MATEMATICA MODERNA

NELLA SCUOLA MEDIA

A CURA DI

MARIO VILLA

CON LA COLLABORAZIONE DI

LUIGI CAMPEDELLI
EMMA CASTELNUOVO
UGO MORIN

PÀTRON

INDICE

II

LE TRASFORMAZIONI ELEMENTARI E LE CONICHE DAL PUNTO DI VISTA SPERIMENTALE

Mi guardo intorno: cosa vedo e cosa penso.

di

EMMA CASTELNUOVO

CAPITOLO I

AFFINITÀ

1. - Osservazioni.

« *La mia ombra mi ha sempre accompagnato fin da quando ero piccolo. Correvo e lei correva: qualche volta ero io che andavo avanti, e mi voltavo e lei era sempre dietro di me, altre volte invece era lei che mi precedeva, e io cercavo di prenderla, di pestarla, ma lei era sempre avanti. E cambiava forma, l'ombra: poteva essere più grande di me, ma poteva essere anche più piccola. Qualche volta, però, la mia ombra non c'era: era sotto di me, si schiacciava sotto i miei piedi.*

Da piccolo, non sapevo spiegarmi questi mutamenti; non avrei certo saputo prevedere, uscendo di casa in una giornata di sole, se si sarebbe presentato l'uno o l'altro caso. Ma poco m'interessava di saperlo: la mia ombra era sempre con me, e non mi importava in quale direzione fosse e nemmeno se fosse grande o piccola: c'era, e io le volevo bene come si vuole bene a un amico fedele.

Poi sono diventato più grande, e l'ombra l'ho guardata di meno; questo amico — confesso — ho finito per perderlo un po' di vista. Ora, mi interessavano di più i veri amici, i miei compagni con cui potevo parlare e giocare.

Ma poi, di nuovo, sono stato attirato dall'ombra: non era più, tanto, la mia ombra che m'interessava, ma l'ombra degli altri, l'ombra degli oggetti, delle cose, gli effetti di luce. Era bello vedere che, anche se le cose erano ferme, l'ombra data dai raggi del sole mutava di forma, di grandezza, di direzione, a seconda delle varie ore del giorno. Dipendeva — è chiaro — dalla posizione del sole rispetto alla terra. Allora, per capire meglio questo fenomeno, mi sono messo, un giorno, ad osservare l'ombra di un lampione a ore diverse (fig. 1). E mi sono ricordato che una volta, in un paese, mi avevano fatto osservare una meridiana, e mi avevano spiegato che serviva come orologio perché, appunto, a seconda delle ore, l'ombra di una certa verga aveva una ben determinata direzione.

Delle volte, l'ombra mi ha attirato ancor più dell'oggetto; ho notato prima l'ombra, l'effetto di luce, e poi le cose che la producevano.

Ricordo le ombre gettate su un lungo viale da un filare di alberi che costeggiavano la strada; ricordo quelle striscie parallele di luci e di ombre che si alternavano sul terreno.

E ricordo anche di aver visto tante volte dei riquadri d'ombra per terra; alzando gli occhi mi accorgevo che era un'inferriata a maglie quadrate a produrre quell'ombra, e notavo che i quadrati del cancello non avevano come ombra dei quadrati, e notavo anche che l'ombra dell'anello di ferro che circondava, a mo' di decorazione, uno dei quadrati non era più un cerchio (1).

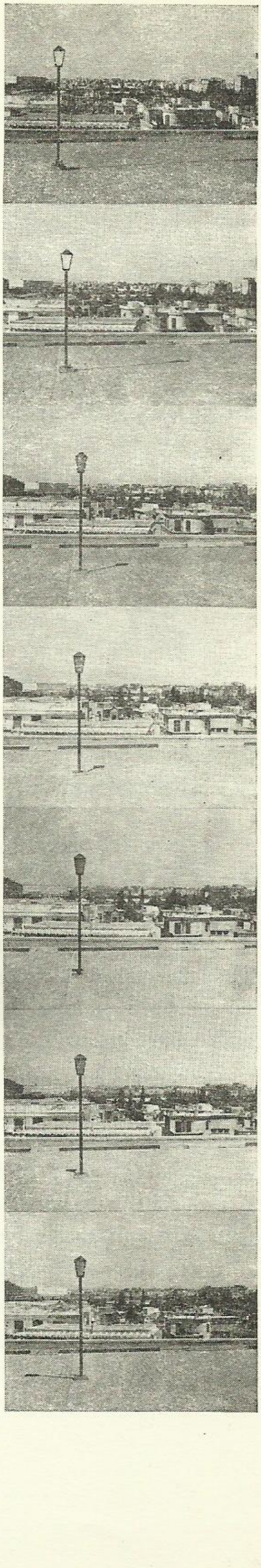

Fig. 1 (2).

(1) Dovremmo dire con più proprietà circonferenza. Nel seguito per cerchio intenderemo sia la circonferenza propriamente detta, sia la regione di piano racchiusa dalla circonferenza.

(2) Le figg. 1, 2, 4, 8, 11-17 dell'Art. II sono qui riprodotte per gentile concessione del Centro di Telescuola, Rai.

Ricordo di essermi seduto a mezzogiorno sotto un pergolato in campagna; e vedevo per terra la disposizione regolare dei rami di vite che, sopra di me, formavano come un tetto; era un quadrettato di ombre proprio uguale al quadrettato dei rami ».

2. - Esperienze.

Chissà quante volte avete fatto queste riflessioni!

Vogliamo aiutarvi, ora, a osservare un po' da vicino, con più metodo, il fenomeno delle ombre date dai raggi del sole; a osservare, e quindi a sperimentare, a ricercare, a fare delle scoperte. E siccome l'osservazione delle ombre dell'inferriata permette di vedere la trasformazione di rette e di figure poligonali, costruiamoci un modellino di quel quadrettato. È un'esperienza che chiunque di voi può fare: costruiamo un telaio « quadrettato », come si può ottenere collegando con viti e dadi tante strisce uguali del meccano, o valendosi di bacchettine di legno.

Il telaio è esposto al sole e voi potete vedere nella fig. 2 l'ombra ottenuta sul tavolo. Cambia, a seconda dell'ora in cui viene fatta

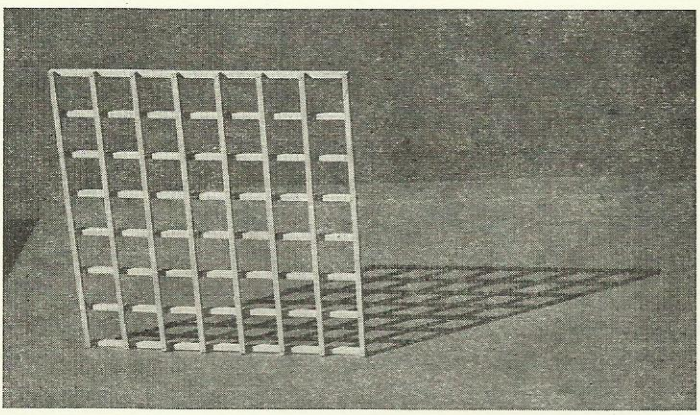

Fig. 2.

l'esperienza, la forma dell'ombra del quadrettato, ma qualcosa si mantiene sempre uguale, è *invariante* rispetto a questa trasformazione: il *parallelismo*. A rette parallele corrispondono sempre rette parallele, e, quindi, al quadrato corrisponde sempre un membro della famiglia dei parallelogrammi, un elemento di questo insieme. Questo elemento può essere un rettangolo, un rombo, un parallelogramma qualsiasi, ma può anche essere, se l'ombra appare su di una parete parallela al telaio, un quadrato *uguale* al quadrato dato.

Questa trasformazione, prodotta dai raggi del sole, da raggi dunque che, data la grande distanza del sole dalla terra, possono considerarsi paralleli, si chiama **affinità** (1). L'ultima esperienza (ombra sulla parete in quelle date condizioni) ci dice che **l'uguaglianza** (2) **è una particolare affinità.**

Abbiamo visto che a rette parallele corrispondono rette parallele; ma a rette perpendicolari, come sono i lati di un quadrato, non corrispondono, in generale, rette perpendicolari; gli angoli, dunque, non sono in generale mantenuti.

Anche l'ombra di un cerchio non è in generale un cerchio, ma è un'*ellisse.* Quante volte si vede per la strada l'ombra ellittica di uno di quei dischi circolari che servono come segnali automobilistici.

Tutte le figure sono trasformate per affinità: cambia in generale la loro forma. Ma — ripetiamolo — qualcosa resta inalterato, « resiste all'affinità », è invariante: il parallelismo; a rette parallele corrispondono sempre rette parallele.

