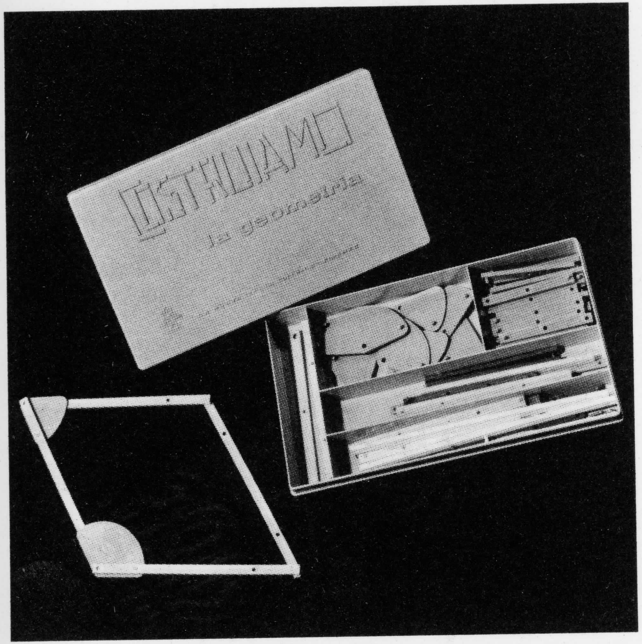
COSTRUIAMO

la geometria

SCATOLA DI MATERIALE UTILIZZABILE PER LA COSTRUZIONE
E LO STUDIO DI POLIGONI ARTICOLABILI

« LA NUOVA ITALIA » EDITRICE - FIRENZE



CONTENUTO DELLA SCATOLA

— 24 strisce di cm. 6 con un foro al centro, un foro ad una estremità ed un perno all'altra (color verde)
— 6 strisce di cm. 9 con tre fori ed un perno (color rosso)
— 2 strisce di cm. 12 con tre fori ed un perno (color giallo)
— 4 strisce di cm. 15 con tre fori ed un perno (color celeste chiaro)
— 2 strisce di cm. 18 con tre fori ed un perno (color bianco)
— Una striscia di cm. 18 con un perno al centro e due fori grandi alle estremità (color bianco)
— 1 striscia di cm. 18 con due fori piccoli e due fori grandi all'estremità (color bianco)
— 1 striscia diagonale di cm. 12 (color giallo)
— 3 strisce diagonali più sottili, rispettivamente di cm. 9, 12 e 15 (color celeste scuro)
— 2 settori angoli di ampiezza 30° (color grigio)
— 2 settori angoli di ampiezza 45° (color grigio)
— 2 settori angoli di ampiezza 60° (color grigio)
— 2 settori angoli di ampiezza 90° (color grigio)
— 1 settore angoli di ampiezza 120° (color grigio)
— 1 settore angoli di ampiezza 150° (color grigio)
— 2 elastici, rispettivamente di cm. 12 e cm. 15 con anelli agli estremi
— 2 elastici, rispettivamente di cm. 24 e cm. 30 con ganci agli estremi.

« Costruiamo la geometria » vuole essere un invito ai ragazzi delle nostre scuole medie a farsi protagonisti della lezione di geometria: si vuole che, attraverso la diretta costruzione e l'osservazione di figure articolabili, essi prendano il gusto, la passione della ricerca matematica e possano provare quell'attimo di gioia profonda che dà la scoperta di una verità.

« Costruire la geometria » sarà un viaggio nel mondo armonico di questa scienza, un viaggio ricco di avventure e di imprevisti, di intuizioni e di ripensamenti, lungo strade che non terminano mai perché mai ha termine una ricerca scientifica.

Questa scatola contiene degli « elementi da costruzione » (strisce, settori-angoli, elastici) opportunamente studiati in modo da permettere al ragazzo varie « esperienze costruttive » che dovrebbero costituire, per lo studio di un gran numero di argomenti di geometria piana, quella base concreta da cui necessariamente trae origine ogni ricerca intuitiva.

In armonia ai principi di una pedagogia attiva e alle indicazioni suggerite da moderne ricerche di didattica psicologica, il materiale è individuale: ogni bambino deve poterne disporre per un'attività propria perché è solo nella ricerca personale che egli si renderà conto di quanto è essenziale per la costruzione e di quanto è invece superfluo, e scoprirà cosí le condizioni necessarie che legano gli elementi di una stessa figura.

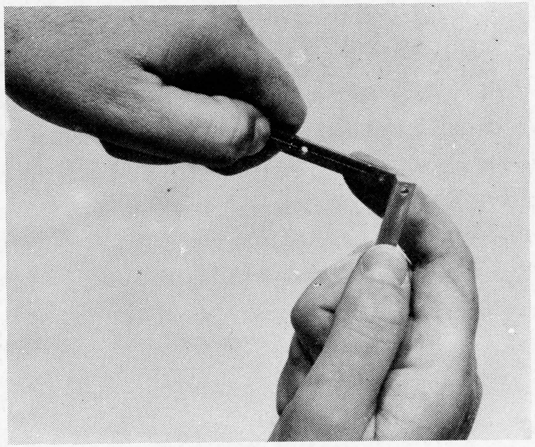
Il materiale offre la possibilità di realizzare figure articolabili al fine di portare l'attenzione del ragazzo non soltanto sull'« oggetto » che ha costruito ma anche sulle trasformazioni che esso può subire. Il « modello dinamico » esprime infatti situazioni geometriche mutevoli: vengono messe in evidenza proprietà che variano in queste trasformazioni e proprietà invarianti, e le figure appaiono come membri di una famiglia, di una classe di figure. Di qui sorge spontanea l'idea di costruire una classificazione e nasce quindi, in modo del tutto naturale, la definizione di questo o quell'ente geometrico. La mobilità dei modelli porta poi ad osservare dei casi particolari: non sfuggiranno certo all'attenzione del ragazzo i cosiddetti casi 'limite', e spesso *queste considerazioni lo condurranno a cogliere, sia pure in modo intuitivo, il significato di una legge generale.*

Nella trasformazione di una figura, le relazioni che legano i vari elementi assumeranno una particolare espressività avviando il ragazzo in modo spontaneo a cogliere il concetto fondamentale di funzione.

Ci si rende conto di quale diverso valore didattico abbia un materiale individuale a tipo costruttivo-articolabile nei confronti del classico materiale statico. Esso non viene infatti offerto all'attenzione dell'allievo come « modello da vetrina », non viene cioè contemplato dall'esterno, ma, richiedendo l'attività del ragazzo, fa nascere una problematica che lo spinge ad osservare e a ricercare.

