ANTOLOGIA

IL MONDO DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Quando il bambino ha in mano il quadrato articolabile, egli pensa solamente al contorno, non all'interno e, così, il rombo è, per lui, il contorno del rombo. Quando questa figura viene fatta variare, ogni punto di un lato quadrato si trasforma in un punto del lato corrispondente del rombo. Il bambino facilmente arriva a questa considerazione e riesce anche a farci vedere come, col disegno, può, dato un punto del contorno, costruire il suo corrispondente facendo uso del compasso.

I ragazzi non pensano ai punti interni se non si suggerisce loro il problema; è chiaro che ad ogni punto interno del quadrato corrisponderà un punto interno del rombo, e viceversa. Tutti i punti saranno soggetti ad una «forza invisibile» che li obbliga a lasciare una data posizione per portarsi in un'altra. Ma il problema è appena affacciato che sorge da parte dei bambini una questione quanto mai misteriosa e affascinante: «Come può – dicono – stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra i punti delle due figure se le figure non hanno la stessa area?». E penseranno a questi punti più o meno fitti, più o meno ravvicinati; e li vedranno comprimersi a poco a poco sempre più, mentre il rombo tende al caso limite. Ma, allora, come sono fatti questi punti se si possono comprimere all'infinito? Domande, risposte, discussioni.... Si potrà anche portare un esempio più semplice di corrispondenza biunivoca che conduce ad una analoga questione, esempio che interessa segmenti e non superficie.

Ma il problema resta perchè c'è. La questione colpisce profondamente: i bambini avvertono che è proprio in problemi di questo genere che sono le radici della matematica. Matematica applicata da una parte e matematica pura dall'altra; non esaltiamo l'una a scapito dell'altra, perchè – facciamolo ben notare – ora è l'una e ora è l'altra che ci fanno progredire nella scienza.

Torniamo al nostro quadrato: la trasformazione da quadrato a rombo interessa dunque – abbiamo visto – non solo il contorno delle figure ma anche l'interno. Ma come costruire il corrispondente punto interno del quadrato? Ancora una volta il materiale ci viene d'aiuto. Riflettiamo: ogni punto interno del quadrato si potrà pensare come intersezione di due rette parallele ai lati del quadrato (fig. 1), si potrà, in altri termini, pensare al quadrato come «quadrettato». Questa considerazione ci suggerisce la costruzione di un materiale: costruiamo un reticolato con tante strisce uguali del meccano e fissiamo con viti e dadi ogni punto d'incrocio delle strisce. Articolando questo reticolato, osserveremo che ogni quadrato si trasforma in un piccolo rombo, e che, quindi, ad ogni punto d'incrocio, vertice di un quadratino, corrisponde un vertice del piccolo rombo (fig. 2).

È facile ora tradurre in un disegno quanto abbiamo visto sul materiale: si rende così visibile come il piano trasformato sia riferito ad un sistema di coordinate non più ortogonali ma oblique. E il disegno sembra adesso essere più chiaro, più «tangibile» del materiale; effettivamente il disegno permette di vedere nello stesso tempo le due figure – il quadrato e il rombo – e permette quindi di *costruire, punto per punto, il trasformato. Inoltre avendo lì disegnate sul foglio le due figure, il bambino riesce a «tornare indietro», a invertire il procedimento, passando dai punti del rombo a quelli del quadrato. E sappiamo che è solo quando*

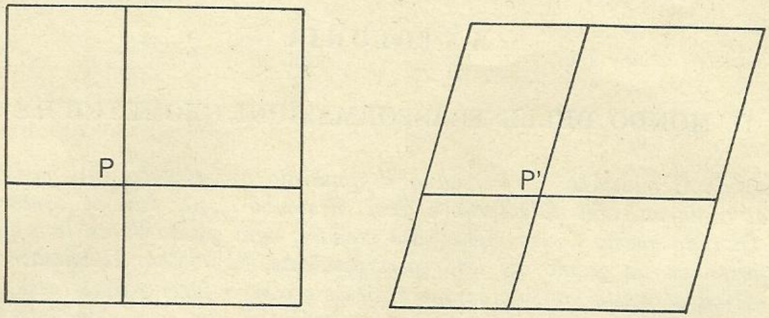

Fig. 1.

le due operazioni – la diretta e l'inversa – sono chiare alla mente, quando cioè il pensiero è diventato reversibile, che la nozione di corrispondenza sarà del tutto chiara.

