12 t. arancione
(67)

Archimede 1959

INDICE

DELL'UNDICESIMA ANNATA (1959)

(*PER RUBRICHE*)

1.

ARTICOLI DI TESTA

2.

FILOSOFIA – METODOLOGIA DIDATTICA

3.

ANTOLOGIA

(a cura di R. GIANNARELLI)

4.

MATEMATICHE APPLICATE

5.

PER I CANDIDATI AI CONCORSI

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA AI RAGAZZI DAGLI 11 AI 14 ANNI (1)

Ispirazione storica e trattazione didattica

Abbiamo detto ieri che una conoscenza dello sviluppo storico dei concetti matematici può essere di aiuto e dare delle utili suggestioni ai fini di una metodologia didattica.

Vorrei oggi illustrare queste idee su qualche esempio.

« Come iniziare un corso di geometria intuitiva ? », « Come presentare le diverse figure e come far conoscere le loro proprietà ? », « Come introdurre quella parte preparatoria, qualche volta un po' arida, che va sotto il nome di disegno geometrico ? ».

Queste domande di carattere didattico ne fanno sorgere altrettante di carattere storico: « Come sono nate le figure geometriche ? », « Come e quando sono state disegnate ? », « Su quali relazioni geometriche ci si è fermati anticamente ? ». Dallo studio di questi problemi vogliamo prendere ispirazione didattica.

È chiaro che non saranno gli « Elementi di Euclide » e nemmeno quanto ci rimane dei matematici greci che lo precedettero a dar luce al problema della nascita delle figure geometriche; come abbiamo detto nella parte generale, non si tratta di studiare le opere di matematici ma piuttosto le opere dell'uomo che fu condotto a fare della matematica per risolvere delle questioni di carattere pratico.

Osserviamo intanto che se si risale nel corso della storia le opere di matematica diventano opere di collaborazione, opere dell'umanità, opere che mostrano le esigenze di un popolo. Così troviamo verso il 2000 a. C. i papiri egiziani e le tavolette di argilla babilonesi, che trattano di una quantità di questioni di aritmetica e di geometria pratica. Ma i papiri egiziani e le tavolette babilonesi con i loro problemi già ben delineati e risolti non ci soddisfano più: attestano infatti un elevato grado di civiltà. Occorre risalire ancora nel corso della storia.

Accade allora a chi va a consultare documenti antichi quello che avviene all'esploratore di un fiume di una regione sconosciuta: si vuole andare a ritroso della corrente, si vuole salire ancora più indietro, si vogliono cercare quelle origini che sembrano allontanarsi sempre più a mano a mano che ci si avvicina.

Così, nella storia dell'umanità, non trovando più nulla di opere specifiche di matematica, ci si rivolge altrove, alle uniche manifestazioni delle civiltà

---

(1) Seconda Relazione tenuta al « II Convegno di studio sulla didattica della matematica », Firenze, novembre 1958.

primitive: alle opere d'arte. Facciamo addirittura un salto di parecchie migliaia di anni indietro, lì dove sono oggi le origini dell'arte, a quelle caverne dell'epoca paleolitica che, da meno di un secolo, sono venute a rivelarci i primi segni della civiltà; si tratta di grafiti di 15 o 20 mila anni fa.

La prima caverna con pareti dipinte che è stata scoperta è quella di Altamira, nella Spagna settentrionale; la scoperta è stata fatta nel 1879. I grafiti e le pitture che vi si trovano rappresentano animali in varie posizioni, per lo più animali che corrono fuggendo alla caccia dell'uomo: bisonti, cinghiali, cervi selvaggi. Non si trovano disegni geometrici nè in questa nè nelle altre caverne dell'epoca paleolitica; non solo, ma si nota come si sono voluti mettere in evidenza gli organi, l'interno della figura, che è stata dunque vissuta dall'artista in tutta la sua concretezza. Per trovare i disegni stilizzati, rappresentati con pochi tratti, cioè meno lontani dal disegno geometrico, occorre arrivare all'epoca successiva, la neolitica; l'epoca in cui gli uomini, usciti dalle caverne essendo il clima meno rigido, lasciarono la caccia per dedicarsi all'allevamento del bestiame e all'agricoltura. Al mutamento di stile nella pittura sono state attribuite varie cause: si è detto, ad esempio, che al contadino neolitico non occorrevano più i sensi acuti del cacciatore e quindi si veniva atrofizzando la capacità di cogliere i particolari per acquistare valore altre attitudini come la tendenza all'astrazione e al pensiero razionale. Senza voler entrare nel campo della critica d'arte, vogliamo però dire che, se una causa è da attribuirsi alle diverse occupazioni e preoccupazioni, ci sembra che un fattore determinante nel cambiamento di stile sia dovuto al fatto che gli uomini, usciti dall'epoca glaciale, lasciate le caverne naturali, furono obbligati a costruirsi abitazioni e strumenti. Ora, la costruzione porta a un'analisi molto più profonda di quanto non porti l'osservazione analitica di un oggetto già costruito. Mi spiego subito con un banale esempio di tipo moderno: l'analisi di una macchina fotografica già fatta e la costruzione di questo apparecchio. Se analizziamo una macchina fotografica moderna troveremo vari dispositivi come un sistema di lenti con diaframma ad apertura regolabile, un congegno per variare la distanza fra pellicola e obbiettivo, una pellicola sensibile, un otturatore, ecc., il tutto contenuto in una camera oscura. Tutti questi dispositivi appaiono a chi non se ne intenda ugualmente importanti ed essenziali. Ma, se si va a costruire una macchina fotografica, ci si accorge che gli elementi fondamentali si riducono solamente a una camera oscura dotata di un foro e a una pellicola sensibile; tutto il resto è un affinamento della tecnica.