Vi sono poi altri elementi, altre proprietà che sono invarianti rispetto a questa trasformazione. Ecco qualche osservazione e qualche semplice esperienza che può fare chiunque di voi, e che suggerisce ricerche di matematica:

avete mai visto uno di quei tavoli rotondi da giardino in cui, al centro, vi è un foro ove si può infilare il bastone di un ombrellone? Quando non è mezzogiorno l'ombra del tavolo sul terreno è un'ellisse e al foro centrale corrisponde nell'ellisse-ombra una piccola zona luminosa che sembra trovarsi al **centro** dell'ellisse. Per verificare sperimentalmente che al centro di un cerchio corrisponde il centro dell'ellisse, cioè il punto medio di tutte le corde (3) passanti per questo punto, prendete un disco circolare, per esempio in cartone, e praticate un forellino nel centro; esponetelo ai raggi del sole e osservate il punto luminoso, immagine del forellino, nell'ellisse-ombra. Verificate che le corde passanti per il punto luminoso sono divise a metà dal punto luminoso stesso; questo punto si trova dunque nel centro dell'ellisse. Si conclude che *il centro* considerato *si conserva per affinità.*

Viene spontaneo di chiedersi se l'affinità lasci invariato anche

---

(1) Si veda: Art. III, Cap. VII.
(2) Si veda: Art. III, Cap. IV, n. 5.
(3) Si chiama *corda* di un'ellisse un segmento i cui estremi stanno sull'ellisse.

il centro di altre figure, per esempio di un triangolo. Nella fig. 3 vedete un triangolo equilatero costruito con sbarrette: il loro punto d'intersezione è il centro del triangolo equilatero (il baricentro).

Se esponete al sole il triangolo, la sua ombra non è, in generale, un triangolo equilatero; al centro dell'equilatero corrisponde il punto d'incontro di tre rette, le corrispondenti delle mediane. Queste tre rette «sembrano» essere anche esse mediane perché «sembra» che le distanze fra foro e foro di una stessa sbarretta di meccano vengano alterate ugualmente per affinità.

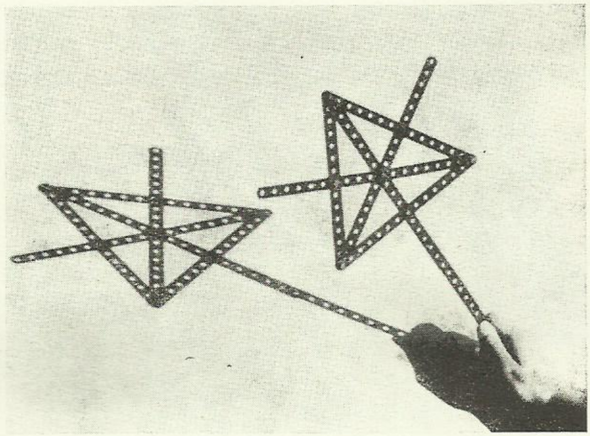

Fig. 3.

Queste esperienze danno idee molto vaghe da un punto di vista matematico ma suggeriscono delle considerazioni che conducono ad importanti risultati di carattere generale.

Riprendiamo il telaio quadrettato e consideriamo nel telaio e nella sua ombra dei segmenti corrispondenti: un lato del telaio è diviso in 7 parti uguali; anche il lato corrispondente del parallelogramma è diviso in 7 parti, uguali fra loro ma non sempre alle precedenti. Si può dunque dire che *in un'affinità i rapporti fra segmenti situati su una stessa retta* (*o su rette parallele*) *e i loro corrispondenti sono uguali.* Viene in tal modo provato che ad una mediana di un triangolo corrisponde, nel triangolo trasformato, una retta che divide un lato in due parti uguali, e quindi una mediana; il baricentro, punto d'incontro delle mediane, sarà anch'esso conservato.

La considerazione del telaio quadrettato ci conduce a un'altra scoperta: i quadretti sono 49, cioè l'area di un quadretto è, evidentemente, la 49ª parte dell'area dell'intero quadrato. È chiaro che anche l'area di un piccolo parallelogramma-ombra, pur essendo di solito diversa dall'area di un quadretto, sarà la 49ª parte del grande parallelogramma, ombra del telaio. Si verifica così, in un caso particolare che: *in un'affinità è costante il rapporto fra aree di figure corrispondenti.*

Ed ecco ancora un'esperienza che ci condurrà ad altre ricerche: utilizziamo il telaio quadrettato, prima costruito, in un altro modo: esercitiamo una piccola pressione su di un lato del telaio; esso allora cambierà di forma e si trasformerà in rombo (fig. 4). Ogni piccolo quadrato si trasformerà in un piccolo rombo. Si tratta dunque di una corrispondenza particolare in cui a quadrati corrispondono rombi.

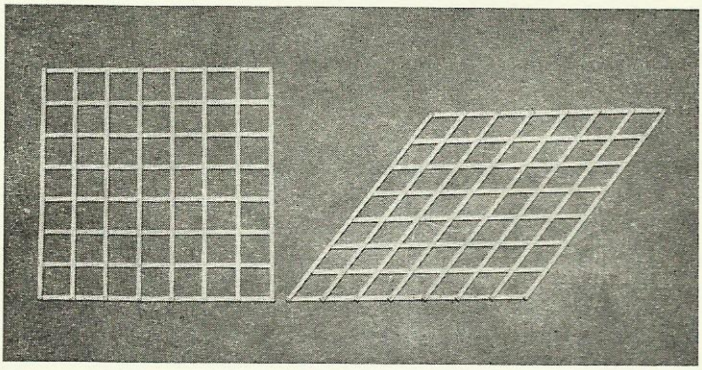

Fig. 4.

Si potranno verificare anche qui le proprietà scoperte per le trasformazioni affini, e cioè che:

— a rette parallele corrispondono rette parallele;
— i rapporti fra segmenti situati su una stessa retta (o su rette parallele) e i loro corrispondenti sono uguali;
— è costante il rapporto fra le aree di figure corrispondenti.

La corrispondenza è dunque un'affinità.

Se poi vogliamo vedere come si trasformano, per affinità, figure anche non poligonali potremo costruire un telaio quadrato con della tela di canavaccio tesa fra quattro listelli di legno cernierati ai vertici. La tela da canavaccio o una fitta rete di nylon permette di vedere la trama e cioè il piccolo quadrettato costituito dalle fibre del tessuto; e permette quindi di osservare che, nella trasformazione, ai piccoli quadrati corrispondono dei piccoli rombi.

Sul tessuto si può disegnare una qualunque figura ed esaminarne la trasformata. Se per esempio, come abbiamo realizzato nella nostra esperienza (fig. 5), l'antica figura era un cerchio, la figura trasformata è un'ellisse, e il quadrato inscritto nel cerchio si trasforma in un rombo inscritto nell'ellisse.

Ricordando la proprietà della costanza del rapporto delle aree

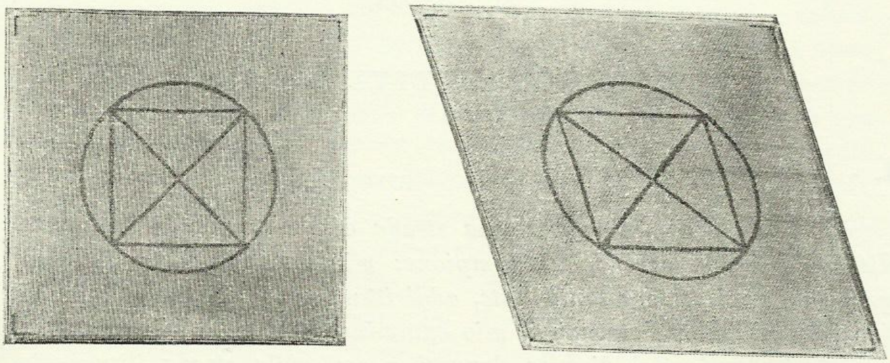

Fig. 5.

di figure corrispondenti, si scoprirà, risolvendo una semplice proporzione, come si trova l'area dell'ellisse. Indichiamo con x l'area dell'ellisse, con r il raggio del cerchio (che è, anche, la semi-diagonale del quadrato) e con a, b i semi-assi dell'ellisse, e cioè le semi-diagonali del rombo. Potremo scrivere:

$$\frac{x}{\pi r^2} = \frac{2ab}{2r^2}$$

da cui

$$x = \pi ab \, .$$

È bello vedere come anche delle semplici esperienze suggeriscano tante idee e portino a fare tante scoperte!

Capitolo II

PROSPETTIVITÀ

1. - Osservazioni.