Durante l'attività costruttiva l'alunno non compie soltanto atti di pensiero concreto, perché, rivolgendo la sua attenzione ora sul modello ora sulle trasformazioni che tale modello subisce e idealizzando l'atto manuale — l'effettiva costruzione materiale —, immaginerà altre situazioni analoghe e sarà condotto in modo spontaneo a staccarsi dal concreto orientandosi verso una attività di pensiero formale.

Come utilizzare il materiale

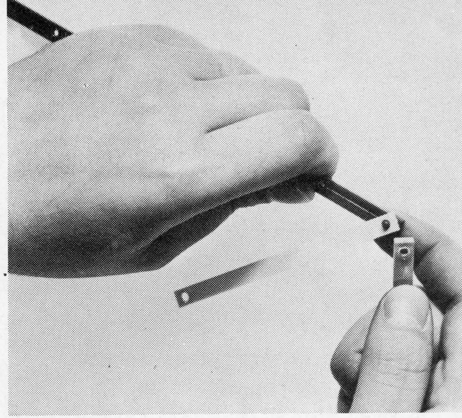


Accoppiamento di due strisce.

NOTA

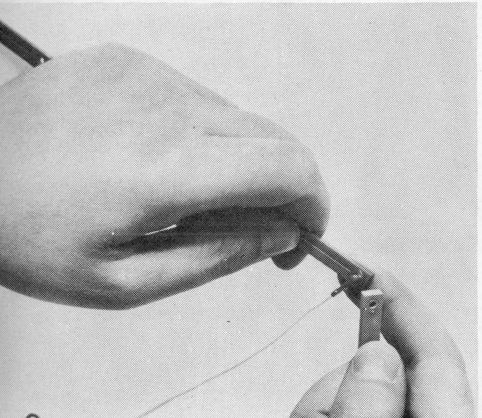
L'eventuale resistenza all'accoppiamento delle strisce non è dovuta a difetti di lavorazione ma a residui di plastica rimasti nei fori. L'accoppiamento diverrà facile dopo poche prove.

Come si inserisce un settore-angolo.

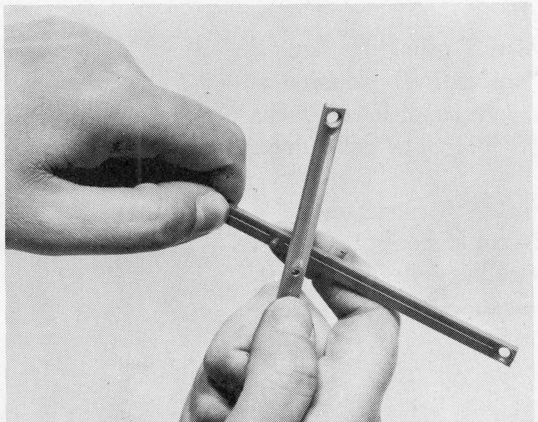


Come si inserisce una striscia diagonale.

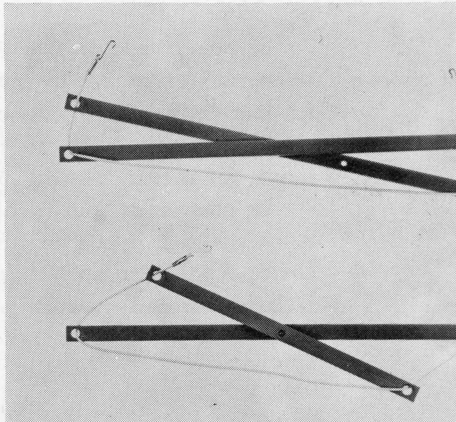
Come si inserisce un elastico con anelli agli estremi.



Accoppiamento delle strisce-diagonali.



Montaggio di un filo elastico con ganci agli estremi.



Sui triangoli

Si proponga al bambino di costruire dei triangoli prendendo a caso tre strisce. Il bambino costruirà subito dei triangoli particolari (fig. 1).

Si accorgerà poi che, scelte a caso tre strisce, non sempre si può costruire un triangolo. Perché la costruzione sia possibile dev'essere un lato minore della somma degli altri due (fig. 2). Nella fig. 2, 1° caso, la condizione è soddisfatta; negli altri due casi la costruzione è impossibile. Il bambino concluderà: nella costruzione di un triangolo, mentre la scelta dei primi due lati può essere fatta a piacere, il terzo lato deve essere invece tale da risultare minore della somma dei primi due.

Si può chiedere: una volta fissati i primi due lati, il terzo può essere scelto piccolo a piacere? Il bambino si renderà conto che s'impone una nuova condizione: quella cioè che il terzo lato deve risultare maggiore della differenza dei primi due (fig. 3).

La costruzione del triangolo con le strisce suggerisce in modo naturale la costruzione grafica col compasso: si vedrà che, tenendo fisso un lato, gli estremi liberi degli altri due, nel movimento che li porta a coincidere, descrivono due circonferenze (fig. 4).

Il bambino si renderà conto che due triangoli sono uguali se hanno i tre lati corrispondenti uguali, anche se ' sembrano ' diversi come nei due casi della fig. 5. Arriverà quindi alla conclusione che con tre strisce, soddisfacenti alle condizioni precedentemente scoperte, si può costruire un solo triangolo, e potrà anche enunciare uno dei tre criteri di uguaglianza dei triangoli: due triangoli aventi i lati ordinatamente uguali sono uguali.