Pensiamo poi a un reticolato grandissimo, a un piano « quadrettato ». E pensiamo a quella trasformazione che muta i quadretti in rombi. Alternando l'osservazione del reticolato (fig. 2) con la costruzione in disegno, il bambino stesso potrà scoprire alcune proprietà di questa trasformazione, almeno limitandosi ai punti del quadrato; osserverà che:

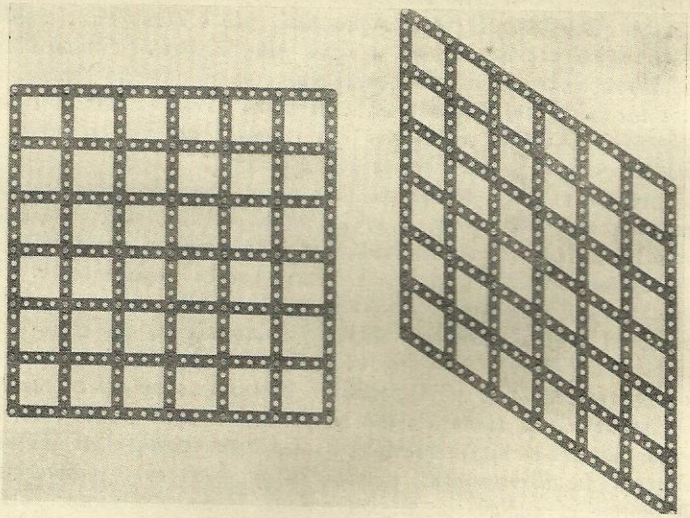

Fig. 2.

a) *i soli punti che restano fissi in questa trasformazione sono i punti del lato del quadrato che è tenuto in mano: quel lato si chiama asse della trasformazione (è luogo di punti uniti);*

b) *se ad ognuno dei quadretti che formano il reticolato corrisponde un rombo, vuol dire che al rettangolo formato da due di quei quadretti corrisponde un parallelogramma;*

c) *a rette parallele corrispondono rette parallele;*

d) *rette congiungenti punti corrispondenti sono parallele;*

e) *rette corrispondenti s'incontrano sull'asse, o sono ad esse parallele;*

f) *il rapporto delle distanze dall'asse dei due punti corrispondenti è costante;*

g) *il rapporto di aree corrispondenti è costante.*

Questa trasformazione è detta affinità.

Abbiamo considerato, come figure, solo quadrati e rettangoli ed abbiamo osservato in qual modo mutava la loro forma durante la trasformazione; viene

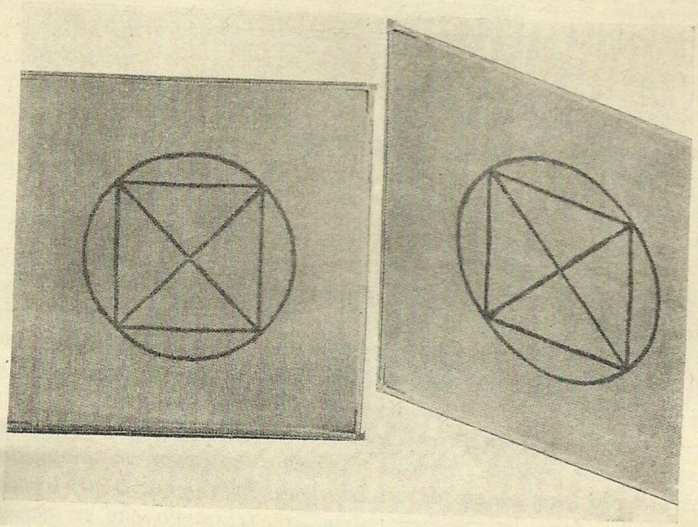

Fig. 3.

spontaneo – e sono i ragazzi stessi che si porranno la questione – di domandarsi come si deformerà un cerchio o una qualunque altra figura.