« *È buio, e cammino per una strada di campagna. A un tratto, dietro di me, si accende un lampione; mi fermo e guardo indietro: quella luce mi sembra tanto forte, addirittura abbagliante, forse perché fuori è così buio. Proseguo il mio cammino; non sono più solo, ora: una lunga ombra si disegna davanti a me, sulla strada illuminata. La mia ombra è così grande, così deformata, che ho un po' paura. Accelero il passo, quasi per sfuggire; ma l'ombra è sempre più lunga* (*fig. 6*), *forse meno nitida — è vero — perché il lume è ormai distante*

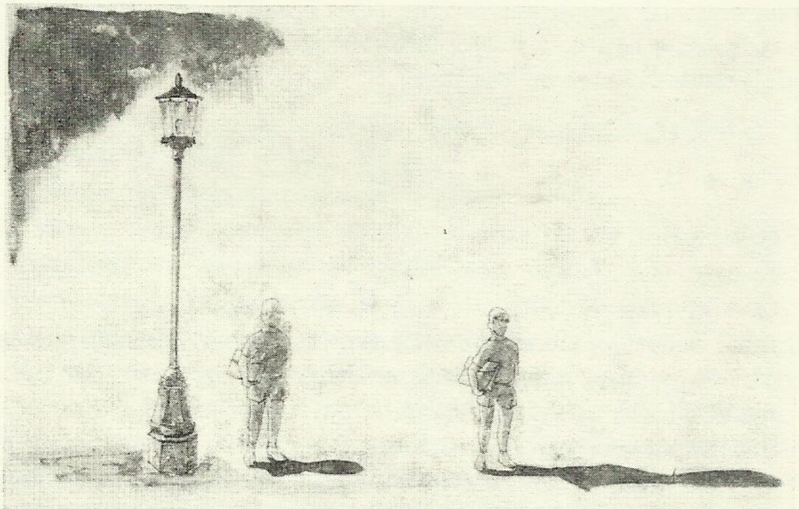

Fig. 6.

e la strada, a poco a poco, ritorna nell'oscurità. Poi, l'ombra sembra piegarsi su un muretto che mi sta davanti. E adesso non è più per *terra: si erige sul muro; e mi vedo più grande ma uguale a quello che sono, con la mia cartella sotto braccio. Grande come vorrei essere, come sarò certo un giorno.*

C'è una pianta sul tavolo della mia camera, che è esile e leggera, così delicata che sembra che i rami debbano piegarsi al nostro respiro. Nessuno la guarda, quella pianta, proprio perché è piccola e sottile. Ma la sera, quando il lume è acceso, l'ombra della pianta sulla nuda parete attira l'attenzione di chiunque entra in quella stanza: perché l'ombra la fa grande, e le foglie si allargano e i rami sembrano più robusti. Chi entra, direbbe che c'è un quadro sulla parete, una delicata stampa in bianco e nero. E verrebbe voglia di eternarli così, quei rami, fissandone il contorno con una matita, in modo che anche di giorno, quando c'è la luce del sole, l'ombra risultasse così ingrandita.

Perché — è vero —, quando la pianta è illuminata in pieno dai raggi del sole, e l'ombra, al tramonto, si forma su quella stessa parete, essa non risulta mai più grande della pianta: l'ombra è uguale alla pianta.

C'è un lume da tavolo nella mia camera, ed ha un paralume cilindrico. È bello vedere gli effetti di luci e di ombre sul soffitto, sul pavimento e sulla parete vicina.

Sul soffitto e sul pavimento vedo disegnarsi un cerchio assai più grande del bordo circolare del paralume. Ma quello che mi interessa di più è la linea di luce che si vede sulla parete: si vedono due curve uguali di luce, due rami — si direbbe — della stessa curva. Due rami che si aprono sempre di più e che rappresentano, evidentemente, la sezione col muro dei coni di luce aventi per vertice la lampada e per generatrici i raggi di luce uscenti dalla lampada e che si appoggiano ai bordi, inferiore e superiore, del paralume (fig. 7).

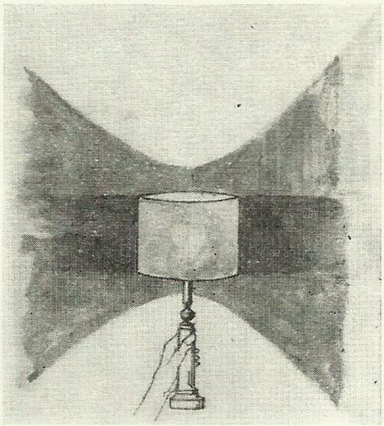

Fig. 7.

Mi è anche capitato di dover inclinare il lume per cercare un piccolo oggetto che era caduto per terra. Ho osservato allora che cambiava la forma della curva sulla parete, e che, a un certo momento, non vedevo più due rami di luce ma uno solo, avente la forma di campana.

Spostando ancora il lume, vedevo disegnarsi sulla parete un'ovale.

Ho capito così che il cono di luce uscente dalla lampada può essere tagliato dalla parete secondo curve aventi forme differenti. Gli effetti di luce e di ombra prodotti da una sorgente luminosa che non si trova a una grandissima distanza come il sole non sono dunque gli stessi di quelli prodotti dai raggi solari ».

2. - Esperienze.

Anche questa volta vogliamo aiutarvi a mettere un po' d'ordine nelle vostre riflessioni fatte « al lume di una lampada ».

Per osservare con più metodo la variazione delle ombre prodotte da una sorgente luminosa, come potrebbe essere una lampadina; riprendiamo ancora una volta il nostro telaio quadrettato.

Diciamo subito che, per evitare che si formino delle penombre, conviene servirsi di una sorgente puntiforme, quale si può ottenere coprendo completamente la lampada con uno schermo scuro in cui sia praticato un forellino: i raggi di luce sono così convogliati in quella piccola apertura.

Illuminiamo il telaio con una lampada. Osservate l'ombra sul tavolo (fig. 8). Varia l'ombra al variare della posizione della lampada, ma si ottengono sempre dei quadrilateri in cui due lati sono paralleli; i quadrati del telaio si trasformano dunque in trapezi. La trasformazione così ottenuta si chiama **prospettività** (1).

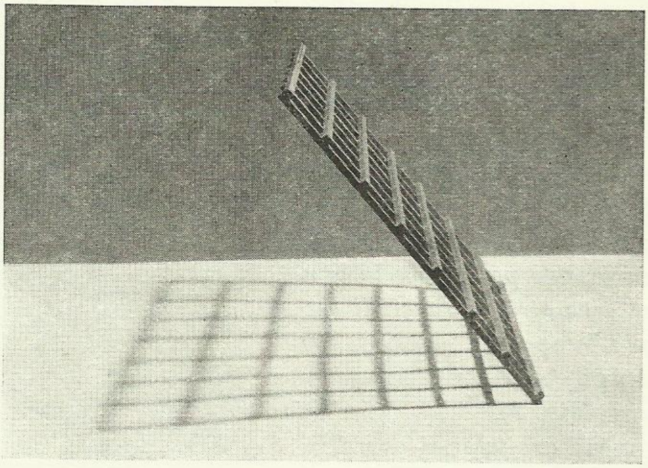

Fig. 8.

(1) Si veda: Art. III, Cap. VII, n. 4.

Viene in mente che è proprio in questo modo, a forma di trapezi, che si disegnano le mattonelle quadrate di un pavimento per dare l'impressione della profondità di una stanza: si dice che si esegue il disegno « in prospettiva ». Guardate come nelle tavole di Paolo Uccello (fig. 9) risulti chiaramente la forma trapezoidale delle mat-

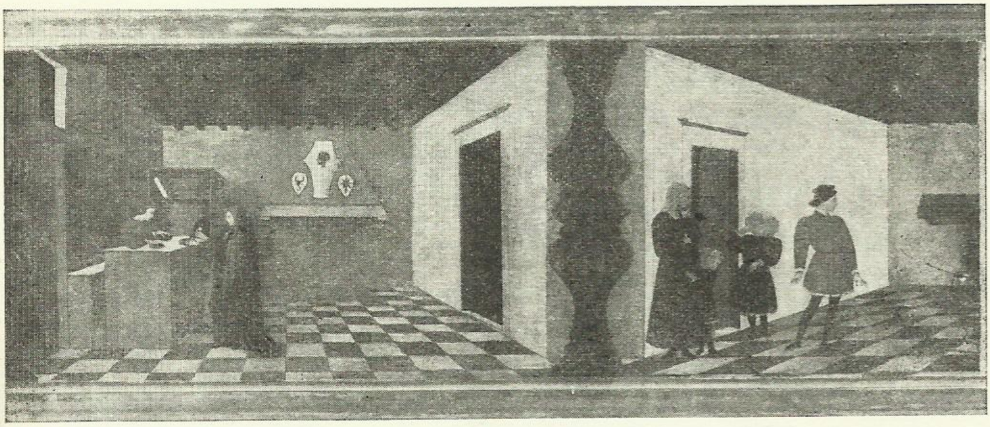

Fig. 9.

tonelle del pavimento e come sia proprio il pavimento così disegnato a mettere in evidenza la profondità di quegli ambienti.

E viene in mente che quando si guardano delle rotaie rettilinee si ha l'impressione che vadano a congiungersi, e i rettangoli formati dalle traverse ci appaiono come tanti trapezi.

Se poi in un quadrato del telaio fossero indicate le diagonali, si vedrebbe che queste che si trasformano nelle diagonali del trapezio, al centro del quadrato corrispondendo il punto d'incontro delle diagonali del trapezio. Questa semplice osservazione ci fa capire che in una prospettività non solo *a rette corrispondono rette* ma che *se un punto appartiene a una retta* (1) *il punto corrispondente appartiene alla retta corrispondente.* La proprietà di mantenere l'appartenenza di punto e retta è un carattere invariante della prospettività.