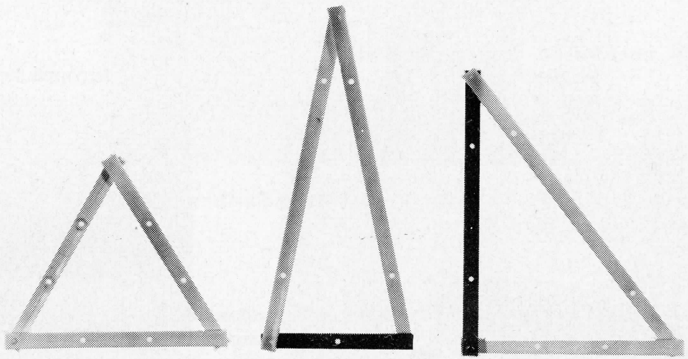


Fig. 1

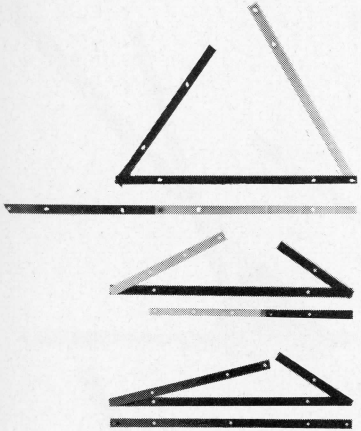


Fig. 2

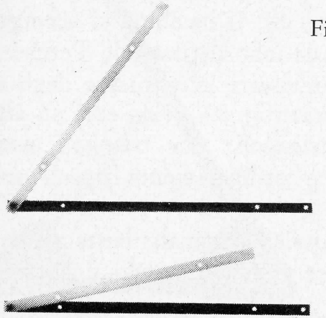


Fig. 3

Fig. 4

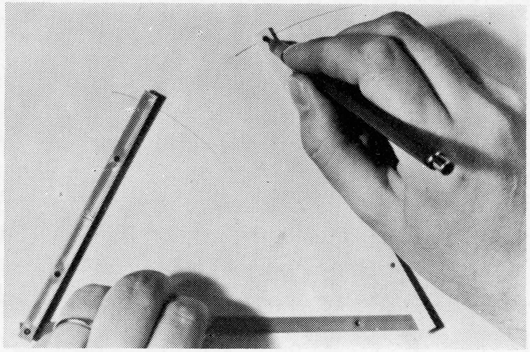
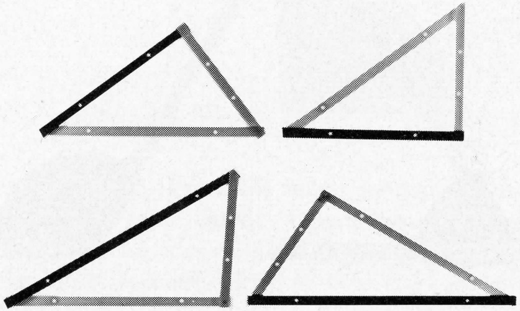


Fig. 5



Osserverà inoltre che un triangolo non si deforma: il triangolo è una figura rigida.

Con la scelta di due strisce il triangolo non resta univocamente determinato. Si possono infatti costruire infiniti triangoli aventi due lati uguali (fig. 6): basta cambiare l'ampiezza dell'angolo compreso. Ma se si fissa anche l'angolo compreso, il triangolo è determinato (fig. 7).

Si enuncerà un altro criterio di uguaglianza dei triangoli: due triangoli che abbiano ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso sono uguali.

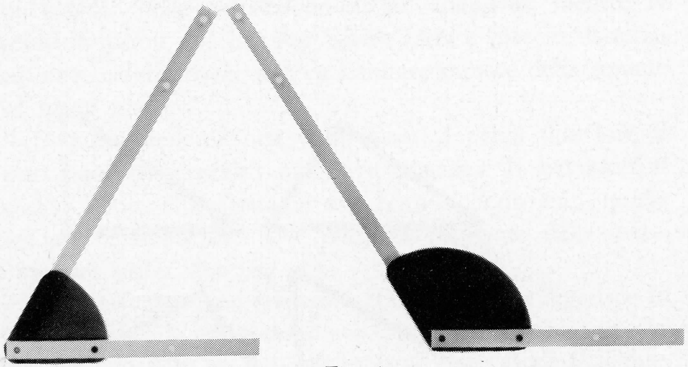


Fig. 6

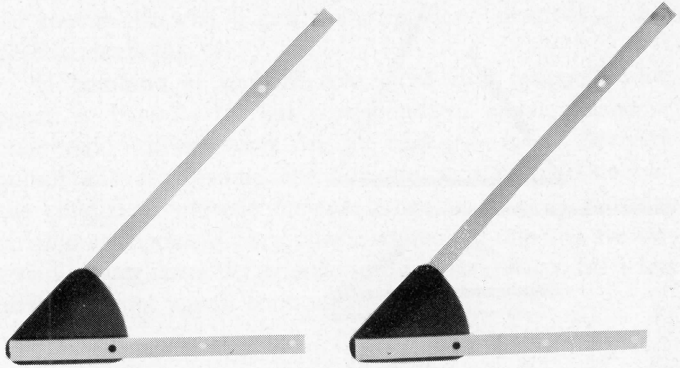


Fig. 7

Scelta una striscia, facendo ruotare attorno agli estremi di questa altre due strisce (fig. 8), il bambino si accorgerà che vengono via via individuati infiniti triangoli. Perché ne resti determinato uno, occorre fissare le ampiezze degli angoli adiacenti alla prima striscia (fig. 9). Si ha cosí un altro criterio di uguaglianza dei triangoli: due triangoli aventi due angoli e il lato comune ordinatamente uguali sono uguali.

Costruiti due triangoli equilateri uguali, basta far ruotare l'uno sull'altro per vedere che ogni angolo si porta sul

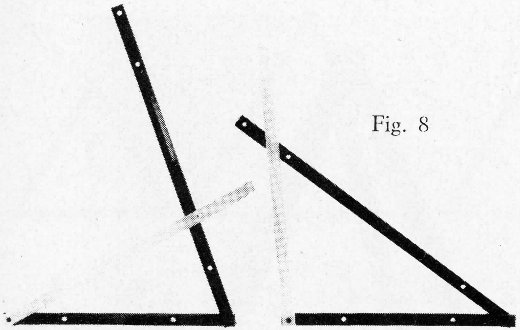


Fig. 8

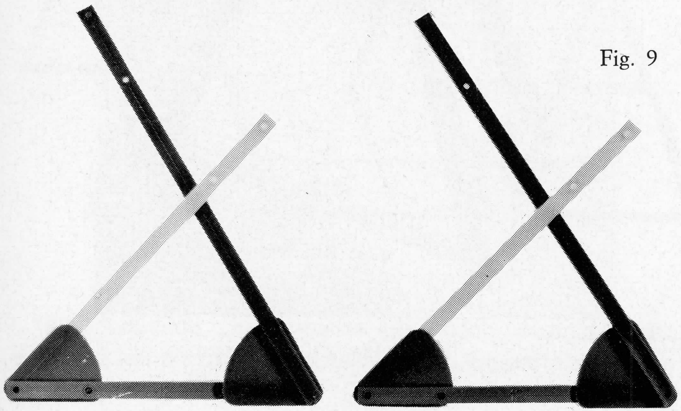


Fig. 9

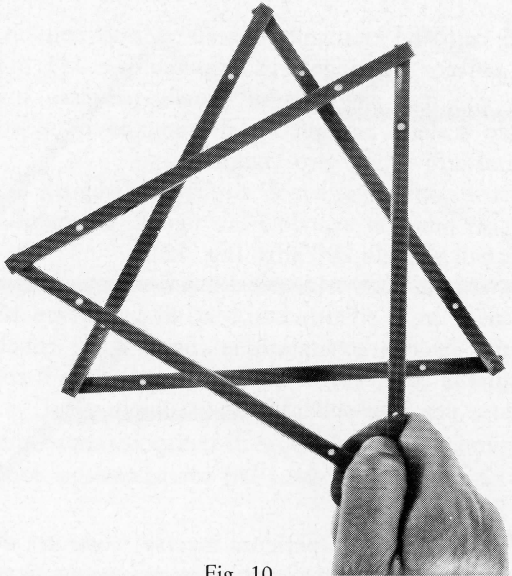


Fig. 10

successivo (fig. 10); da ciò deriva che in un triangolo equilatero tutti gli angoli sono uguali. Questa osservazione acquista risalto se, anziché riferirsi a triangoli equilateri, si considerano triangoli isosceli o scaleni.