Possiamo allora perfezionare il nostro materiale così: in un telaio quadrato realizzato per esempio con quattro listelli di legno cernierati ai vertici tendiamo della tela di canavaccio, della tela insomma di cui sia ben visibile la trama a quadretti (fig. 3); osserveremo allora che se il telaio viene inclinato a rombo ogni quadretto della tela si trasforma in un piccolo rombo. La trasformazione che stiamo operando è dunque quella di prima. Disegnamo ora sulla tela una qualunque figura e ricalchiamo questa figura su una lastra di vetro e di plastica trasparente disposta sopra il telaio. Articolando il telaio, noi vedremo, di trasparenza, la figura di prima mutare di forma mentre rimarrà sulla lastra il disegno dell'antica figura. Avremo quindi, su piani sovrapposti, due figure: l'antica e la trasformata e osserveremo che la forma è sempre diversa. Così, per esempio, se l'antica figura era un cerchio, la nuova, cioè la trasformata, sarà un'ellisse, e sarà ben visibile che al quadrato inscritto nel cerchio e che ha i lati paralleli alla quadrettatura corrisponderà un rombo inscritto nell'ellisse avente come diagonali gli assi dell'ellisse (fig. 3).

È anche interessante vedere che a seconda dell'angolo di cui inclino il telaio varia la forma della figura trasformata; così la trasformata di un cerchio è una ellisse tanto più « schiacciata » quanto maggiore è l'angolo acuto di cui ruota il telaio.

Questo angolo dipende, evidentemente, dal rapporto $\frac{a}{b}$ *fra il semi-asse minore e il semi-asse maggiore dell'ellisse, cioè dal rapporto fra la semi-diagonale minore* a *e la semi-diagonale maggiore* b *del rombo inscritto nell'ellisse.*

Ricordando la proprietà g) *e tenendo presente che il rombo di semi-diagonali* a) *e* b) *è il trasformato del quadrato inscritto nel cerchio del raggio* r, *non sarà difficile condurre il ragazzo alla scoperta – e si tratta di una scoperta analitica – della formula che dà l'area dell'ellisse. Infatti, per la proprietà* g), *si ha:*

$$\frac{\textit{area rombo}}{\textit{area quadrato}} = \frac{\textit{area ellisse}}{\textit{area cerchio}}$$

e cioè

$$\frac{ab}{r^2} = \frac{x}{\pi r^2}$$

da cui

$$x = \pi ab.$$

È un esercizio questo, che può svolgersi nella terza classe, dopo che si è parlato dell'area del cerchio e delle proporzioni. Si tratta di risolvere una proporzione per stabilire una regola generale, per fare dunque una scoperta. Il ragazzo comprende così la potenza del metodo analitico; e, ancora una volta, geometria, aritmetica ed algebra, si fondono aiutandosi l'un l'altra.

È anche interessante notare come, mentre in questa trasformazione le aree non si mantengono costanti, rimane invariata la proprietà pitagorica relativamente al triangolo trasformato di un triangolo rettangolo: a un triangolo rettangolo corrisponde, dopo la trasformazione, un triangolo che in generale, non è rettangolo, e i quadrati costruiti sui tre lati del triangolo rettangolo si mutano in parallelogrammi. Anche un bambino riuscirà con semplici scomposizioni in poligoni a due a due uguali a stabilire l'equivalenza fra il parallelogramma costruito sul lato maggiore e la somma dei parallelogrammi costruiti sugli altri due lati. Del resto, la proprietà discende dal fatto che è costante il rapporto fra aree corrispondenti.

Si potrà far notare che in un caso, quando cioè i cateti del triangolo rettangolo hanno la direzione delle diagonali del quadrato, al triangolo rettangolo corrisponde un triangolo rettangolo; ciò deriva dal fatto che la coppia delle diagonali del quadrettato si mantiene ortogonale.

La proprietà, trasformata del teorema di Pitagora in questa corrispondenza, non è particolarmente espressiva ma ha valore in quanto proprietà invariante rispetto alla trasformazione che si considera.

L'argomento ora trattato, se da una parte sembra condurre a questioni lontane dal concreto, invita, dall'altra parte, all'osservazione del concreto. Il cambiamento della forma di una figura colpisce infatti il bambino molto di più dell'uguaglianza e anche della similitudine. Ed è proprio l'esperienza sul quadrato articolabile che conduce il ragazzo ad osservare dei fenomeni naturali che tante volte ha visto senza fermarvi l'attenzione.

Fin da piccolo il bambino nota la sua ombra sul terreno, e osserva che alcune volte è più piccola mentre altre volte è più grande della sua figura; sa anche che queste variazioni di grandezza dipendono dall'inclinazione dei raggi provenienti dal Sole o da una lampada, ma non si è mai proposto di approfondire la questione forse perchè ha capito che non si tratta di un problema semplice. E difatti la questione non è semplice, ma l'esperienza del quadrato articolato può venirgli in aiuto e dargli dei suggerimenti.

