CENTRO DIDATTICO NAZIONALE PER L'ISTRUZIONE TECNICA E PROFESSIONALE

con la collaborazione del

CENTRO DIDATTICO NAZIONALE PER LA SCUOLA SECONDARIA

ORIENTAMENTI
SULLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA
NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO CICLO

I° CONVEGNO DI STUDI

(Firenze, 10-15 febbraio 1958)

"I SUSSIDI DIDATTICI"

Roma - Via Guidubaldo del Monte, 24

1958

I RELATORI :

Prof. ADRIANO BARLOTTI - Docente nell' Università di Firenze.

» LUIGI CAMPEDELLI - Ordinario di « Geometria » nell' Università di Firenze e Vice-Presidente nel « Centro Didattico Nazionale di studi e documentazioni » con sede in Firenze.

» EMMA CASTELNUOVO - Titolare di Matematica nella Scuola media « T. Tasso » di Roma.

» SALVO D'AGOSTINO - Titolare di Matematica e Fisica nell' Istituto Magistrale « G. Caetani » di Roma.

» ANGELO PESCARINI - Titolare di Matematica e Fisica nel Liceo classico « Dante Alighieri » di Ravenna.

» GIOVANNI SANSONE - Ordinario di « Analisi » nell' Università di Firenze.

» BRUNO TEDESCHI - Docente nell' Università di Roma e Ispettore centrale del Ministero della P. I.

PREMESSA

Il Convegno di studio di cui si pubblicano gli Atti nel presente volume è frutto di una opportuna collaborazione del Centro didattico nazionale della Scuola secondaria con quello dell'Istruzione tecnica e professionale; volto, il primo, a proseguire ed estendere l'azione da tempo iniziata per un'approfondita indagine sui problemi didattici relativi alle materie che sono fondamentali nelle scuole secondarie di primo ciclo; e particolarmente interessato, l'altro, alla didattica della Matematica (materia-chiave per tutti gli insegnamenti di carattere tecnico e professionale) e portato per la sua naturale vocazione a ricercare nei sussidi strumentali una strada che, fornendo ai giovani alunni concreti mezzi di osservazione e di ricerca, faciliti la loro educazione al pensiero matematico.

Questo primo Convegno, al quale si pensa e si spera che altri possano far seguito, è stato appunto dedicato, essenzialmente, al problema del « riferimento al concreto », quale mezzo di comprensione; e si è avuto cura di presentare, e di mettere a disposizione dei partecipanti, un notevole complesso di strumenti, modelli, film, ed altro materiale dimostrativo non sempre da tutti conosciuto e talora non facilmente reperibile.

Le relazioni presentate al Convegno, e i larghi riferimenti sulle esperienze effettuate e sui risultati rag-

RELAZIONE II

PARTE I

Metodo sintetico e metodo analitico

Cenni sui metodi Montessori e Decroly

Le parole sintesi e analisi, e quindi metodo sintetico e metodo analitico, hanno, dall'epoca greca, subito un'evoluzione; ma noi vogliamo riferirci al significato etimologico delle parole e dare perciò a questi termini un senso più largo e quindi più comprensivo.

Sintetizzare significa mettere insieme, comporre, costruire: passare dunque dall'elemento al globale.

Analizzare significa sciogliere, decomporre, particolarizzare: passare dunque dal globale all'elemento.

Ai primissimi del secolo due correnti pedagogiche opposte hanno caratterizzato l'insegnamento della matematica nelle scuole primarie: quella della Montessori e quella del belga Ovide Decroly. Si tratta dei primi metodi che introducono in modo *sistematico* l'insegnamento attivo.