Nel caso del triangolo isoscele si può con un ribaltamento portare il triangolo in se stesso (fig. 11), e da ciò si deduce che due angoli sono uguali; nel caso invece del triangolo scaleno per portare il triangolo in se stesso occorre ruotarlo di un giro completo.

Costruendo due triangoli equilateri disuguali ci si rende conto che, pur non avendo i lati uguali, gli angoli dell'uno sono uguali a quelli dell'altro (fig. 12).

Costruendo due triangoli isosceli, l'uno di lati lunghi cm 9, cm 9, cm 6 e l'altro con i lati di cm 18, cm 18, cm 12 si fa una analoga constatazione (fig. 13). Si conclude che l'uguaglianza degli angoli di due triangoli non è condizione sufficiente per l'uguaglianza dei triangoli stessi.

Osservando poi le coppie di triangoli rappresentati nelle figure 12 e 13 si vede che i lati corrispondenti sono in uno stesso rapporto.

Si può proporre l'esperienza inversa: costruire due triangoli tali che i lati corrispondenti siano in uno stesso rapporto, per verificare poi che questi triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali. La fig. 14 mostra un altro modo di utilizzare le strisce al fine di costruire due triangoli aventi i lati corrispondenti nel rapporto $\frac{1}{3}$. Si verificherà appunto che in tali triangoli gli angoli sono ordinatamente uguali.

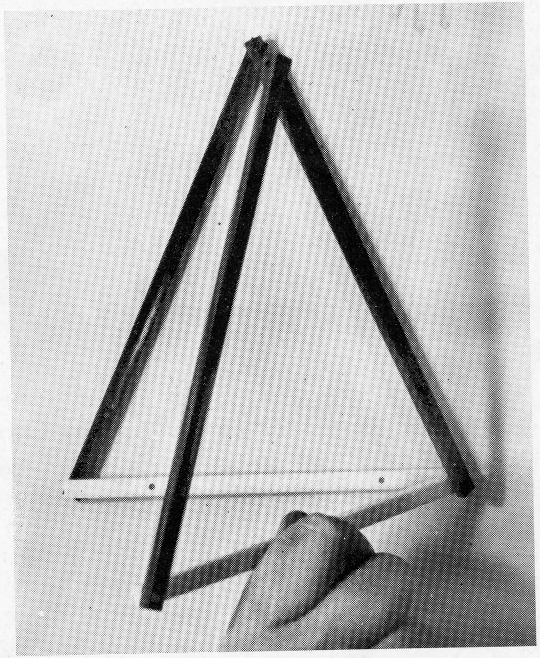


Fig. 11

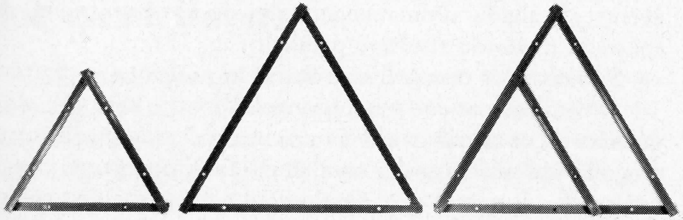


Fig. 12

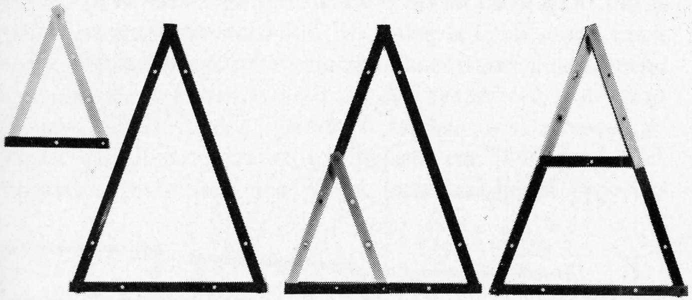


Fig. 13

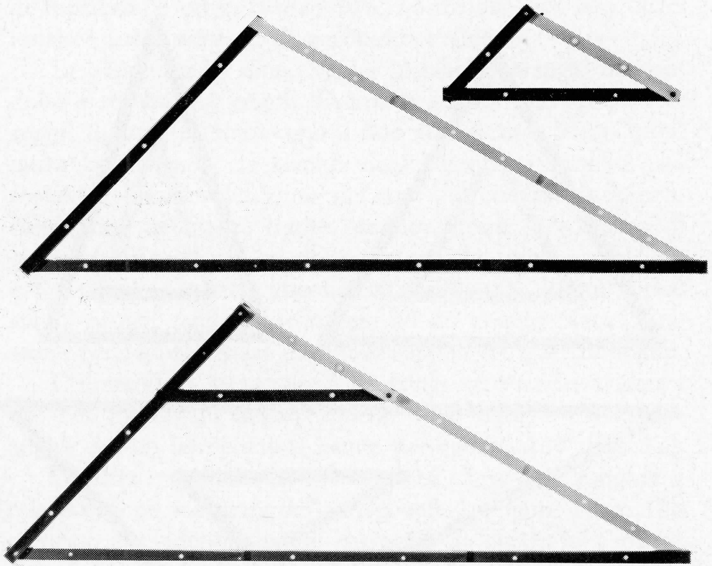


Fig. 14

Due triangoli che abbiano gli angoli ordinatamente uguali e i lati corrispondenti nello stesso rapporto si dicono *simili*.

Disponendo i triangoli come nelle figg. 12, 13, 14 si vede che i lati non sovrapposti risultano paralleli. Si può far vedere anche che i lati corrispondenti di due triangoli aventi gli angoli ordinatamente uguali possono essere disposti in modo da risultare paralleli (fig. 15).

Si dice che i triangoli si trovano in *posizione omotetica.*

Il bambino ha costruito triangoli di vario tipo e li avrà qualificati con attributi diversi: acutangoli, rettangoli, ottusangoli, scaleni, isosceli, equilateri. Sarà opportuno fargli notare che di queste qualificazioni ad ogni triangolo occorre attribuirne due: una relativa agli angoli e l'altra relativa ai lati. Si può allora proporre di fare una classificazione che tenga conto degli angoli e dei lati contemporaneamente. Lo schema seguente illustra appunto tale classificazione.

