola per le trasmissioni via satellite con quel misero arco di curva che abbiamo disegnato?"

Ora è venuta la voglia di osservare e di sperimentare. Ecco come si può passare dall'arco che abbiamo disegnato alla parabola televisiva: realizziamo con un filo di ferro un arco di parabola disponendolo sul grafico della parabola e poi ruotiamolo rapidamente attorno al suo asse di simmetria. Vedremo una specie di scodella: è una superficie parabolica, o paraboloide, come quella delle antenne. Questa superficie ha una proprietà: se è realizzata in materiale riflettente, come i fanali dell'automobile, accade che, quando è esposta al sole, i raggi solari si riflettono in uno stesso punto dell'asse. È il fuoco della superficie parabolica. Vi-

Tabella 1

base	altezza	Area	
0	20	1	*caso limite*
1	19	19	
2	18	36	
•	•	•	
•	•	•	
•	•	•	
9	11	99	
10	10	100	*massimo*
11	9	99	
•	•	•	
•	•	•	
•	•	•	
18	2	36	
19	1	16	
20	0	0	*caso limite*

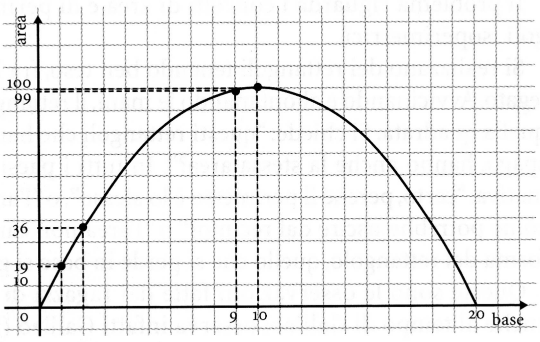

Fig. 1. Il grafico della parabola corrispondente alla tabella numerica 1

ceversa, se nel fuoco è disposta una lampada, i raggi riflessi dalla superficie sono fra loro paralleli, e portano quindi la luce a grande distanza.

Tutte cose che i ragazzi sapevano, ma di cui ignoravano le motivazioni ora è venuta voglia di sperimentare e di osservare. Ora si capisce il funzionamento delle antenne televisive.

Ma non è solo l'arco descritto dalla parabola o l'effetto prodotto da un fanale o da un'antenna televisiva quello che colpisce nei riguardi della parabola. C'è qualcosa che interessa di più: è l'architettura.

Il confronto fra un ponte ad arco parabolico in cemento armato, come per esempio il Ponte Duca d'Aosta sul Tevere (Fig. 2), e i ponti romani ad archi circolari, come il Ponte sul fiume Albarregas a Mérida, Spagna (Fig. 3), porta a riflettere su tanti fatti, fuori della matematica: si pensa al trasporto e alla messa in opera del materiale in epoca romana. Chi erano i lavoratori? venivano pagati? Ci si immerge nella storia sociale dei popoli... Certo, ci stiamo allontanando dalla matematica, ma non credo che... si perda del tempo.

Torniamo ora alla matematica. Abbiamo visto come si passa dall'arco parabolico alla superficie parabolica, cioè al paraboloide: basta ruotare l'arco attorno al suo asse; è chiaro che le sezioni piane perpendicolari all'asse sono dei cerchi. Da

Fig. 2. Il ponte Duca d'Aosta sul Tevere è ad arco parabolico; è stato costruito nel 1939

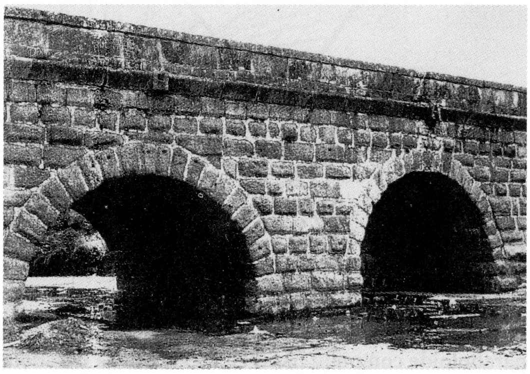

Fig. 3. Il Ponte Romano sul fiume Albarregas a Mérida (Spagna); gli archi sono circolari

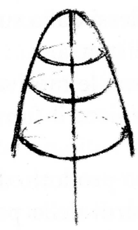

Fig. 4. Paraboloide rotondo, tale cioè che le sezioni perpendicolari all'asse sono dei cerchi

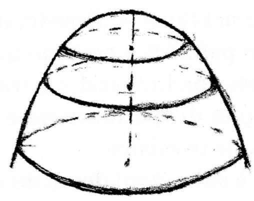

Fig. 5. Ora le sezioni perpendicolari all'asse non sono cerchi ma ellissi

questo paraboloide rotondo (Fig. 4) si può ottenere, con una trasformazione affine, cioè con uno "stiramento", il paraboloide più generale a sezioni ellittiche (Fig. 5).