Una stanza a livello stradale ha una porta-finestra a inferriata che si apre sulla strada. Talvolta, la porta è colpita dai raggi del Sole e sul pavimento o sulle pareti della stanza appare l'ombra del quadrettato dell'inferriata: si avranno a seconda dell'inclinazione dei raggi, dei parallelogrammi, dei rombi, dei rettangoli e anche dei quadrati. Accade sempre – ed è il caso di farlo notare – che alle verghe parallele del quadrettato di ferro corrispondono, come ombre, rette parallele, cioè i quadrati si trasformano sempre in membri della famiglia dei parallelogrammi. Anche questa trasformazione è del tipo affine.

Se un bambino è appoggiato all'inferriata, la sua ombra si vedrà fra i parallelogrammi-ombra, e le sue forme saranno alterate con la stessa legge. A seconda dell'inclinazione dei raggi del sole cambia la forma dei parallelogrammi, e cambia quindi, anche la forma dell'ombra del bambino.

Ma egli osserverà che, sempre, l'ombra dei suoi piedi si confonde con i piedi stessi, e ne trarrà la conclusione che la verga dell'inferriata che rasenta il suolo è un elemento unito *di questa trasformazione.*

Se poi i raggi arrivano in direzione perpendicolare al piano dell'inferriata (il che può verificarsi all'alba o al tramonto) si vedrà, sulla parete opposta, delinearsi l'ombra dell'inferriata; si noterà che, allora, ai quadrati reali corrispondono quadrati d'ombra uguali. E, se in quel momento il bambino è appoggiato all'inferriata, egli vedrà delinearsi sulla parete opposta la sua ombra, uguale, a lui stesso, cioè, per esattezza, uguale al suo contorno.

L'uguaglianza è dunque un caso particolare dell'affinità.

È sera, e il bambino si trova ancora una volta appoggiato a quell'inferriata e anche questa volta vede la sua ombra sul pavimento della stanza; l'ombra è ora prodotta dalla luce proveniente da un lampione stradale. Ora, ai quadrati dell'inferriata non corrispondono sul pavimento dei parallelogrammi, ma dei quadrilateri con due soli lati paralleli, cioè dei trapezi: anche in questo caso, però, la verga rasente il terreno è un elemento « unito ».

Si dice che le due figure (la reale e la sua ombra) si corrispondono in una prospettività.

Osservando i quadrati dell'inferriata e le loro ombre sul pavimento, cioè i trapezi, al bambino verrà certo in mente che anche a lui è capitato tante volte, nel corso del disegno, di rappresentare con dei trapezi un pavimento a mattonelle quadrate per dare l'idea della profondità di una camera; qui, con le ombre, la rappresentazione dell'oggetto è già realizzata, come se il lampione benefico gli avesse fatto il compito di disegno!

Se poi l'ombra si forma sulla parete opposta, il bambino osserverà che ai quadrati reali corrispondono, come ombre, dei quadrati più grandi, e che la sua ombra è più grande di lui stesso, ma ha la forma del suo contorno, è simile.

La similitudine, è dunque, un caso particolare di prospettività.

Riflettendo su quest'ultimo caso, al bambino verrà spontaneo di pensare che quando va al cinematografo vede sullo schermo delle figure che hanno la *stessa forma della figura che si trova sulla pellicola ma che sono molto ingrandite; perchè anche lì, l'immagine è ottenuta proiettando la pellicola su uno schermo da una sorgente luminosa puntiforme.*

È interessante dopo quest'ultima esperienza, far ripensare alla precedente, quando la sorgente luminosa era il Sole: si potrà far osservare che è « come se » quel lampione si spostasse sempre più lontano; i suoi raggi formano angoli sempre più piccoli e tendono a diventare paralleli. Allora, l'ombra sulla parete opposta, che aveva la stessa forma della figura reale ma era più grande, tenderà a rimpicciolirsi sempre più fino a diventare uguale.

L'uguaglianza è dunque un caso particolare della similitudine.

Sarà anche interessante notare che l'osservazione dei quadrilateri-ombra, diversi per forma a seconda del tipo di prospettività, fa comprendere, ancora una volta e da un altro punto di vista, come è costituito l'insieme di questa famiglia e quali sono i vari sotto-insiemi.