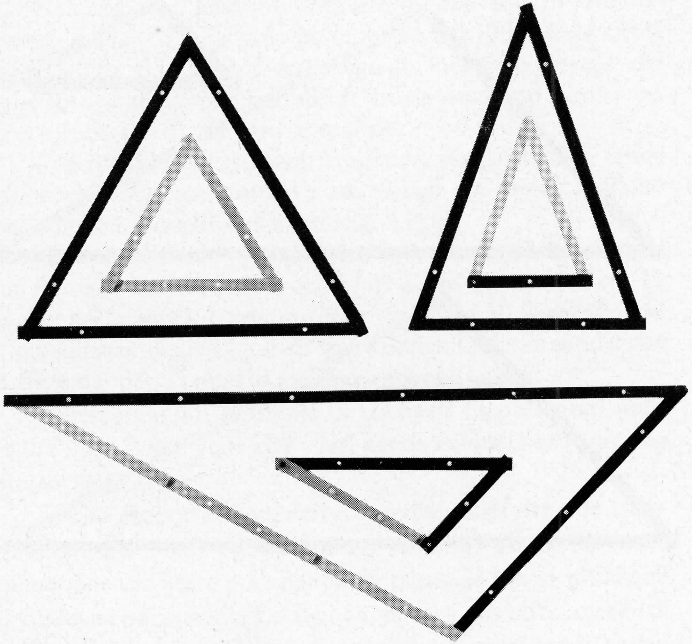


Fig. 15

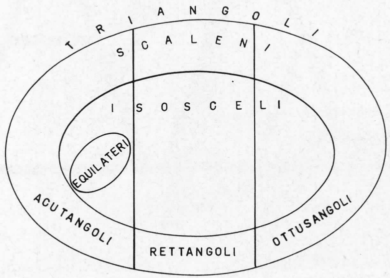


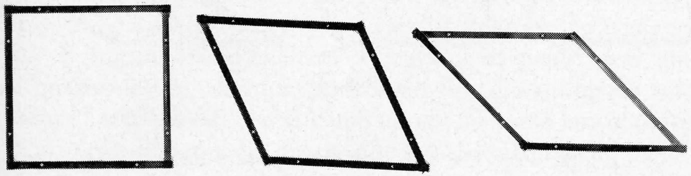
Diagramma di Venn [1]

[1] I diagrammi di Venn vengono oggi usati molto frequentemente anche in matematica elementare come 'appoggio visivo' di situazioni reciproche e di classificazioni.

Sui quadrilateri

Utilizzando quattro strisce uguali si può costruire il quadrato (fig. 16a). Il bambino osserverà subito che il quadrato non è una figura rigida come il triangolo: esso si articola e dà luogo a *una famiglia di rombi* (fig. 16b e fig. 16c). *Il quadrato è un rombo particolare.*

Si pone il problema: nella trasformazione da quadrato a rombo, quali elementi cambiano e quali rimangono fissi? quali relazioni sono invarianti? Le figure 16a, 16b, 16c fanno intuire che, mentre il perimetro rimane costante, l'area varia, raggiungendo il massimo nel caso del quadrato e il minimo nel caso ' limite ', cioè quando il modello « si schiaccia ». Questa variazione dell'area, a contrasto con l'invarianza del perimetro, costituisce una prima introduzione al concetto



a b c

Fig. 16

di funzione, e offre, d'altro lato, l'occasione per ben differenziare i due concetti di perimetro e area.

Le stesse figure fanno capire che nel passaggio da quadrato a rombo due angoli diventano acuti e due ottusi, due angoli dunque diminuiscono e due aumentano. Sorge spontanea la domanda: la somma degli angoli del rombo sarà costante? La considerazione del caso del quadrato e la considerazione del caso ' limite ' fanno intuire la costanza di questa funzione; nel quadrato, infatti, la somma degli angoli è uguale a quattro angoli retti, e nel caso ' limite ' i due angoli ottusi, tendendo ciascuno ad un angolo piatto, finiscono per rappresentare da soli la somma dei quattro angoli.

Utilizzando i settori-angoli è facile mettere in evidenza che nel rombo gli angoli opposti sono uguali, e che due angoli con un lato comune hanno per somma 180^0 (fig. 17).

Un'altra questione cui si è condotti riguarda la lunghezza e la posizione reciproca delle diagonali. Le figure 18a e 18b mettono in evidenza che nel passaggio da quadrato a rombo una diagonale diminuisce e l'altra aumenta. La loro somma rimarrà invariata?

Con un ragionamento ' al limite ' si intuisce che la somma delle lunghezze delle diagonali varia e raggiunge il massimo nel caso del quadrato: infatti, il quadrato ha ogni diagonale maggiore di un lato, e quindi la somma delle diagonali del quadrato è maggiore della somma di due lati, mentre nel caso ‘ limite ’, tendendo una diagonale a zero, l’altra finisce per rappresentare da sola la somma delle diagonali e tende a diventare uguale alla somma di due lati.

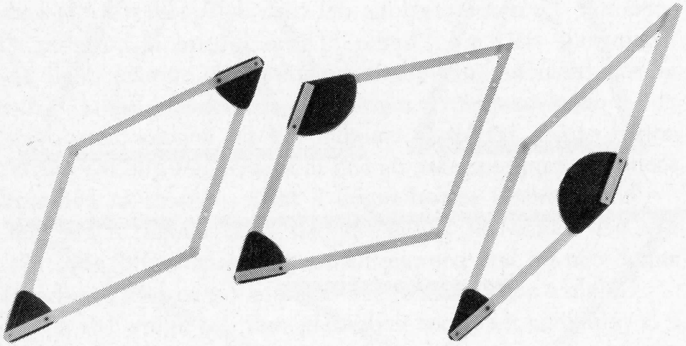
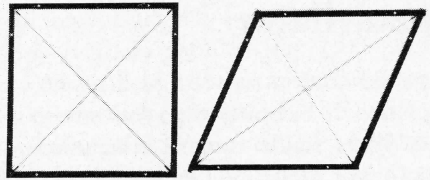


Fig. 17

Risulta chiaro dalle stesse figure 18a e 18b che la posizione reciproca delle diagonali rimane invariata: esse sono sempre perpendicolari fra loro.

Si può facilmente mettere in evidenza che un’altra posi-



a b

Fig. 18

zione rimane invariata: quella dei lati opposti; essi risultano paralleli.