Fin quasi a tutto il secolo scorso, infatti, l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari era di tipo *verbale* o di tipo *percettivo*: la matematica veniva insegnata o come una serie di verità, di regole indiscutibili, e questo era l'insegnamento verbale; oppure si faceva ricorso a immagini grafiche o anche materiali, ma la funzione della base visiva o tattile, era esclusivamente quella di suscitare nel bambino un'*impressione, una presa di coscienza sì, ma statica*. Si presentava per esempio il numero 3 sotto questa forma **:·** e il numero 5 sotto la forma **::·**, aggiungendo

eventualmente allo schema grafico dei gruppi di gettoni disposti nello stesso modo; ma non vi era passaggio fra numero e numero, non si insisteva sulle operazioni, all'inizio manuali, che si dovevano fare per passare da un numero all'altro. Si trattava dunque di una didattica basata su tante percezioni di immagini nella loro staticità, di fatti, di cose, non su percezioni di trasformazioni, di operazioni.

Questo è l'insegnamento — ripeto — che ha trionfato fino a poco più di mezzo secolo fa nella scuola elementare, pur avendosi fin dai tempi più lontani degli esempi, ma isolati, di insegnamenti attivi: basterebbe ricordare il dialogo « Menone », o, per venire ad epoche relativamente recenti, le opere di Comenius [3] e di Pestalozzi [4].

Con i metodi Montessori e Decroly [5] entriamo in modo sistematico nell'insegnamento attivo. Ne accennerò molto brevemente.

---

(3) J. A. Comenio: *Didactica Magna e Pansophia;* ad esempio nell'edizione « La Nuova Italia », Firenze. Si potrà trovare, sempre in questo volume, una ricca bibliografia su Comenius. Consulta anche il bel volume edito a cura dell'UNESCO: Jean Amos Comenius - *Pages choisies;* introduction de Jean Piaget. UNESCO, Paris, 1957; e l'articolo « Comenio nel tempo suo e nel nostro » di G. Calò (Discorso inaugurale dell'anno 1957-58 all'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma).

(4) E. Pestalozzi: *Come Geltrude istruisce i suoi figli;* ad esempio nell'edizione « La Nuova Italia », Firenze. Sempre in questa edizione si potranno trovare, commentate, le altre opere di Pestalozzi.

(5) Nei volumi *Maria Montessori e la pedagogia scientifica,* e *Ovide Decroly,* a cura di F. De Bartolomeis (Casa editrice « La Nuova Italia », Firenze) si troverà anche una ricca bibliografia su questi due pedagogisti.

Il materiale Montessori, assai complicato e vario, ha però uno scopo fondamentale: quello cioè di permettere non solo una presa di coscienza dei concetti matematici attraverso ai sensi, ma anche — e qui è l'elemento nuovo — una presa di coscienza di operazioni a partire dal termine più semplice. Per renderci conto del processo mentale consideriamo anche in questo caso l'acquisizione del concetto di numero. Si danno al bambino delle aste di lunghezza differente, da 10 cm a 1 metro; queste, materializzano i primi dieci numeri. Ogni asta è divisa in colori alterni, rosso e blu, di lunghezza costante (10 cm) corrispondente all'asta più piccola. Ogni asta rappresenta quindi un numero; il numero è la misura dell'asta. Il numero 5, per esempio, è l'asta lunga 5 aste di dieci cm.

Si passa dunque dall'elemento al complesso: si costruisce, si fa la sintesi. Manipolando queste aste il bambino constata, per esempio, che: $9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = ...$, cioè egli *opera* attraverso il senso della vista e del tatto. Qui non c'è solo percezione passiva di una immagine, ma c'è costruzione; questo metodo è dunque attivo, è *attivo-sintetico*: dall'elemento si passa all'insieme degli elementi, al globale.

Nello stesso periodo in cui la Montessori ideava il suo materiale e apriva la strada per una didattica attiva della matematica nella scuola elementare, Ovide Decroly tracciava una via che, se per il raggiungimento degli scopi fondamentali — la lotta ad oltranza contro il formalismo — aveva delle analogie con il movimento montessoriano, se ne distaccava però notevolmente per gli ideali e i mezzi d'attuazione.