L'osservazione che al centro del quadrato corrisponde il punto d'incontro delle diagonali del trapezio ci fa anche capire che, in una prospettività, non rimangono inalterati i punti medi di un segmento come accadeva nell'affinità: infatti, il punto d'incontro delle diagonali del trapezio non dimezza le diagonali.

(1) Si dice che un punto appartiene a una retta quando sta su quella retta.

Quando l'ombra si forma su una parete parallela al piano del telaio si vede un quadrato più grande del telaio stesso e ogni quadratino dà come ombra un quadratino più grande (fig. 10). La figura

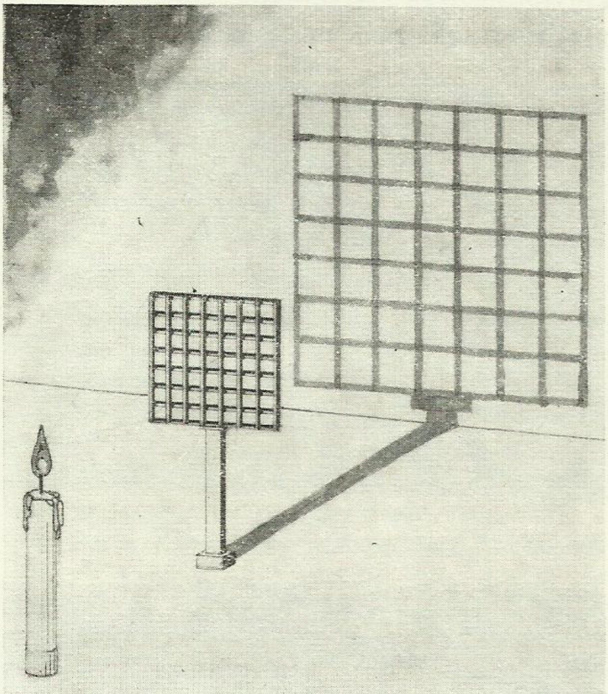

Fig. 10.

ottenuta ha la stessa forma della figura reale ma è più grande: è *simile alla data*. **La similitudine** (1) **è dunque una particolare prospettività.**

È proprio così che si ottiene l'immagine di una diapositiva prodotta sullo schermo cinematografico da un proiettore; l'immagine che vedo è molto ingrandita rispetto alla diapositiva, ma ha la stessa forma, è simile.

Lasciando fermo il telaio, in posizione parallela alla parete, e allontanando la sorgente di luce, si nota che, a poco a poco, il quadrato-ombra si rimpiccolisce, restando però, sempre, più grande del telaio.

L'ombra risulterebbe uguale al telaio se la sorgente luminosa potesse andare a una distanza praticamente infinita, perché allora i suoi raggi potrebbero considerarsi come paralleli, proprio come i raggi del sole. **L'uguaglianza è dunque una particolare similitudine.**

(1) Si veda: Art. III, Cap. VI.

Capitolo III

CONICHE

1. - Le sezioni piane del cilindro e del cono.

Abbiamo notato, osservando il lume con paralume cilindrico' che il cono di luce uscente dalla lampada e le cui generatrici sono i raggi luminosi che si appoggiano ai bordi del paralume sega un piano, ad esempio una parete, secondo curve la cui forma varia, appunto, al variare della posizione del cono rispetto al piano secante.

Per poter esaminare più facilmente le sezioni piane di un cono si può ideare un'esperienza analoga a quella ora descritta ma con mezzi tecnici assai diversi.

Costruiamo un *cilindro* in questo modo: su due dischi uguali di plastica rigida operiamo dei piccoli fori lungo il bordo; attraverso questi fori, nell'uno e nell'altro disco, passiamo un filo elastico, e facciamo in modo, valendoci di un resistente bastoncino di ferro disposto come asse della figura, che i fili, tutti paralleli fra loro, rimangano ben tesi. Otteniamo così un cilindro le cui generatrici sono appunto realizzate da fili elastici (fig. 11). Facciamo ora colpire questo cilindro dalla luce uscente da un proiettore in cui è stata inserita, nello spazio in cui generalmente si dispone la diapositiva, una lamina opaca dotata di una sottile fenditura; la luce, che è quindi obbligata ad uscire dalla fenditura, dà luogo a un piano di luce. Osserveremo che saranno illuminati i punti delle generatrici del cilindro che sono colpiti dalla luce, mentre tutta la rimanente figura rimarrà in ombra.

Se per esempio, come avviene nella fig. 11, il piano di luce è perpendicolare all'asse, si vedrà sul cilindro un cerchio luminoso. Ruotando il piano di luce si può vedere un ovale, un'ellisse (fig. 12); se poi il piano è parallelo all'asse si vedranno illuminate due rette parallele, due generatrici del cilindro (fig. 13).

Si mette così in evidenza che le sezioni piane del cilindro sono: un'*ellisse*, e come caso particolare un cerchio, se il piano secante non è parallelo all'asse del cilindro, *due rette parallele* se il piano secante è parallelo all'asse.

Con un'esperienza dello stesso tipo si possono realizzare le sezioni piane del cono.

Riprendiamo il cilindro e, tenuta fissa una base, ruotiamo l'altra

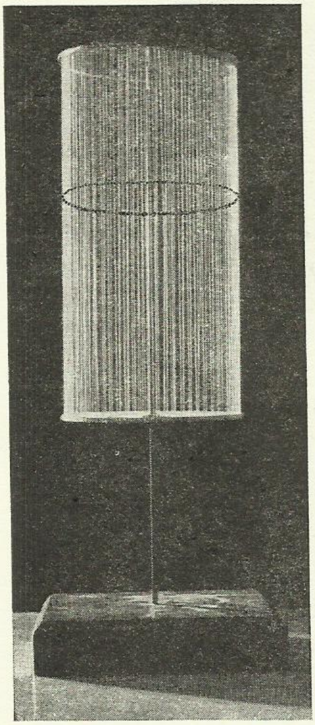

Fig. 11.

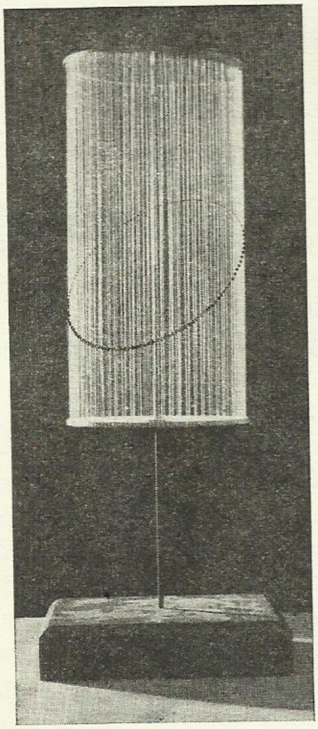

Fig. 12.

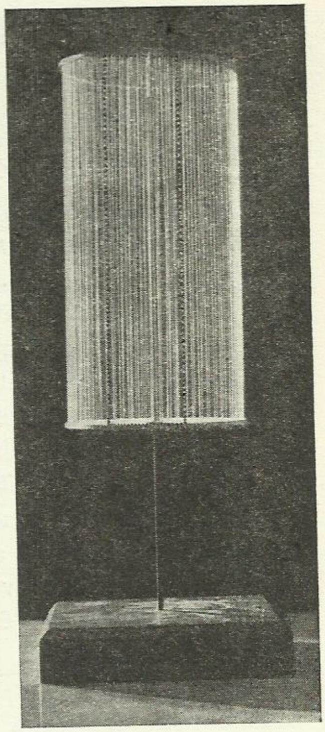

Fig. 13.

sul suo stesso piano intorno al suo centro. Osserveremo che le generatrici, che erano prima parallele, mutano la loro reciproca posizione e diventano sghembe a due a due. Si ottiene una figura nota col nome di *iperboloide rigato* (l'asse del cilindro è un *asse* dell'iperboloide) (fig. 14).

Se poi continuiamo a ruotare una base rispetto all'altra, a un certo momento le generatrici da sghembe diventano incidenti: s'incontrano tutte in un punto e formano due coni, uguali ed opposti al vertice; si dice che questi coni costituiscono un unico *cono*.

Disponiamo questo cono in modo che venga segato dal piano di luce uscente da un proiettore. Ruotando il piano di luce potremo mettere in evidenza le varie forme delle sezioni piane del cono: vedremo un'ellisse (fig. 15), e come caso particolare un cerchio, se il piano secante il cono non è parallelo a nessuna generatrice: esso

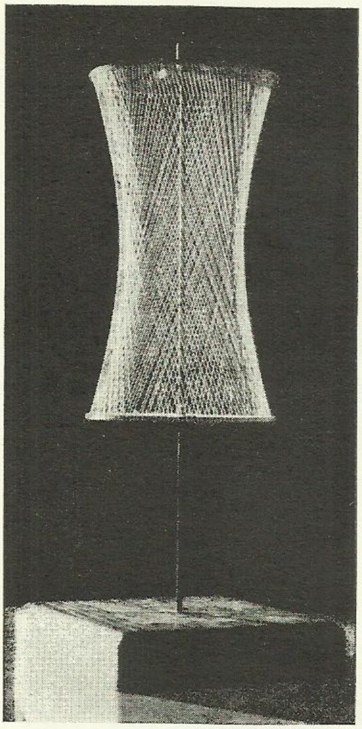

Fig. 14.