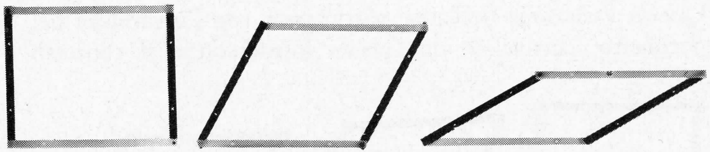


Fig. 19

Le figg. 19, 20 e 21 illustrano considerazioni analoghe a quelle svolte per lo studio della famiglia dei rombi. La fig. 19 mostra un rettangolo che si trasforma con continuità in un

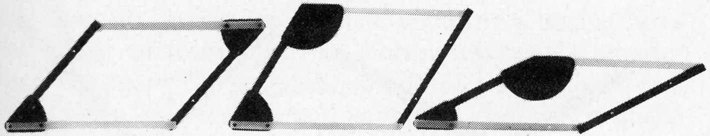


Fig. 20

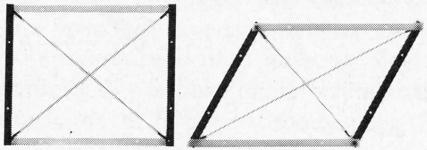


Fig. 21

parallelogramma generico: *il rettangolo fa parte della famiglia dei parallelogrammi, è un parallelogramma particolare.*

È proprio con la effettiva costruzione di quadrilateri con i quattro lati uguali e di quadrilateri in cui sono uguali soltanto i lati opposti che il bambino noterà che i lati opposti sono sempre paralleli; da ciò gli apparirà naturale la denominazione di parallelogrammi che si attribuisce a tutti questi quadrilateri.

Egli si accorgerà poi che gli stessi quattro lati che gli sono serviti per costruire il rettangolo, disposti in modo diverso, danno luogo ad un altro quadrilatero che non è un parallelogramma (fig. 22): in esso le diagonali sono perpendicolari. Tale quadrilatero si chiama *deltoide.*

Continuando ad articolare il modello rappresentato nella

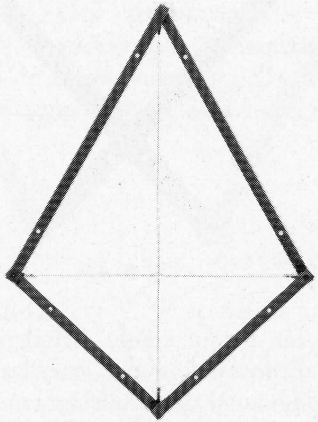


Fig. 22

fig. 19 si riesce a trasformare il parallelogramma in un poligono intrecciato; l'*antiparallelogramma* (fig. 23).

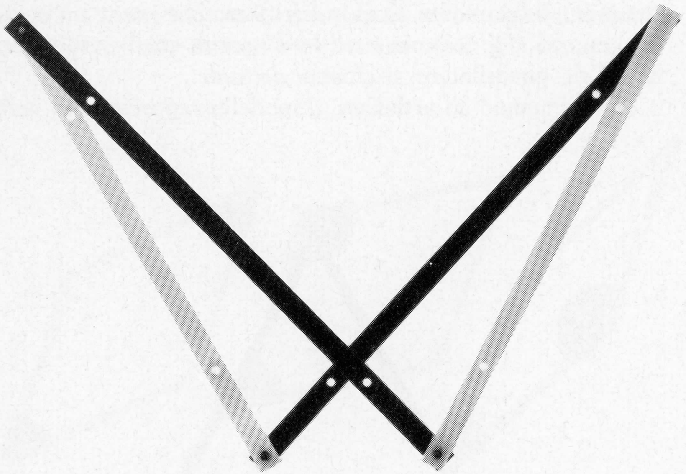
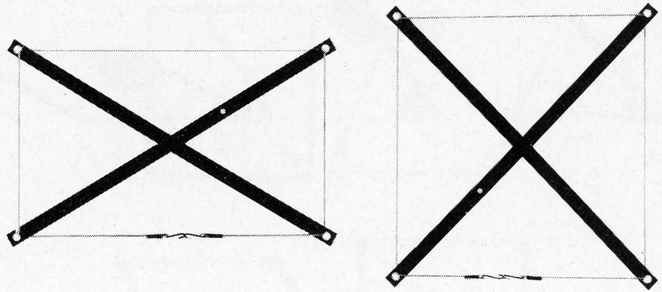


Fig. 23

Sarà utile far notare come, escludendo l'antiparallelogramma, con trasformazioni per articolazione si ottengano sempre parallelogrammi da parallelogrammi; questa osservazione acquista risalto contrapponendola al caso in cui la trasformazione venga eseguita per proiezioni: per es., l'ombra di un parallelogramma non è sempre un parallelogramma.



a b

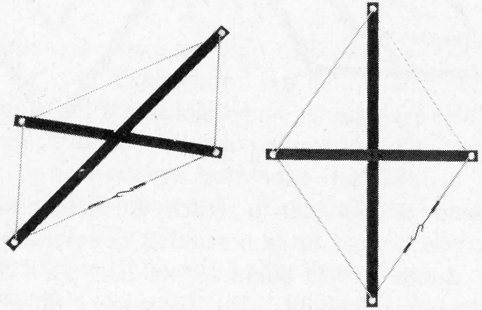
Fig. 24

Il bambino ha visto che nel quadrato le diagonali sono uguali; anche nel rettangolo le diagonali sono uguali. Dunque, deve essere possibile passare con continuità dall'una all'altra configurazione.

Le figure 24a e 24b mettono in evidenza come si possa realizzare, utilizzando un filo elastico a mo' di perimetro, una famiglia di rettangoli aventi tutti le stesse diagonali; di questa famiglia fa parte il quadrato. *Il quadrato è dunque un rettangolo particolare.*

Sorgono i problemi: cambia il perimetro e cambia l'area in questa trasformazione? Lo sforzo stesso che si esercita per ' divaricare ' le diagonali, quando da rettangolo si passa a quadrato, fa capire come il perimetro massimo sia quello del quadrato. In seguito, questa constatazione meccanica potrà essere verificata analiticamente.

Le diagonali del rombo non sono uguali fra loro; anche le diagonali del parallelogramma non sono uguali fra loro. Utilizzando due strisce di diversa lunghezza ed operando in modo analogo a quanto si è fatto nella fig. 24a si può realizzare una famiglia di parallelogrammi aventi tutti le stesse diagonali, famiglia di cui fa parte il rombo (figg. 25a e 25b).



a b

Fig. 25

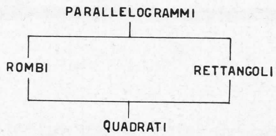
Il rombo è dunque un parallelogramma particolare. Sorgono problemi analoghi a quelli del caso precedente.

Le proprietà scoperte per il quadrato, il rombo, il rettangolo, il parallelogramma consentono una classificazione di tali quadrilateri.

Rispetto alle proprietà comuni, essi possono considerarsi come appartenenti a un unico ' insieme ', l'insieme dei parallelogrammi.

Nell'ambito di questo insieme si differenziano, per proprietà piú particolari, vari ' sotto-insiemi '.