Il metodo Decroly è semplice perché è naturale: partendo dal presupposto che la mente del bambino è at-

tratta non dal dettaglio, dall'elemento, ma dal globale, da una veduta d'insieme, Decroly non dà in mano un materiale ma suggerisce degli spunti che il bimbo può trovare non solo a scuola ma anche e soprattutto nella vita di ogni giorno. L'interesse dovrà sorgere perciò da una questione naturale: la scuola servirà a far osservare e quindi analizzare quanto il bimbo incontra nella vita di sempre.

Si farà osservare, per esempio, che le piante crescono e si suggerirà ai bambini di mettere a germogliare dei fagioli. Il loro interesse non è solo nel veder apparire il gambo e la radice, ma quello che attira la loro attenzione è che l'acqua diminuisce ogni giorno. La pianta beve; quanto beve? Riempiamo d'acqua il contagocce e contiamo. Il primo fagiolo ha bevuto 1, 2..., 5 gocce d'acqua... E, di quanto è cresciuta la pianta?

E' l'analisi che fa un naturalista che Decroly suggerisce al fanciullo. « Osservare è più che percepire »... « Osservare significa fare dei confronti, notare delle differenze o delle somiglianze globali o particolari; osservare significa gettare un ponte fra il mondo e il pensiero ». Ecco come Decroly stesso precisa il suo pensiero pedagogico e come insiste sul passaggio fra il concreto e l'astratto attraverso l'analisi [6]. Dal complesso si passa al semplice; il metodo di Decroly è *analitico* [7].

---

[6] Vedi O. DECROLY et A. HAMAÏDE: *Le calcul et la mesure au premier degré de l'ecole Decroly*, Editions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1932.

[7] Per uno studio dettagliato sui problemi accennati in questa relazione, vedi l'interessante volumetto *Didactique de l'initiation mathématique à l'école primaire*, a cura di B. H. FISCHER. Bureau Intenational d'Education, Genève, 1955.

PARTE II

Questioni da risolvere con metodo sintetico o con metodo analitico

Vogliamo fermarci ora su due questioni di geometria in cui si ritrovano, nell'una, lo spirito del metodo Montessori, e, nell'altra, le idee-guida del metodo Decroly.

A) *Un problema: costruire un rettangolo avente la base tripla dell'altezza.*

Ecco come i ragazzi eseguono la costruzione col disegno: alcuni, valendosi del doppio decimetro, fissano una certa lunghezza per l'altezza, la triplicano, e disegnano così la base; altri si valgono del foglio a quadretti per disegnare, per esempio, l'altezza di un quadretto e quindi, poi, la base di tre; altri ancora disegnano un rettangolo senza prendere le misure, ma mettono in evidenza che la base è tripla dell'altezza dividendo la base in tre parti che dovrebbero essere ciascuna uguali all'altezza, ma che spesso non lo sono. Dopo che i bambini hanno effettuato il disegno, si dice: « Se fosse data la lunghezza del perimetro di quel rettangolo, sarebbe possibile determinare la lunghezza della base e dell'altezza? Si osserva allora che i bambini danno le risposte più impensate; dicono « Si divide il perimetro per 2, per 4, per 3! ».

Si rimane perplessi e si osserva che i bambini non guardano affatto il rettangolo che hanno disegnato sul quaderno, e , anche incoraggiati ad esaminare il disegno che hanno fatto essi stessi, non lo « vedono ». Evidentemente è una costruzione fatta senza avervi ragio-

nato. Riflettiamo: osservare quel rettangolo significa scomporre il suo contorno negli elementi che lo formano, significa pensare la base come composta di tre elementi uguali fra loro e uguali all'altezza; occorre dunque che il ragazzo, dopo aver fatto la sintesi degli elementi, cioè la costruzione, ne faccia l'analisi, e, poi, metta in relazione il perimetro con la somma dei segmenti che compongono la figura: si tratta di concepire un'equazione di 1° grado.