Ho fatto questo esempio per mostrare come è *nel costruire* e *non nello scomporre*, nella sintesi e non nell'analisi, che si scoprono gli elementi fondamentali dell'oggetto e che si comprende che non tutti hanno lo stesso valore; ed è proprio così che si assume quella particolare mentalità, che possiamo considerare caratteristica dell'uomo più evoluto, per cui con pochi tratti si rappresenta un tutto. Si arriva insomma al significato moderno della parola sintesi che, originariamente, significava solo costruzione. Oggi, sintesi significa rappresentazione concisa, e – ripeto – a questo significato si è arrivati per la necessità di costruire « il necessario ».

Così, in arte, si arriva alla stilizzazione solo in quell'epoca in cui si comincia a costruire.

Tutto questo discorso sembra molto lontano dal campo della matematica, ma ricordiamoci che noi volevamo trovare le prime manifestazioni del disegno geometrico; è chiaro – per quanto si è detto – che non le possiamo trovare in un'epoca, come la paleolitica, in cui non si costruiva; sarà invece il periodo neolitico a darci qualche indicazione.

Possiamo anche spingere la nostra indagine più oltre e domandarci quali figure geometriche compariranno per prime; quelle – possiamo prevedere – che prima si ebbe bisogno di realizzare in pratica: il triangolo e il cerchio.

Parliamo del *triangolo*. Molto presto si deve essere presentato all'uomo il problema di traversare un corso d'acqua; si sarà accorto allora che un asse gettato a mo' di ponte acquista una resistenza molto maggiore se si dispongono dei puntelli come in fig. 1, in modo da formare dei triangoli. Si ritiene molto probabile che questa costruzione appartenga ai primordi della civiltà, ma fino ad oggi non è stato ritrovato nulla di simile nemmeno in grafiti.

Il triangolo appare invece per la prima volta in funzione di « capriata » (fig. 2), per sorreggere cioè i tetti a spiovente di un'abitazione a base rettangolare. Ce lo attestano non i resti di antiche abitazioni che, essendo di legno,

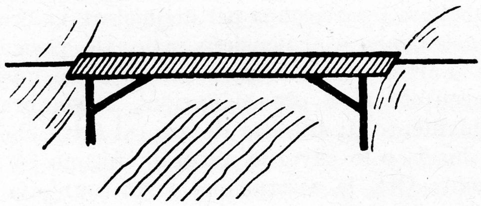

Fig. 1.

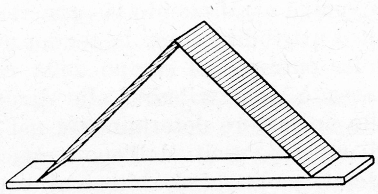

Fig. 2.

sono andate distrutte, ma disegni rudimentali di capanne siffatte che sono stati trovati in particolare nella valle del Danubio e che risalgono al periodo neolitico (1).

Il triangolo sarebbe quindi nato per necessità tecniche.

Costruendo una capriata, cioè un triangolo, si comprende il senso di questa figura, la sua caratteristica: l'*indeformabilità*. Ma si comprende anche la proprietà che ne dà la possibilità di costruzione, cioè: *un lato di un triangolo deve essere minore della somma degli altri due*. Il triangolo acquista così, dalla effettiva realizzazione in materiale, il suo significato più espressivo.

Passiamo ora alla parte didattica.

Ho cercato di chiarire agli allievi queste proprietà del triangolo ma mi sono accorta che, se si procede col solo disegno, esse non sono accessibili ai bambini di 11 anni.

Voglio riferirvi un'esperienza didattica seguìta per vari anni e che mi ha persuasa dell'insufficienza del disegno.