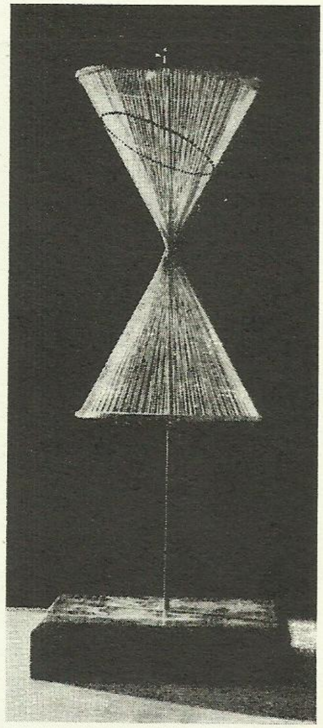

Fig. 15.

sega quindi tutte le generatrici da una stessa parte rispetto al vertice; vedremo una parabola (fig. 16) se il piano secante è parallelo ad una sola generatrice: esso incontra tutte le altre generatrici dalla stessa parte rispetto al vertice mentre non incontra evidentemente la generatrice a cui è parallela, ossia il punto d'intersezione con questa «sfugge». Vedremo poi un'iperbole (fig. 17) se il piano secante è parallelo a due generatrici; il piano sega il cono secondo due rami di curva — l'iperbole — disposti da parti opposte rispetto al vertice del cono.

Si ottengono così tre curve: l'*ellisse*, la *parabola* e l'*iperbole*.

Queste tre curve si chiamano **coniche** proprio perché si ottengono come sezioni di un cono con un piano.

Le tre curve sono diverse di forma una dall'altra, ma il fatto di poterle ottenere con la stessa esperienza, sezionando cioè un cono con un piano, e di poter passare, con continuità, dall'una all'altra,

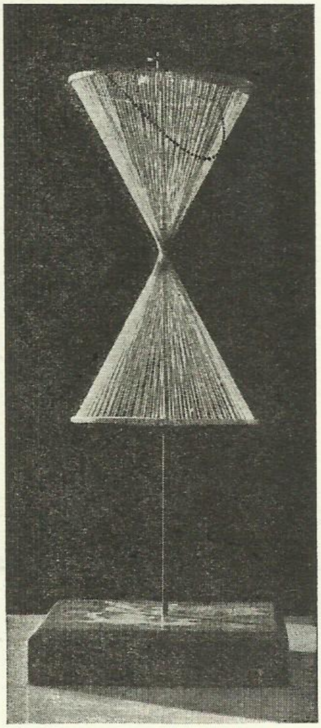

Fig. 16.

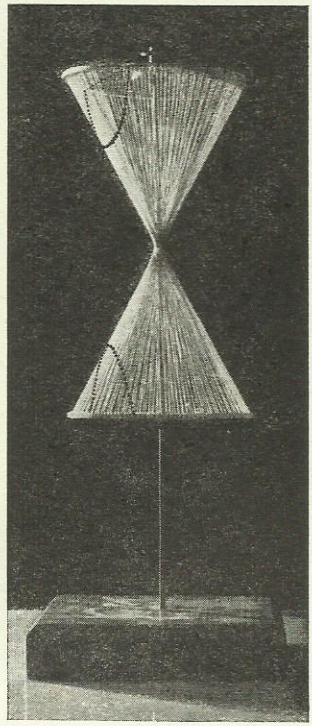

Fig. 17.

ci porta a considerarle come « aspetti diversi » di una medesima curva. È per questo che vengono indicate, globalmente, con lo stesso nome: le coniche.

Quando si osserva la luce proveniente dal lume con paralume cilindrico le generatrici del cono sono dei raggi di luce e il piano da cui il cono viene sezionato è una parete. Si ha allora l'ellisse se la parete incontra tutte le generatrici del cono: ad ogni punto di un bordo del paralume corrisponde un punto luminoso sulla parete, un punto dell'ellisse; si ha una parabola se la posizione della parete rispetto al cono è tale da risultare parallela ad uno solo dei raggi di luce di modo che il punto in cui tale raggio si appoggia al bordo del paralume non viene ad avere il proprio corrispondente sulla parete. L'iperbole si ottiene quando la parete è parallela a due generatrici del cono di luce: i raggi luminosi che si trovano sul piano di queste due generatrici, cioè su un piano parall lo alla parete, non hanno i propri corrispondenti sulla parete stessa, mentre i corrispondenti di tutti gli altri punti dei bordi vengono a trovarsi distribuiti su due archi di curva.

2. - Le coniche, intorno a noi.

Arrichiti da quanto abbiamo appreso dalle esperienze sulle sezioni del cono torniamo a guardare gli oggetti e i fenomeni del mondo che ci circonda. Ci accorgiamo che molte volte si vedono « le coniche » senza rendercene nemmeno conto.

Ecco qualche osservazione, ma molte altre ne troverete voi stessi:

— la superficie libera dell'acqua contenuta in un bicchiere cilindrico, cioè in uno degli usuali bicchieri, ha la forma di cerchio. Se incliniamo il bicchiere, nell'atto di avvicinarlo alla bocca, la superficie dell'acqua prende la forma di ellisse: essa rappresenta infatti la sezione di un cilindro ottenuta con un piano non perpendicolare all'asse;

— quando guardo un cerchio a una certa distanza, non lo vedo, in generale, come cerchio, ma come ellisse. Il bordo di un vaso, ad esempio, mi appare come un'ellisse tanto più « schiacciata » quanto più mi allontano dal vaso. Vedrò quel bordo come cerchio solo se il vaso si troverà proprio al di sotto di me;

— alcuni ponti hanno la forma di semi-ellisse. Guardate la fotografia (fig. 18) di un ponte di Bruges (Belgio); le arcate del ponte, riflettendosi nell'acqua, danno l'impressione di intere ellissi;

— quando lancio una palla essa descrive una parabola. Osservate la fig. 19: con una speciale tecnica è stato fotografato il successivo rimbalzare di una palla. Il vertice della parabola è il punto più alto raggiunto dalla palla;

— l'acqua di una cascata non cade lungo una parete a picco ma descrive un arco di parabola;

— molti ponti moderni hanno la forma di parabola. Si è verificato che la costruzione ad arco parabolico ha il vantaggio di esigere una piccola quantità di materiale e di avere una grande resistenza;

— la superficie riflettente di un proiettore ha la forma di para-

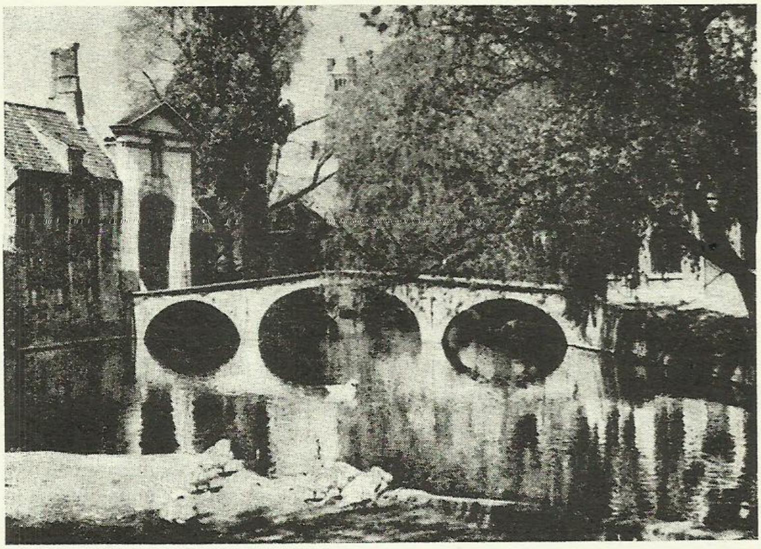

Fig. 18.

boloide rot ndo, di una superficie cioè che si ottiene facendo ruotare attorno al suo asse una parabola;

— molti tavoli moderni, soprattutto da giardino, hanno la forma di iperboloide rigato (fig. 14). Vedendo uno di questi tavoli a una certa distanza si riconoscono chiaramente i due rami di iperbole, sezione del tavolo con un piano passante per l'asse dell'iperboloide;

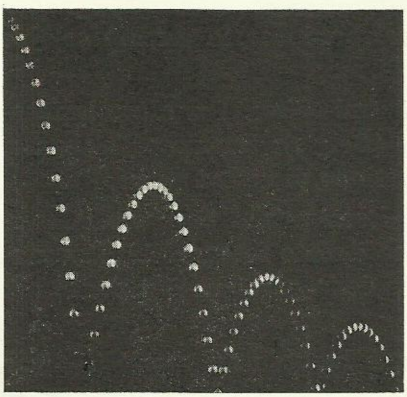

Fig. 19 (1).