L'osservazione didattica che possiamo fare è questa: il bambino non osserva il rettangolo, non riesce ad analizzarlo cioè a vederlo nei suoi elementi, ma solo globalmente come un tutto inscindibile, anche se è stato lui a disegnarlo.

Facciamo risolvere lo stesso problema utilizzando un materiale semplicissimo: degli stecchini, tutti uguali. Dopo aver costruito un rettangolo di base tripla della altezza, non c'è bambino che, assegnato un valore per il perimetro, non sappia dire immediatamente quale procedimento deve seguire per trovare le lunghezze delle due dimensioni.

Che cosa c'è di diverso in questa costruzione dalla costruzione col disegno? Qui, il bambino si rende conto, nel fare la costruzione, della relazione della parte al tutto, dello stecchino rispetto a tre stecchini; vi dirà subito: occorre contare il numero degli stecchini! E lo stecchino, questo materiale da nulla, assume per il bimbo un valore enorme: è il mezzo per risolvere dei problemi costruendo e contando; operazioni, queste, che impongono di non verbalizzare.

Si passa dall'elemento alla sintesi degli elementi: il metodo è sintetico, all'inizio. Poi si assegna un dato: la lunghezza del perimetro, e si chiede la lunghezza ipotetica dell'elemento. Si ritorna indietro, si scompone; ora, davanti alla costruzione effettiva, il bimbo riesce ad analizzare la figura.

Inoltre l'utilizzazione di un materiale offre, rispetto al disegno, l'enorme vantaggio che gli elementi sono mobili. Si possono costruire con quegli stessi stecchini delle altre figure, per esempio un quadrato. Avrà la stessa area del rettangolo? La teoria degli isoperimetri e quella delle figure equivalenti nascono quasi da sé nella mente del bambino.

B) *Un teorema fondamentale* di geometria piana, alla cui intuizione si può arrivare seguendo l'indagine analitica di Decroly, è quello della *costanza della somma degli angoli di un triangolo*.

La dimostrazione che se ne dà in generale, pur facendosi uso qualche volta di un materiale (un triangolo in cartone), è piatta, perché il metodo da seguire è tutto indicato, e, come prima cosa, l'insegnante dà l'enunciato del Teorema.

Mi è sembrato che, volendo attirare l'attenzione degli allievi sugli angoli di un triangolo, fosse opportuno far variare questi angoli con continuità, perchè, se si presentano a un bambino uno o più triangoli anche in materiale, non gli viene certo in mente di osservare gli angoli.

Per realizzare la mobilità e la continuità ho presentato agli allievi la tavoletta di legno riprodotta in Fig. 5. Si tratta di una tavoletta, di dimensioni scelte a piacere, in cui sono piantati due chiodi; la congiungente i chiodi è parallela a un lato della tavoletta. Attorno ai chiodi passa un elastichino, di cui un ramo si tira