Attraverso tali considerazioni il bambino è portato a familiarizzare con le prime nozioni della teoria degli insiemi sino a padroneggiare rappresentazioni grafiche del tipo qui sotto indicato



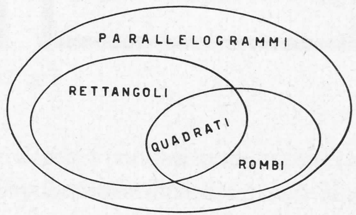
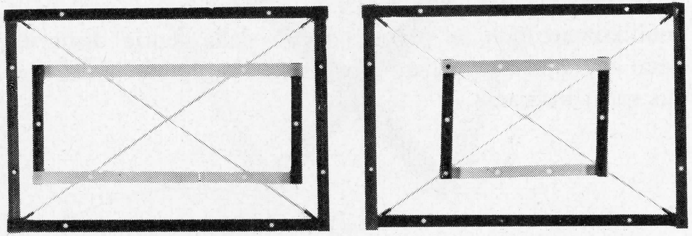


Diagramma di Venn

Si costruisca un rettangolo di dimensioni cm 12 e cm 18 e si realizzino le diagonali con fili elastici. Si costruisca poi un altro rettangolo, ad esempio, con dimensioni minori. Ci si chiede: si può disporre il secondo sul primo in modo che i vertici del secondo si trovino sulle diagonali del primo? Si osserverà che se le dimensioni del secondo rettangolo sono per esempio cm 6 e cm 15 ciò non si verifica (fig. 26a); questa proprietà si verifica invece se le dimensioni del secondo rettangolo sono di cm 6 e cm 9 (fig. 26b). In questo ultimo caso si noterà che le coppie di lati corrispondenti dei due rettangoli sono nel rapporto $\frac{2}{3}$; i rettangoli sono *simili.*



a Fig. 26 b

Ripensando alle considerazioni analoghe che sono state fatte relativamente ai triangoli (fig. 15), saremo portati a concludere che se due poligoni sono simili è sempre possibile disporli in modo che le congiungenti dei vertici corrispondenti concorrano in uno stesso punto (fig. 27); si dirà che le figure sono in *posizione omotetica.*

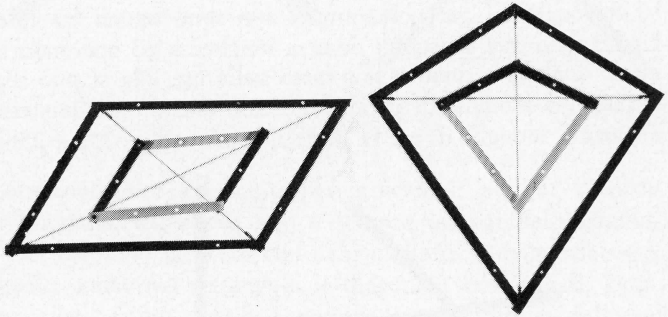


Fig. 27

Prendendo a caso quattro strisce, il bambino si renderà conto che non sempre ha la possibilità di costruire un quadrilatero; perché ciò sia possibile, un lato deve essere minore della somma degli altri due. È quanto è illustrato nella fig. 28.

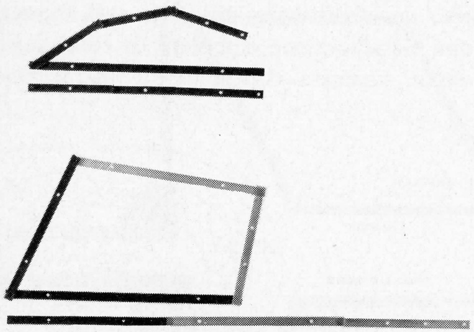


Fig. 28

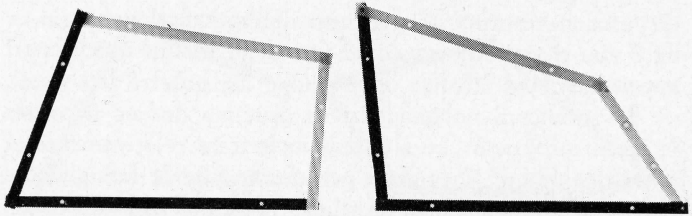


Fig. 29

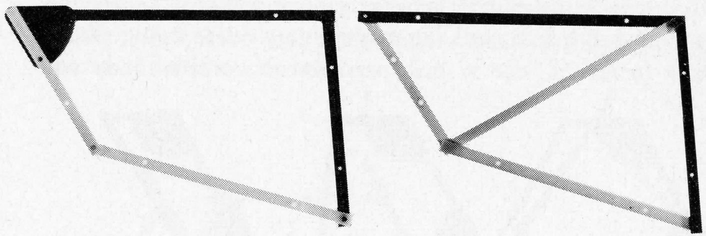


Fig. 30

Abbiamo già visto, nel caso della famiglia dei parallelogrammi, che, pur disponendo i lati nello stesso ordine, cambia la forma del parallelogramma al cambiare dell'ampiezza degli angoli. Evidentemente un'osservazione analoga può farsi per un quadrilatero qualunque (fig. 29).

Ma, se si fissa un angolo, il quadrilatero rimane determinato (fig. 30, 1° caso).

E il quadrilatero rimane anche determinato se si fissa la distanza fra due vertici opposti, utilizzando una striscia-diagonale (fig. 30, 2° caso).

Le stesse strisce che sono servite per realizzare un certo quadrilatero possono venir disposte in ordine diverso. Nella classe degli infiniti quadrilateri, tutti diversi, che ciascuna disposizione esprime (per effetto dell'articolazione), non ce ne è uno che risulti uguale ad uno degli infiniti quadrilateri appartenenti ad un'altra disposizione dei quattro lati stessi.

Lo studio di un quadrilatero generico non fa ritrovare le stesse proprietà che si erano incontrate relativamente ai parallelogrammi. È proprio per questo che la famiglia dei parallelogrammi acquista un rilievo maggiore nell'ambito dei quadrilateri.

Con una metodologia analoga si potrà completare lo studio dei quadrilateri generici fermandosi sui *trapezi*. A proposito di questi, sarà interessante far vedere, come risulta dalla figura 31, che si può passare con continuità da tra-

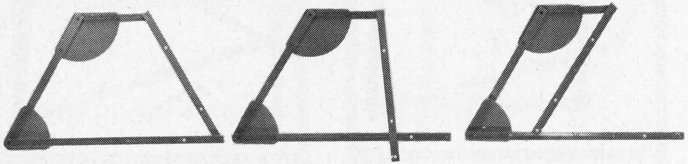
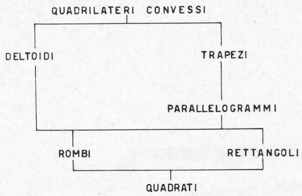


Fig. 31

pezio a parallelogramma. *La famiglia dei trapezi può quindi considerarsi come 'comprensiva' di quella dei parallelogrammi.*

Lo studio dei quadrilateri convessi cosí sviluppato condurrà ad una classificazione completa di essi, classificazione che può essere espressa con le seguenti rappresentazioni grafiche.