— e sembra che anche la natura abbia voluto dare un posto di rilievo a queste curve: hanno infatti forma di ellisse le orbite dei pianeti attorno al sole, e l'orbita della luna attorno alla terra; mentre hanno, approssimativamente, forma di parabola e anche di iperbole le traiettorie di alcune comete.

(1) Dal libro « Fisica » a cura del PSSC, per gentile concessione della Casa Editrice Zanichelli.

3. - Altri incontri con le coniche. L'ellisse.

Ritorniamo dagli spazi interplanetari alla nostra terra, al modesto giardinetto dove spesso andate a giocare.

Chissà quante volte avete girato attorno a un'aiuola o ne avete calpestato l'erba, senza osservarne la forma. Molte volte le aiuole hanno la forma di ellisse. Come ha fatto il giardiniere a tracciarne esattamente il contorno?

È molto facile e ve lo voglio insegnare; vi dico subito, intanto, che, proprio in onore del giardiniere, anche i matematici indicano questa costruzione col nome di « ellisse del giardiniere ».

Ed ecco la costruzione: si fissino due paletti A e B sul terreno e si leghino a questi gli estremi di una funicella (fig. 20); si sposti poi la funicella, valendosi di un bastone, in modo che rimanga sempre tesa. La punta P del bastone traccerà sul terreno un'ellisse.

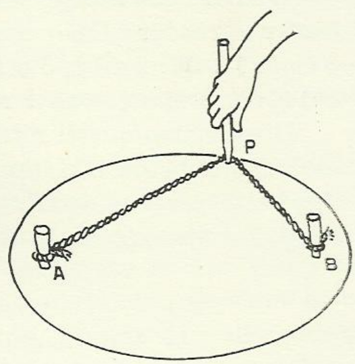

Fig. 20.

I punti A e B, così importanti nella costruzione, si chiamano *fuochi* dell'ellisse, e il punto medio fra A e B è il *centro* dell'ellisse. Se allontaniamo A e B dal centro, di una medesima distanza e sempre sulla stessa retta, e se utilizziamo sempre quella funicella, otterremo delle ellissi via via più « schiacciate »; se invece avviciniamo A e B al centro, l'ellisse ci apparirà con una forma sempre più vicina al cerchio, fino a che, quando A e B coincidono, avremo semplicemente la costruzione del cerchio col compasso: l'apertura del compasso, cioè il raggio del cerchio, è la metà della lunghezza della fune. Tutte queste ellissi hanno lo stesso centro ma fuochi diversi.

Consideriamone una: quella che è disegnata nella fig. 20. Osserviamo che, via via che il punto P si sposta, si ottengono tanti triangoli, ABP, che hanno un lato comune, AB, e tali che è costante la somma degli altri due lati, perché la fune è sempre la stessa. Assumendo AB come base comune, possiamo dire che essi hanno la stessa base e lo stesso perimetro.

Si capisce invece che questi triangoli non hanno la stessa area perché l'altezza relativa ad AB varia, raggiungendo il suo massimo quando ABP è isoscele e il suo minimo (l'altezza diventa nulla) quanto P è allineato con A e B.

Molti altri problemi sorgono dalla questione ora trattata: ci si potrebbe domandare, per esempio, dove si disporrebbero i vertici dei triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza, cioè la stessa area. Ma tutto questo ci conduce lontano dalle « nostre coniche ».

È sempre però un problema di aree e di perimetri che ci fa, ancora una volta, incontrare una conica.

4. - L'iperbole.

Costruiamo in cartoncino tanti rettangoli aventi la stessa area, per esempio un'area di 36 cm^2.

È chiaro che non esiste un solo rettangolo avente l'area di 36 cm^2: basterà prendere come dimensioni due numeri il cui prodotto sia 36, e cioè: 1 e 36; 2 e 18; 3 e 12; 4 e 9; 6 e 6, e anche 0,5 e 72; 0,25 e 144; ... Infiniti sono i rettangoli di area 36.

Disponiamo questi rettangoli di cartoncino « a libretto », in modo cioè che abbiano a comune un vertice e che due lati si trovino su due rette perpendicolari. Ci accorgeremo che i vertici liberi dei rettangoli si dispongono su una curva che è *un ramo d'iperbole* (fig. 21).

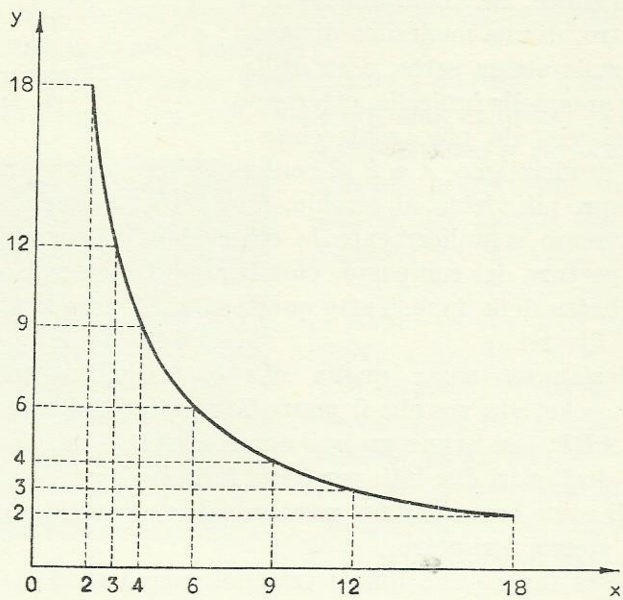

Fig. 21.

Se indichiamo con x la lunghezza della base di un rettangolo e con y quella dell'altezza, varrà la relazione $x \cdot y = 36$. Questa relazione è « attaccata » ad ogni rettangolo, e, di conseguenza, è « attaccata » alla curva dove si dispongono i vertici liberi dei rettangoli, cioè l'iperbole. È per questo che si dice che $x \cdot y = 36$ è l'equazione di quell'iperbole (1).

È interessante osservare che tutti quei rettangoli hanno sì la stessa area ma non hanno lo stesso perimetro, e che il perimetro minimo appartiene al quadrato di lato 6.

Si potrebbe anche porsi il problema seguente: costruire dei rettangoli aventi uguale perimetro; ma questo problema ci condurrebbe ad una retta, e quindi lontano dalle nostre questioni.

Ritorniamo piuttosto ad esaminare più da vicino la relazione che passa fra le dimensioni dei rettangoli equivalenti. Osserviamo che quando una dimensione raddoppia l'altra diventa la metà, quando una dimensione triplica l'altra diventa un terzo, e così via; basi ed altezze dei rettangoli sono dunque *grandezze inversamente proporzionali.*

Ora, una dipendenza funzionale di questo tipo s'incontra in tanti campi; per esempio nella fisica. Basta pensare alla legge che lega volumi e pressioni di un gas mantenuto a temperatura costante (legge di Boyle e Mariotte): se un gas contenuto in una provetta dotata di stantuffo a perfetta tenuta è sottoposto alla pressione esercitata da un peso disposto sullo stantuffo, lo stantuffo discenderà nella provetta e il gas verrà quindi ad occupare un volume minore. Si verifica che al raddoppiare della pressione il volume si riduce alla metà, al triplicare della pressione il volume si riduce a un terzo, e così via. Si scopre dunque, sperimentalmente, che anche volumi e pressioni di un gas sono inversamente proporzionali; cioè, interpretando graficamente la legge, si ottiene come curva un'iperbole.

Il fenomeno fisico ora descritto è ben lontano dalla questione geometrica dei rettangoli equivalenti, gli elementi che sono in gioco, i protagonisti delle due leggi, non hanno davvero alcuna parentela, ma la relazione che li unisce è la stessa, ed è rappresentata in entrambi i casi da un arco d'iperbole.

Un'altra legge di fisica che giornalmente ci viene sott'occhio ma che sfugge alla nostra osservazione, forse proprio perché è troppo familiare, ci farà incontrare ancora una volta una conica.

---

(1) Si veda: Art. IV, Cap. V, n. 4.

5. - La parabola.

Cominciamo anche qui a disegnare la curva sulla base di considerazioni matematiche. Scriviamo in colonna i primi numeri naturali, e scriviamo, a lato, i loro quadrati

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
..	..
..	..

Ad ogni numero naturale — chiamiamolo x — corrisponde il suo quadrato, sia y.

La prima colonna può «rinfittirsi» inserendo fra un numero naturale e il successivo dei numeri decimali; anche ogni numero decimale avrà il suo quadrato, che scriveremo a fianco.