Il paraboloide ellittico si può "vedere" come un insieme di parabole ottenute sezionando tale superficie con piani paralleli all'asse (Fig. 6).

Per osservare meglio questa superficie che si estende all'infinito, immaginiamo di costruirne concretamente una utilizzando come materiale un grosso filo di ferro e del cartone pesante. Curviamo il filo di ferro a forma di parabola, e ritagliamo tante parabole di cartone; su ciascuna di queste operiamo un forellino vicino al vertice. Basterà far passare il filo di ferro in ogni forellino per dare un'idea concreta del paraboloide ellittico: le parabole in cartone si dispongono come quelle di Figura 6 . Il filo di ferro funziona come "parabola-guida". Osserviamo meglio: le parabole di cartone sono parallele fra loro e hanno la concavità rivolta verso il basso, cioè i loro assi hanno lo stesso senso dell'asse della parabola-guida.

E adesso, un'idea: ribaltiamo la parabola-guida in modo che presenti la concavità verso l'alto (Fig. 7); le parabole di cartone rimangono nella stessa posizione, e quindi i loro assi sono sempre paralleli all'asse della parabola guida, ma, ora, hanno senso opposto.

Si ottiene una nuova superficie, che dobbiamo immaginare estendersi all'infi-

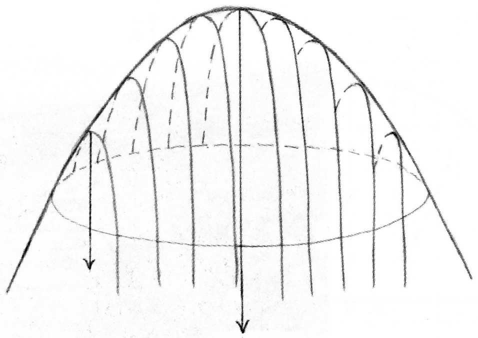

Fig. 6. Il paraboloide ellittico è visto come un insieme di parabole ottenute sezionando il paraboloide con piani paralleli all'asse della parabola-guida

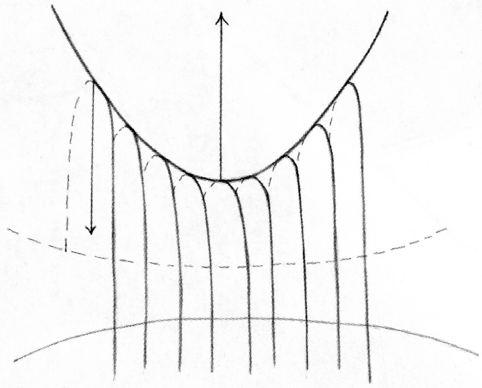

Fig. 7. La parabola-guida viene ribaltata in modo da presentare la concavità verso l'alto

nito: è il paraboloide iperbolico, detto così perché le sezioni con piani perpendicolari all'asse della parabola-guida non sono più ellissi ma iperboli.

È detto anche *paraboloide a sella* per la curvatura che presenta. Questa superficie è nata alla metà del Settecento per opera di Eulero, rivelandosi attraverso la sua equazione di 2° grado. Ed è sempre uno studio analitico che ha fatto scoprire che questa superficie curva contiene due sistemi di rette sghembe (Fig. 8).

Il paraboloide a sella "apparteneva" fino a non molto tempo fa al mondo dei matematici. È solo poco prima del 1940 che è venuta l'idea di utilizzarlo nelle costruzioni edili in cemento armato, proprio perché è formato da rette.Una semplice armatura costituita da verghe di ferro, sghembe a due a due, e ricoperta da calcestruzzo, ha permesso di realizzare in modo economico, e allo stesso tempo resistente ed elegante, tetti, colonne, volte ondulate.

Così il Padiglione Philips ideato da Le Corbusier e Xenakis per l'Esposizione 1958

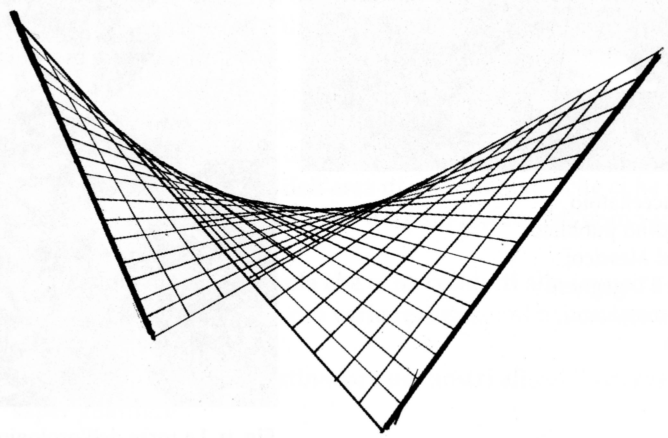

Fig. 8. Il paraboloide a sella è formato da rette sghembe, cioè non giacenti sullo stesso piano