. . . .

Abbiamo voluto parlare di questi argomenti in modo elementare per far comprendere come si riesca a portare, anche nella classe dei bambini, questioni superiori che mettono in luce la struttura unitaria di diversi capitoli della matematica. Ma vogliamo sottolineare lo scopo della trattazione di questi argomenti non è solo quello di dare un'idea della potenza unificatrice di questa scienza ma è anche quello di ravvicinare la matematica alla realtà concreta. Accade infatti che le matematiche superiori sono, molte volte, più vicine al concreto e quindi più vive delle matematiche elementari, le quali troppo spesso « stilizzate » nei loro elementi semplici, appaiono fredde e lontane dalla complessa realtà del mondo che ci circonda.

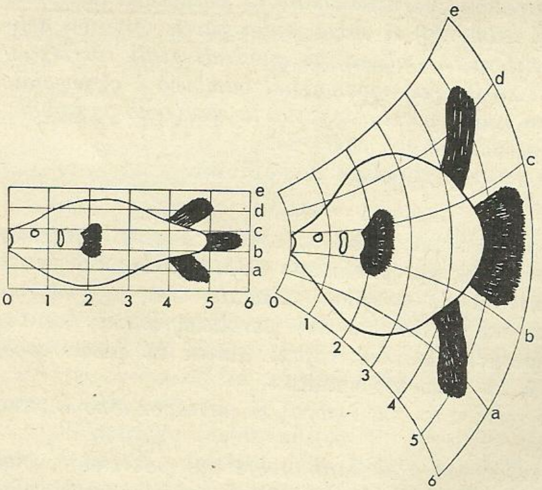

Fig. 4.

Una trasformazione del tipo di quelle ora considerate ci viene offerta da uno sguardo al mondo della biologia. Esistono certe specie di animali, per esempio dei particolari pesci, tali che, se « incaselliamo » il disegno di uno di questi in un reticolato (a maglie quadrate o rettangolari) trasformando con una determinata legge quel reticolo, nasce una nuova figura che rappresenta un pesce realmente esistente e nel quale si riconoscono caratteri biologici che lo legano al primo pesce (fig. 4).

È chiaro che gli argomenti svolti vogliono solo offrire un esempio di quanto può trattarsi in classe; ma non è difficile trovare altre occasioni nel mondo dell'osservazione e della cultura del ragazzo per introdurlo allo studio di nuove trasformazioni geometriche.

Verrà naturale ad esempio, parlare dei problemi della cartografia, e quindi, *delle diverse proiezioni della sfera. Si potrà portare poi l'attenzione sulle immagini speculari di un oggetto e quindi sulle simmetrie; a proposito di queste ultime trasformazioni, in modo forse meno astratto che per altre, si potrà anche introdurre il concetto di prodotto e, quindi, la nozione fondamentale di un gruppo di operazioni. Parlando poi dell'insieme dei movimenti rigidi del piano, e cioè, delle rotazioni e delle traslazioni, si potrà far notare come tale insieme formi gruppo rispetto alla legge di composizione che definisce il prodotto operatorio; sarà allora quanto mai suggestivo raffrontare insiemi di movimento e insiemi numerici e far osservare, ad esempio, che l'insieme dei numeri naturali non forma un gruppo, mentre ha la struttura di gruppo d'insieme dei numeri reali.*

In tal modo, col porre in evidenza identità strutturali in teorie tanto diverse, il ragazzo comprenderà sempre più profondamente il significato di una moderna ricerca matematica, dove non sono gli enti in quanto tali su cui viene fissata l'attenzione ma le relazioni, le leggi che legano quegli enti.

(Da E. Castelnuovo, *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze, 1964).

INDICE

DELLA DICIASSETTESIMA ANNATA (1965)

(*PER RUBRICHE*)

1.

ARTICOLI DI TESTA

2.

FILOSOFIA – METODOLOGIA DIDATTICA

3.

ORDINAMENTO DEGLI STUDI SECONDARI DI MATEMATICA E FISICA

8.

PARLIAMO DI LIBRI DI TESTO

9.

SEZIONE STORICO-BIBLIOGRAFICA

10.

APPUNTI BIBLIOGRAFICI

11.

RECENSIONI

12.

NOTIZIARIO