Se poi pensiamo ai numeri prima dello zero, cioè ai numeri negativi, per esempio a -1, -2, ..., ci accorgiamo che i loro quadrati sono positivi perché il prodotto di due numeri negativi ha valore positivo.

Possiamo quindi dire che ad ogni numero x corrisponde il suo quadrato y; e se x rappresenta la lunghezza di un segmento possiamo dire che al segmento x corrisponde un quadrato, costruito su di esso, e la cui area è y, tale che: $y=x^2$.

Rappresentiamo ora questa relazione sul piano fissando due assi cartesiani x e y (1); la curva che si ottiene (fig. 22) è una *parabola*.

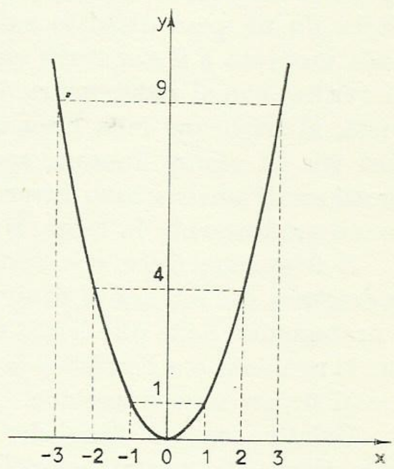

Fig. 22.

E ora, guardate che stretto legame ha la relazione $y = x^2$ con

(1) Si veda: Art. IV, Cap. III, n. 1.

un fenomeno fisico a cui assistiamo tante volte al giorno: vi siete mai chiesti con quale velocità cade un oggetto per effetto dell'attrazione terrestre? Vi siete chiesti, insomma, quanto tempo impiega un grave a percorrere un dato spazio? Questo tempo dipende, evidentemente, dallo spazio percorso dal corpo; ma dipende anche dalla resistenza dell'aria e quindi dalla forma dell'oggetto. Orbene, facciamo astrazione da tutti questi elementi «accessori» e mettiamoci in condizioni ideali. Per evitare la resistenza dell'aria i fisici si valgano di un tubo di vetro in cui è stata estratta l'aria, in cui, cioè, è stato fatto «il vuoto»; se non si hanno a disposizione questi mezzi, ci si può avvicinare all'esperienza del fisico lasciando cadere da una certa altezza un pallino di piombo, un oggetto cioè abbastanza pesante e che offre una piccola superficie all'aria.

Valendosi di un conta-secondi si osserva che dopo il 1º secondo il pallino ha percorso m 4,9; dopo i primi due secondi ha percorso m $4{,}9 \cdot 4$, cioè m $4{,}9 \cdot 2^2$; dopo i primi 3 secondi ha percorso m $4{,}9 \cdot 9$, cioè $4{,}9 \cdot 3^2$; ... dopo t secondi avrà percorso m $4{,}9 \cdot t^2$.

Scriviamo i risultati ottenuti in una tabella indicando a lato dei secondi trascorsi, cioè del tempo, le altezze da cui è caduto il grave

tempo	altezza
1	4,9
2	$4{,}9 \cdot 2^2$
3	$4{,}9 \cdot 3^2$
..	...
..	...
t	$4{,}9 \cdot t^2$

La tabella ora scritta può riassumersi nella formula generale:

$$s = 4{,}9\ t^2.$$

Questa formula mette in relazione lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo; si vede che la legge è dello stesso tipo di quella che lega i numeri con i quadrati dei numeri stessi e che abbiamo riportato in grafico nella fig. 22. Anche il grafico, dunque, che lega spazi a tempi nella caduta dei gravi è una parabola.

Le due leggi, quella geometrica dell'area del quadrato e quella fisica del moto di caduta dei gravi, sono dunque analoghe dal punto di vista matematico: ancora una volta ci troviamo davanti a leggi analoghe riguardanti dei fenomeni i cui protagonisti non hanno davvero nulla in comune.

Capitolo IV

L'UGUAGLIANZA

Quando, all'inizio del Cap. I, abbiamo osservato l'ombra di un telaio quadrato prodotta dal sole, si è notato che, se i raggi solari sono perpendicolari al telaio, l'ombra che si forma su una parete parallela al telaio è uguale al telaio stesso. Si è concluso, allora, che **l'uguaglianza è un caso particolare di affinità.**

Quando poi, osservando le ombre del telaio prodotte da una sorgente puntiforme, abbiamo proiettato il telaio sopra una parete parallela, si è ottenuto, come ombra, un quadrato più grande del telaio reale, si è avuta dunque una figura simile alla data. Se la sorgente luminosa si allontanava, avevamo osservato che l'ombra sulla parete andava via via impiccolendosi, e avevamo detto che, se fosse stato possibile portare la sorgente luminosa a distanza grandissima in modo da poter considerare i raggi come paralleli, l'ombra sarebbe risultata uguale al telaio reale. Queste considerazioni ci hanno fatto concludere che **l'uguaglianza è un caso particolare di similitudine.**

Non ci siamo fermati finora sull'uguaglianza perché sembra che essa non offra davvero alcun interesse. Chi è che non sa che cosa sono due figure uguali? Eppure... anche l'uguaglianza ha i suoi misteri!

Ecco quanto osserva uno di voi davanti allo specchio: « quando mi guardo allo specchio — dice — vedo la mia immagine riflessa, la mia immagine che è uguale a me stesso. E mi sembra un fatto così naturale, tanto ci sono abituato, che non mi pongo davvero dei problemi. Ma il mio gatto, davanti a uno specchio, questi problemi se li pone; tante volte l'ho visto perplesso e agitato davanti alla propria immagine! Si allontana, si avvicina fino a toccare lo specchio, e il gatto che si vede dall'altra parte si allontana anche lui e anche lui si avvicina fino a toccare lo specchio, ma... sempre "dall'altra parte"! E allora gli viene in mente, al mio gatto, di guardare "dall'altra parte", ma, dietro allo specchio, non ci si può andare ».

Gatto pensatore, noi vogliamo venirti in aiuto, pur essendo certi che, se anche tu riuscissi a comprendere i nostri ragionamenti matemateci, penseresti che, in fondo, era più bello godersi quell'immagine uguale e rimanere sempre nel dubbio se essa sia veramente inafferrabile.

La prima domanda che ci poniamo è questa: la distanza a cui ci appare l'immagine di un oggetto dalla superficie di uno specchio piano è proprio uguale alla distanza dell'oggetto reale dalla stessa superficie? Per rispondere a questa domanda si può ideare una semplicissima esperienza: disponiamo una lastra di vetro parallelamente a uno schermo scuro, come in fig. 23. Davanti al vetro mettiamo una

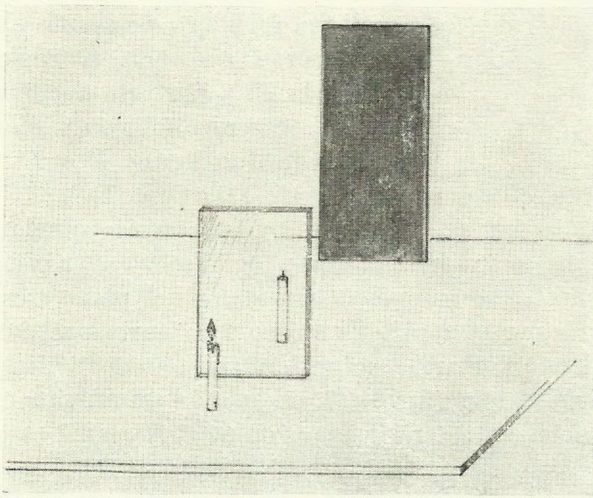

Fig. 23.

candela accesa e dall'altra parte, fra il vetro e lo schermo, mettiamo una candela uguale, ma spenta. Allontanando e avvicinando al vetro la candela accesa, e guardando la candela spenta attraverso al vetro, a un certo punto si avrà l'impressione che essa si accenda. Ciò accade quando la posizione della candela spenta coincide con l'immagine della candela data dal vetro; bene, in quel momento si verifica che le due candele si trovano alla stessa distanza dal vetro: l'oggetto reale e la sua immagine hanno dunque la stessa distanza dal piano del vetro.

Ci chiediamo poi: l'immagine è proprio uguale all'oggetto reale? Facciamo un'osservazione: se la nostra mano destra si trova ben aperta davanti allo specchio è facile rendersi conto che la sua immagine è la mano sinistra. C'è qualcosa dunque che cambia nelle immagini date da uno specchio piano.

Per poter eseguire più facilmente delle misure, invece di lavorare su delle immagini speculari, facciamo un'esperienza che, benché di tipo diverso, conduce ad analoghe osservazioni: pieghiamo lungo la retta a un foglio (fig. 24) di carta dove si sia stata fatta di fresco una macchia d'inchiostro; la macchia si riproduce, uguale, dall'altra parte del foglio. Si hanno così due figure F e F', uguali. Queste figure sono uguali ma è la loro posizione che è diversa: ci si accorge che non si riuscirebbe, ritagliando la F, a portarla a coincidere con la F' senza essere obbligati a *ribaltarla* (¹). Si dice che le due figure F e F' sono *simmetriche rispetto all'asse a* (Cfr. Art. III, Cap. I).