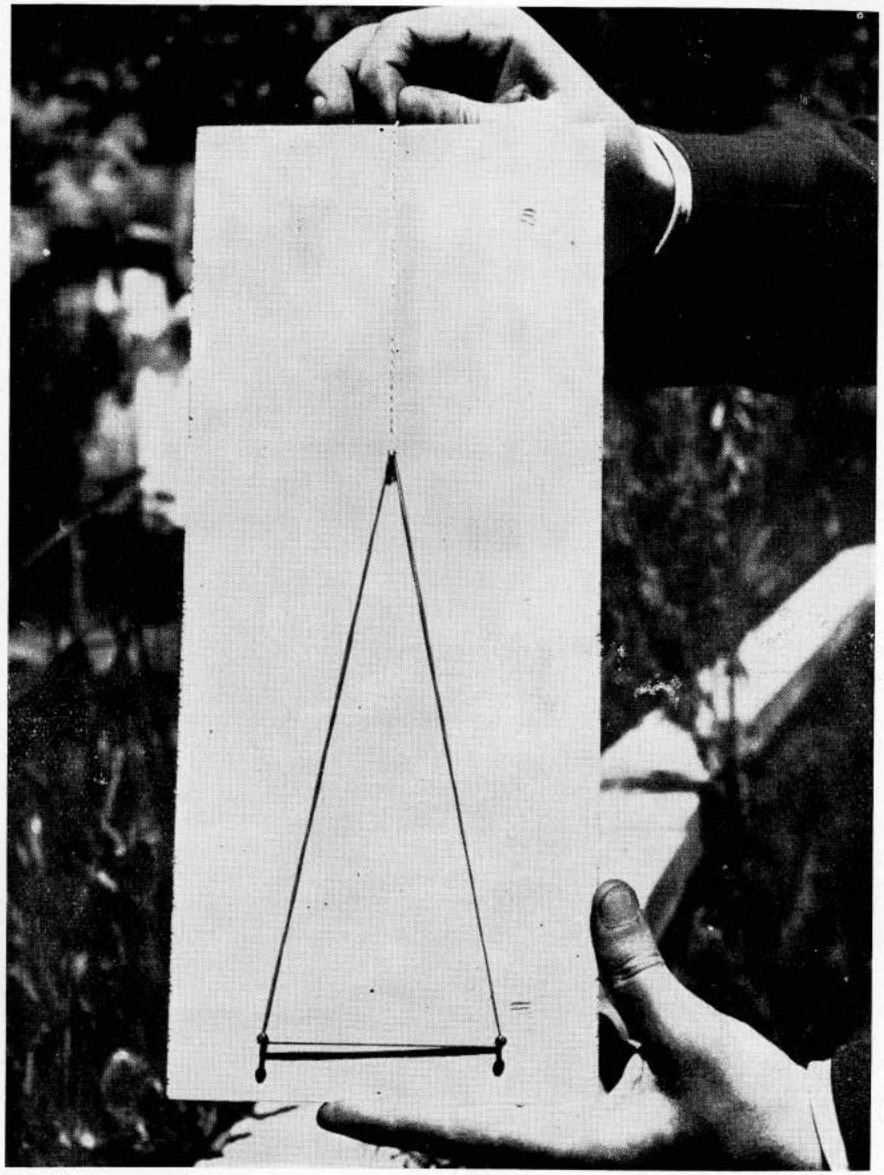

Fig. 5

con uno spago nel punto di mezzo in direzione perpendicolare alla congiungente i chiodi, che è realizzata dall'altro ramo dell'elastico; si ottengono così tanti triangoli isosceli (8). Qualunque mia relazione sarebbe fredda in confronto a quanto hanno scritto gli allievi, pregati di esporre le loro impressioni su questi triangoli. Dopo aver osservato tutti che solo la base resta sempre la stessa, ma che il perimetro varia e l'area varia, hanno notato che l'ampiezza degli angoli cambia e che « se si immagina di partire dal triangolo più grande che si può realizzare sulla tavoletta e di allentare a poco a poco lo spago, l'angolo al vertice diventa sempre più grande e gli angoli alla base sempre più piccoli ». « A un dato istante — ha osservato qualcuno — si ha un triangolo equilatero e, dopo, l'angolo al vertice diventa retto, si ha un triangolo rettangolo: per questo triangolo vale il Teorema di Pitagora, per gli altri no ». Io non credo che scrivendo questa frase, come un'osservazione del tutto naturale, il bimbo abbia realizzato il valore della sua scoperta: sta a noi di far fissare l'attenzione su questa proprietà che occupa così il suo vero posto: un caso particolare e particolarmente interessante fra un numero infinito di casi (9). I due « fuo-

---

(8) Ho preferito attirare l'attenzione degli allievi su dei triangoli isosceli anziché scaleni per non disperdere troppo la loro attenzione.