Dite ai bambini di una 1ª media di costruire con riga e compasso un

---

(1) Fra le tante opere riguardanti la preistoria e le prime tecnologie si possono consultare i numerosi volumi dell'eminente archeologo V. Gordon Childe, e una recente pubblicazione a cura di Singer, Holmyard, Hall, *A history of technology* (Clarendon Press, Oxford, 1954); vedi in particolare il volume I, dove si trova anche una dettagliata bibliografia sulle prime tecnologie.

triangolo di lati lunghi per esempio cm 7, cm 6 e cm 4. Essi vi chiederanno da quale « base » devono partire; direte loro che è indifferente e consiglierete di partire successivamente da un lato lungo cm 7 e poi 6 e infine 4. Ogni bimbo ha davanti agli occhi sul suo quaderno tre triangoli di lati lunghi 7, 6 e 4 cm. « Sono uguali questi triangoli ? ». In principio rispondono di no: il Postulato del movimento non è tanto evidente. Poi, si convinceranno dell'uguaglianza girando opportunamente il quaderno. Dunque, essi sono convinti che si può partire da un lato qualunque e che i triangoli costruiti con lati rispettivamente uguali sono uguali.

Dite poi di prendere come lunghezza di lati cm 12, cm 6 e cm 4, e di ripetere la costruzione. Essi si metteranno alla costruzione col solito impegno, ma uno dopo l'altro vi diranno che se partono da una base lunga cm 12 il triangolo non viene, e che devono cominciare o con cm 6 o con cm 4. Ed essi sforzeranno il disegno in modo che il triangolo, cioè un triangolo, sarà disegnato. Nessuno avrà dei dubbi.

Allora, cercate di far venir loro dei dubbi; dite loro: « ricordate l'esempio di prima quando i lati erano lunghi cm 7, 6 e 4 ? Da qualunque lato si iniziasse la costruzione, i tre triangoli risultavano uguali. E ora, è mai possibile ? In un caso il triangolo *non* si può costruire e negli altri sì ».

Questa contradizione logica non è sentita affatto. Essi sono allo stadio puramente empirico: provano senza seguire un ragionamento.

Gli errori così frequenti sono fonte d'indagine e di apprendimento per noi insegnanti. Ragioniamo sulla nostra esperienza didattica: abbiamo fatto eseguire un disegno, abbiamo fatto adoperare degli strumenti; dunque, si concluderebbe che abbiamo seguìto un metodo costruttivo, non certo descrittivo. Ma il disegno *non* è costruzione nel senso primitivo della parola; il disegno fissa il pensiero, non fa vedere i vari tentativi; il disegno è lo stadio finale della costruzione.

Da due anni, visto il mancato successo, ho voluto cambiare metodo, prendendo appunto ispirazione dalla storia, cioè facendo eseguire la costruzione con un materiale.

Ho distribuito ad ogni bambino di una 1ª media (nella seconda lezione: io non conoscevo dunque i miei allievi ed essi non conoscevano me; era quindi nulla l'influenza che potevo esercitare) 6 strisce di cartone forate agli estremi e ho dato loro dei ferma-campioni. Ho dettato quanto segue:

« Ho a disposizione 6 strisce di cartone: tre sono lunghe cm 8, una cm 15, una cm 17 e una cm 23.

Queste strisce si possono collegare agli estremi con dei ferma-campioni in modo da formare dei triangoli.

Posso costruire dei triangoli particolari ?

È sempre possibile con tre strisce di diversa lunghezza costruire un triangolo ? ».

I bambini dovevano costruire un triangolo, scrivere le loro osservazioni su questo; sfarlo, costruirne un altro....

Qualunque mia relazione sarebbe fredda in confronto ai loro piccoli componimenti; mi permetto di leggervi qualcosa:

« Io ho preso subito – scrive un bambino – le tre strisce uguali e le ho unite insieme agli estremi. Ecco: è venuto un triangolo coi lati uguali, è un triangolo equilatero.

Poi ho preso due strisce uguali di 8 cm e la striscia di 15 cm; è venuto un triangolo con due lati uguali e uno diverso, che è la base; è un triangolo isoscele molto schiacciato.

Poi ho preso tre strisce diverse, una di 8, una di 15 e una di 17 cm; è venuto un triangolo scaleno. Dalla forma mi sembra che sia rettangolo. Un altro triangolo scaleno ho ottenuto prendendo una striscia di 15, una di 17 e una di 23 cm. Questo non è certo rettangolo.

La seconda domanda mi chiede se un triangolo lo posso sempre costruire con tre strisce diverse; io credo di sì. No, non è vero! infatti se prendo la striscia di 23 e due da 8, il triangolo non si chiude, non c'è. E se prendo quella di 23, quella di 8 e quella di 15, nemmeno non c'è, cioè c'è, ma è schiacciato su un lato, perchè 15 + 8 fa giusto 23.