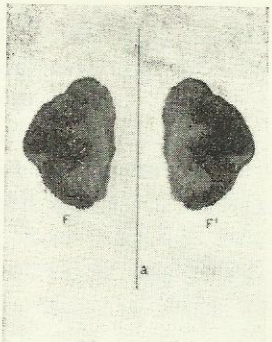

Fig. 24.

Molte volte, invece, una figura può portarsi a coincidere con un'altra uguale disegnata sul medesimo foglio senza aver bisogno di ribaltarla ma effettuando un *movimento rigido* nel piano stesso del foglio.

Scriviamo per esempio il numero 7 in varie posizioni: il 7 della posizione A può portarsi a coincidere con uno degli altri 7 che abbiamo scritto nelle figg. 25, 26, 27, eseguendo un movimento sul piano, movimento che consisterà in una sola *traslazione* nel caso delle figure disposte nella posizione B, B', B'' (Cfr. Art. III, Cap. IV), mentre consisterà in una sola *rotazione* nel caso del 7 scritto nella posizione C (Cfr. Art. III, Cap. III), e sarà poi una *traslazione seguita da una rotazione* nel caso delle figure disposte nella posizione D.

Se invece il 7 si trova, come nella fig. 28, in posizione E, cioè in posizione simmetrica di A rispetto ad a, non basterà effettuare traslazioni e rotazioni, ma saremo obbligati a piegare il foglio lungo a.

Si scopre così che anche in una relazione tanto semplice come è l'uguaglianza vi sono delle interessanti considerazioni da fare. **Due sono i tipi di figure piane uguali: le figure direttamente uguali che si possono sovrapporre con un movimento effettuato sul piano, e le figure inversamente uguali; queste sono simmetriche rispetto a un asse, e sono tali che, per sovrapporle, è necessario « uscire » dal piano.**

(¹) Si veda: Art. III, Cap. I, n, 4.

Tornando a considerare un oggetto e la sua immagine rispetto a uno specchio piano, possiamo dire che, in quel caso, oggetto ed

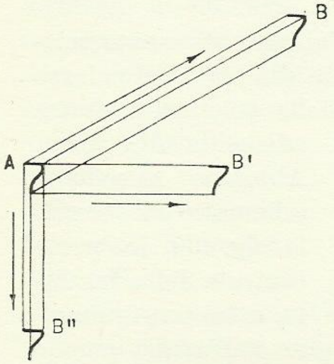

Fig. 25.

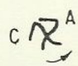

Fig. 26.

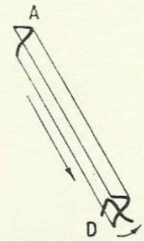

Fig. 27.

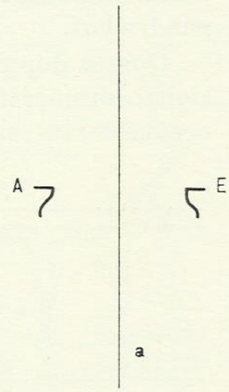

Fig. 28.

immagine sono figure simmetriche rispetto a un piano, il piano dello specchio.

La fig. 29 illustra un bell'esempio di simmetria rispetto a piani: la superficie dell'acqua fa da specchio alla facciata di quel meravi-

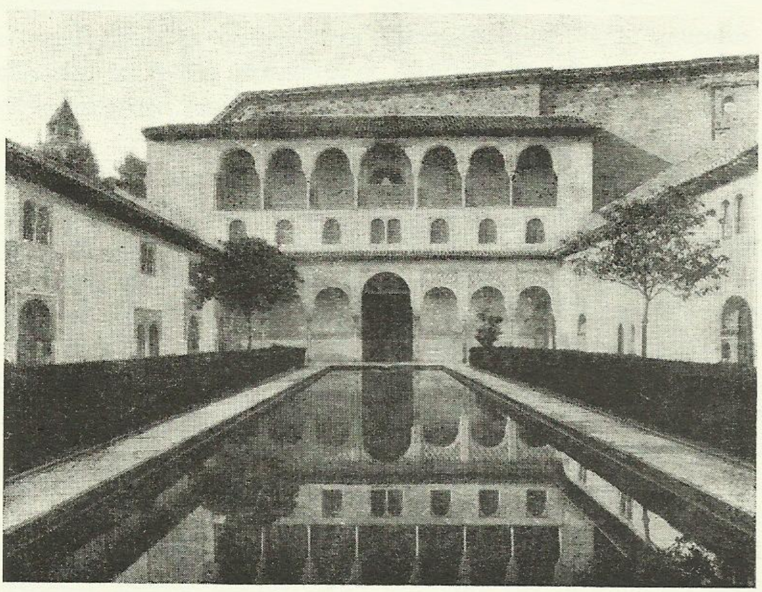

Fig. 29.

glioso palazzo dell'Alhambra (Granada, Spagna), ma il palazzo stesso ha un piano di simmetria, il piano verticale passante per l'asse della porta. Ne risulta una doppia simmetria rispetto a due piani perpendicolari.

Questa doppia simmetria dà luogo ad un'altra interessante relazione: considerate la colonna a sinistra adiacente alla porta del palazzo e considerate anche l'immagine nell'acqua della colonna a destra adiacente alla porta. Abbiamo riprodotto schematicamente nella fig. 30 la parte centrale della facciata e la sua immagine nell'acqua perché possiate prendere facilmente delle misure. Bene, vi accorgerete che un punto della colonna di sinistra, per esempio l'estremo P della colonna AP, e l'estremo P' della colonna $A'P'$ sono allineati col centro O della base della porta; vi accorgerete inoltre che la distanza OP è uguale alla distanza OP'. Si dice che i segmenti AP e $A'P'$ sono *simmetrici rispetto al centro di simmetria* O.

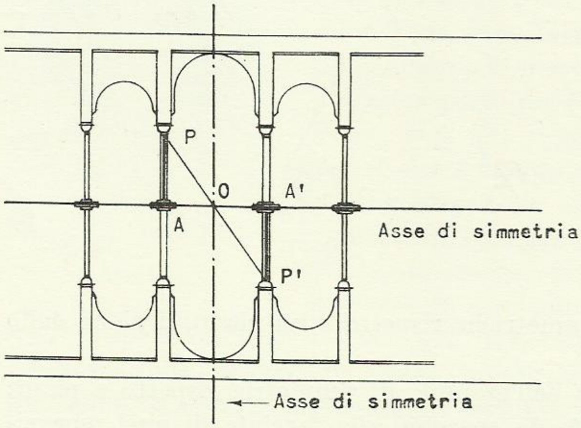

Fig. 30.

Non è certo la prima volta che sentite parlare di figure simmetriche rispetto a un centro. Già so che state pensando alla macchina fotografica e all'immagine di un oggetto che si forma sulla lastra sensibile; l'immagine si forma — è vero — in senso opposto, ma essa è, in generale, assai più piccola dell'oggetto reale. E poi, l'immagine sulla pellicola, noi non la vediamo. Per rendersi conto di come si può formare con un dispositivo dello stesso tipo della macchina fotografica un'immagine uguale e capovolta, vi suggerisco di costruire una *camera oscura*; la camera oscura è la più semplice, la più schematica macchina fotografica. Prendete una scatola di cartone (fig. 31) e sostituite una della facce con della carta velina ben tesa; nel centro della faccia opposta fate un forellino. Davanti al forellino disponete un oggetto luminoso, per esempio una candela accesa, e osservate dal di fuori la faccia della scatola ove è tesa la carta velina. Noterete che si forma sulla carta velina un'immagine capovolta della candela, e che quest'immagine diminuisce o ingrandisce allontanando o avvicinando la candela al forellino. Per una certa posizione si vede formarsi un'immagine uguale alla candela; misurando la distanza fra la candela e il forellino, e la distanza fra il forellino e la carta velina, cioè la profondità della nostra scatola, vi accorgerete che queste due distanze sono uguali. L'oggetto e la sua immagine sono allora simmetrici rispetto a un centro, il forellino.

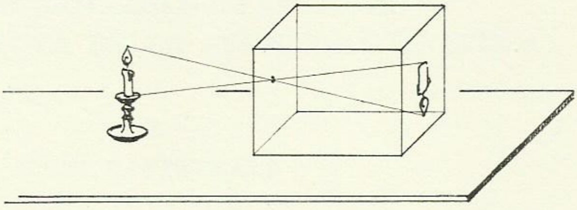

Fig. 31.

Ma non voglio suggerirvi altri problemi perché so che tanti ne verranno in mente a voi stessi. Io penso che la lettura di questo Articolo farà sì che vi guarderete attorno con occhio più critico e indagatore, e che le cognizioni matematiche che andrete via via acquistando vi porteranno a scorgere nelle cose e nei fenomeni del mondo che vi circonda tante proprietà che per anni vi sono passate inosservate, tante leggi che sembravano quasi nascoste.