(9) Il matematico svizzero *J. L. Nicolet* ,che da vari anni si dedica alla costruzione di films di geometria, ha ideato di realizzare un disegno animato sulla questione ora esposta. Potete trovare le idee di Nicolet e di altri matematici sulla funzione didattica dei films nel volume « Le matériel pour l'enseignement des mathématiques »; vedi l'indicazione bibliografica nella Nota 19.

chi » della geometria euclidea piana — la somma degli angoli di un triangolo e il Teorema di Pitagora — vengono così ad essere collegati da questo semplice dispositivo [10].

« Alla fine gli angoli alla base diventano piccolissimi — così continuano parecchie relazioni — mentre quello al vertice diventa sempre più ottuso, e poi... il triangolo sparisce, diventa un segmento, la base. Allora gli angoli alla base non esistono più, ma quello al vertice è diventato piatto ». Questo caso limite non sfugge a nessuno; vi è qualche bambino, poi, che pensa di tirare sempre più l'elastichino, pensa a una tavoletta molto più grande, tanto grande che non si possa nemmeno

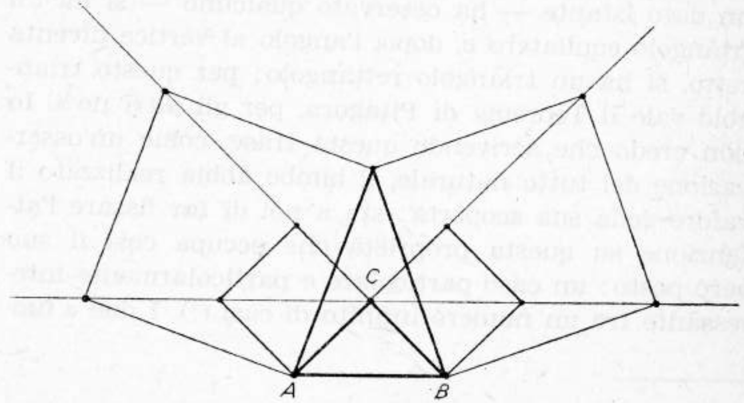

Fig. 6

[10] E' interessante osservare che se si costruiscono i quadrati sui lati dei vari triangoli isosceli, come si è fatto nella Fig. 6, i vertici liberi di questi quadrati scorrono su tre rette, AC, BC e la parallela ad AB per C, dove AB è la base comune e C è il vertice dell'angolo retto; la parallela ad AB per C forma, evidentemente, con ciascuna delle altre, un angolo di 45°.

realizzare, e scrive: « gli angoli alla base diventeranno sempre più grandi, quasi retti, e quello al vertice sempre più piccolo ». Tutti noteranno che quando l'angolo al vertice diminuisce gli altri aumentano e che ci deve essere una relazione fra gli angoli di un triangolo, che essi non sono « liberi ». E molti, « leggendo » il risultato nei casi limite, vi diranno che quello che perde un angolo è guadagnato dagli altri, e che la somma degli angoli di un triangolo deve essere sempre di un angolo piatto.

E' bene avvertire subito che non intendiamo aver dato così una dimostrazione del Teorema sulla somma degli angoli di un triangolo, e che, « leggendo » il risultato sui casi limite, si può — come ben sappiamo — essere portati ad errori. Ma anche gli errori sono fonte di apprendimento; essi metteranno, se non altro, in guardia dal lasciarsi condurre dalla sola intuizione e faranno comprendere anche a un ragazzetto che, dopo l'intuizione di una proprietà, è necessaria una dimostrazione logica.

La funzione del materiale nell'esperienza sopradescritta sta dunque nell'aver costruito una figura variabile per gradi insensibili, esperienza che non si può realizzare col solo disegno. Ed è proprio la variazione degli angoli che attira l'attenzione sugli angoli, e sono proprio i casi limite che, « smaterializzando » il materiale, lo fanno idealizzare e conducono all'intuizione della verità.