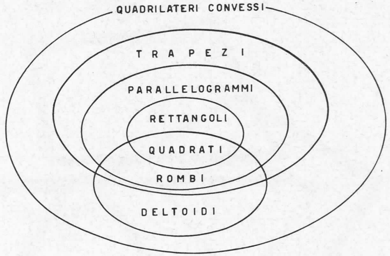


Diagramma di Venn

Abbiamo già visto come l'osservazione di un parallelogramma articolabile porti alla considerazione degli angoli; si è trovato che la somma degli angoli di un parallelogramma risulta sempre di 360°.

Nei modelli rappresentati nelle figure 32 e 33 si è disposto un filo elastico a mo' di diagonale; ogni parallelogramma risulta cosí diviso in due triangoli di cui è facile verificare l'uguaglianza. Il bambino stesso concluderà che la somma degli angoli di un triangolo è di 180°.

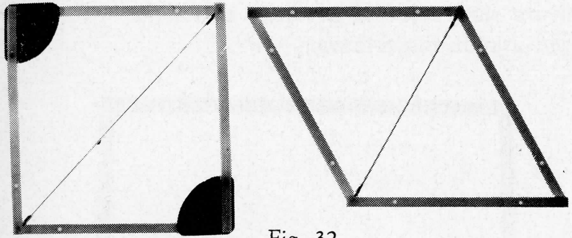


Fig. 32

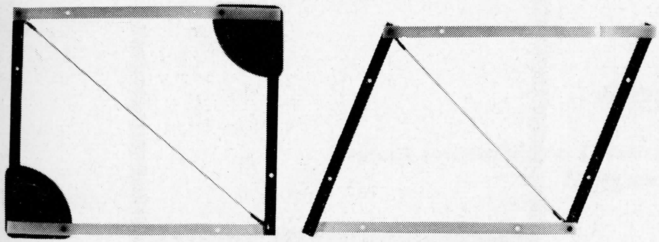


Fig. 33

Dopo aver scoperto che la somma degli angoli di un triangolo è di 180^{0} si arriverà per deduzione a concludere che è possibile determinare anche la somma degli angoli di un qualsiasi poligono convesso perché esso può scomporsi in triangoli (fig. 34).

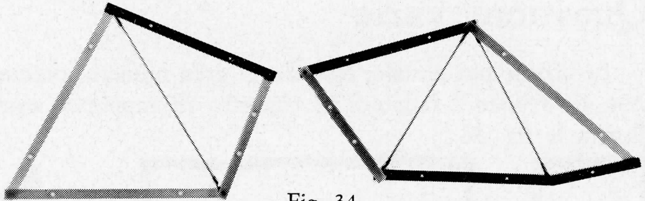


Fig. 34

Accoppiando inoltre le strisce come nella fig. 35 si può portare l'attenzione sugli angoli esterni di un poligono, facendo notare che la somma di tali angoli è invariante rispetto al numero dei lati.

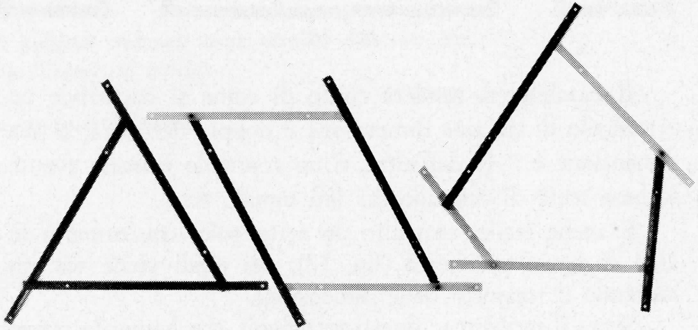


Fig. 35

Questioni varie

Le strisce piú piccole, essendo in gran numero, permettono di avviare i bambini al concetto di rapporto, come illustra la fig. 36.

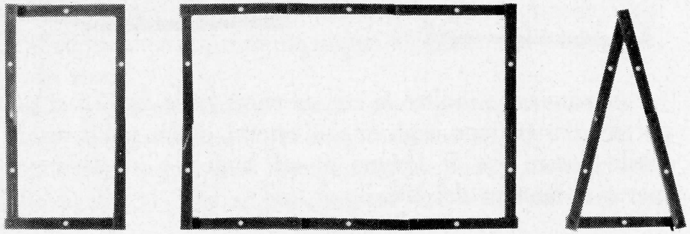


Fig. 36

Il bambino si renderà conto di come si costruisce un rettangolo di cui una dimensione è doppia dell'altra, o una dimensione è i $\frac{2}{3}$ dell'altra, o un triangolo isoscele avente la base metà di ciascuno dei lati uguali, ecc.

È anche facile, costruito un rettangolo, trasformarlo in altri di ugual perimetro (fig. 37), nei quali viene via via mutando il rapporto delle dimensioni.

Sorge il problema: questi rettangoli, che hanno lo stesso perimetro, avranno anche la stessa area?

Ancora una volta si presenta spontaneo un problema della piú grande importanza.

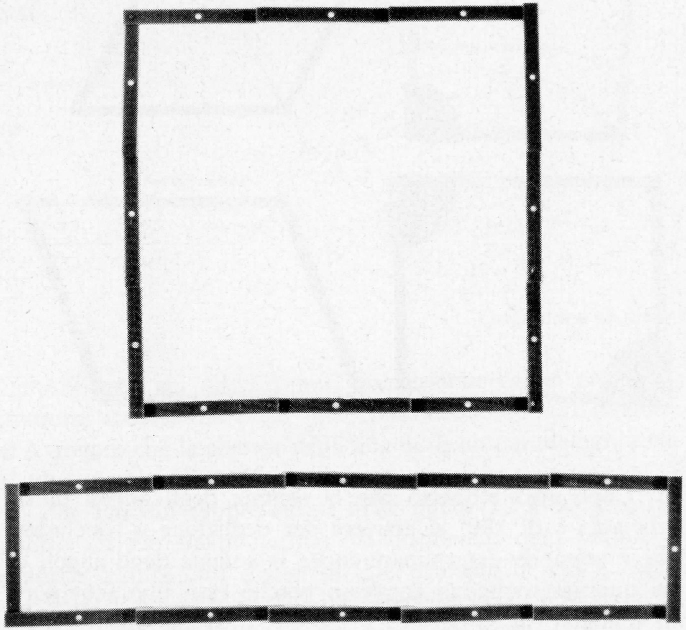


Fig. 37

Elementi componibili per la costruzione di poligoni articolati come sussidio didattico per l'insegnamento della Geometria intuitiva

Materiale brevettato N. 70/409