Ecco come rispondo alla seconda domanda: il triangolo lo posso costruire solo se i due lati più piccoli sommati insieme danno un po' più del terzo lato; basterebbe 1 cm di più ».

Altre relazioni sono meno ricche di questa, ma a nessuno è sfuggito il caso – diciamo così « limite » – in cui la somma di due lati è uguale al terzo, il caso dunque che opera la separazione fra la classe dei triangoli costruibili e quella dei triangoli che non si possono costruire.

Dai casi d'impossibilità, e solo da questi, nascerà l'idea della costruzione col compasso. Ecco come: cercheranno di « chiudere » il triangolo, faranno perciò ruotare due lati; questi lati descrivono due cerchi. E i cerchi si possono anche disegnare su un foglio di carta, fissando un lato con due puntine da disegno e passando la punta di una matita nel foro libero dell'uno e poi dell'altro lato.

Siamo dunque arrivati alla costruzione con riga e compasso, ma solo come risultato dei tentativi fatti lavorando con un materiale.

C'è poi un'altra scoperta che il bambino può fare solo se il triangolo è realizzato materialmente. Egli scopre che, anche esercitando una pressione sui vertici, il triangolo non si muove, non è articolabile. Si potrà allora interessarlo ai vari problemi della statica: dalla costruzione dei puntelli per sorreggere la passarella alla costruzione di ponti metallici, dalla più semplice capriata alle strutture triangolari di piloni, gru, ecc.; insomma, all'importanza « funzionale » del triangolo nelle costruzioni.

Da un punto di vista teorico possiamo dire che, pur avendo preso ispirazione dalle prime tecnologie, abbiamo anche seguìto, in un certo senso, lo spirito greco: perchè è dalla *costruzione* che il bambino è arrivato alla conoscenza del triangolo, alla sua *definizione*, definizione che non è certo stata imposta dall'alto perchè è lui, il fanciullo, che, costruendo nel concreto, l'ha costruita nel pensiero.

Abbiamo voluto, prendendo ispirazione dalla storia, illuminare una piccola costruzione: il triangolo. Ma il metodo storico può dare qualcosa di più ai fini di una trattazione didattica: può mettere in luce non solo un angolo della strada, ma tutta la strada; può suggerire cioè una linea da percorrere nell'insegnamento della geometria intuitiva. Può, lo studio della preistoria e poi della prima storia, dare un'indicazione sulla successione dei capitoli da trattare.

Perchè, dopo la costruzione delle prime abitazioni e dei primi strumenti, l'uomo si trovò ben presto a far parte di una comunità e di una società: si presentò allora, per esempio in Egitto, il problema della suddivisione dei campi in lotti di uguale area; ecco quindi – torno alla parte didattica – l'idea di svolgere, subito dopo l'argomento « costruzione delle figure », il capitolo dell'*equivalenza*.

Ma l'area di un campo poligonale, abbastanza facile a calcolarsi dividendo il campo in tanti triangoli e quindi riducendo il problema alla determinazione dell'area del triangolo, può non potersi calcolare in questo modo se nell'interno del campo vi sono degli ostacoli, come un lago, una costruzione, che impediscano delle misure dirette. Sorge allora l'idea di riprodurre un poligono uguale al dato in una spianata libera da ostacoli, e il capitolo dell'*uguaglianza* segue così, in modo naturale, quello dell'equivalenza.

Ma, ancora, è facile comprendere come spesso non sia possibile trovare nelle vicinanze del campo dato una spianata libera da ostacoli, e spontaneamente – è il ragazzo stesso che ve lo suggerisce – saremo condotti a riprodurre la figura « in piccolo »: si apre, s'impone addirittura, il capitolo della *similitudine*.

I capitoli fondamentali della geometria piana vengono così ad essere legati fra loro in un modo diverso dal solito, da una linea che non è certamente euclidea ma che segue anch'essa una logica, una logica costruttiva, perchè viene rivissuto il lavoro stesso fatto dall'umanità (1).

EMMA CASTELNUOVO.

(1) Come ho già avuto occasione di scrivere, è A. C. Clairaut che nel 1741 ha pubblicato un volumetto di geometria che segue questo ordine di idee.

DIDATTICA SEMPRE VALIDA.

« *Non basta che l'insegnante conosca per filo e per segno e domini liberamente la propria materia, ma è altresì necessario che egli, guidato da un'idea esatta dei limiti e dei fini del proprio lavoro, sappia scegliere e ordinare convenientemente le cognizioni da impartire* ».

GIOVANNI FEDERIGO HERBART.