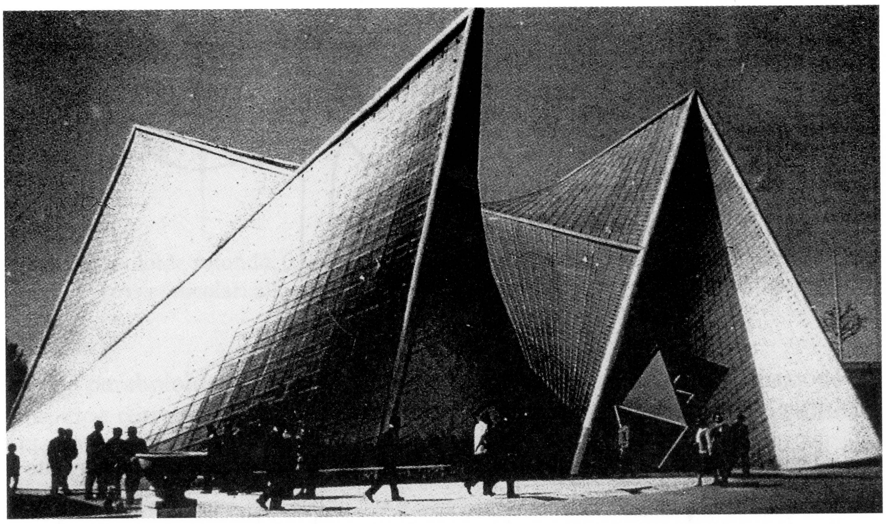

Fig. 9. Il Padiglione Philips a Bruxelles

di Bruxelles (Fig. 9), così le varie costruzioni ideate dallo Studio Nervi di Roma.

Ma sono forse ancora più espressive quelle realizzazioni in cui l'intelaiatura della sella rimane "a nudo", non ricoperta cioè da calcestruzzo. In Figura 10 si vede l'uccellatoio, opera dell'architetto spagnolo-messicano Felix Candela; si trova in un giardino pubblico di Città del Messico, ed è stato creato negli anni Cinquanta.

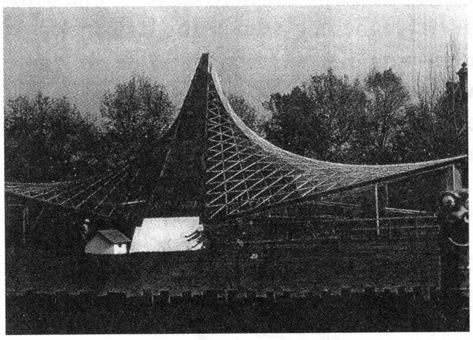

Fig. 10. L'uccellatoio in un giardino pubblico di Città del Messico; è opera dell'ingegnere spagnolo-messicano F. Candela

Fig. 11. La torre dell'orologio nella Città Universitaria di Caracas; è opera dell'architetto venezuelano C.R. Villanueva

Fig. 12. Un paraboloide a sella, opera moderna, in un chiostro del Quattrocento a Cáceres (Spagna)

Della stessa epoca è la Torre dell'orologio (Fig. 11) che domina la Città Universitaria di Caracas: bastano tre pali per costruire un'opera d'arte! È opera dell'architetto venezuelano C.R. Villanueva.

Matematica, architettura, arte. Non hanno più uno scopo funzionale ma solamente artistico quelle creazioni a paraboloide a sella che vengono create solo per il piacere dell'occhio: così la realizzazione che si trova a Cáceres (Spagna) in un chiostro del Quattrocento (Fig. 12). Stili completamente diversi, epoche e ideali lontani, queste opere "immerse" l'una nell'altra suscitano un profondo godimento artistico.

E ora dobbiamo ricordarlo: è un problema matematico riguardante aree e perimetri che ha stimolato la nostra osservazione sulla realtà; è il grafico di una parabola che descrive le variazioni dell'area di un rettangolo che ci ha portato a guardare intorno a noi, che ci ha fatto riflettere sul lavoro dell'uomo in vari periodi della storia.

Ed è sempre lo studio della parabola che ci ha condotti alla scoperta del paraboloide iperbolico, e, da questo, alle più varie realizzazioni nel campo dell'architettura e dell'arte.

È stata la matematica, dunque, a stimolare nei nostri allievi l'osservazione e il gusto del "saper guardare".