ARCHIVIO DIDATTICO
PUBBLICAZIONI A CURA DEI CENTRI DIDATTICI NAZIONALI

ORIENTAMENTI SULLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO CICLO

I° CONVEGNO DI STUDI
(Firenze, 10-15 febbraio 1958)
"I SUSSIDI DIDATTICI"

SERIE V — ISTRUZIONE TECNICA E PROFESSIONALE

CENTRO DIDATTICO NAZIONALE PER L'ISTRUZIONE TECNICA E PROFESSIONALE

con la collaborazione del

CENTRO DIDATTICO NAZIONALE PER LA SCUOLA SECONDARIA

ORIENTAMENTI
SULLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA
NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO CICLO

I° CONVEGNO DI STUDI

(Firenze, 10-15 febbraio 1958)

"I SUSSIDI DIDATTICI,,

Roma - Via Guidubaldo del Monte, 24

1958

I RELATORI :

Prof. ADRIANO BARLOTTI - Docente nell' Università di Firenze.

» LUIGI CAMPEDELLI - Ordinario di « Geometria » nell' Università di Firenze e Vice-Presidente nel « Centro Didattico Nazionale di studi e documentazioni » con sede in Firenze.

» EMMA CASTELNUOVO - Titolare di Matematica nella Scuola media « T. Tasso » di Roma.

» SALVO D'AGOSTINO - Titolare di Matematica e Fisica nell' Istituto Magistrale « G. Caetani » di Roma.

» ANGELO PESCARINI - Titolare di Matematica e Fisica nel Liceo classico « Dante Alighieri » di Ravenna.

» GIOVANNI SANSONE - Ordinario di « Analisi » nell' Università di Firenze.

» BRUNO TEDESCHI - Docente nell' Università di Roma e Ispettore centrale del Ministero della P. I.

BASI CONCRETE IN UN PRIMO INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

di Emma Castelnuovo

RELAZIONE I

PARTE I (1)

METODO DESCRITTIVO E METODO COSTRUTTIVO

Benchè mi sia prefissa in queste nostre conversazioni di attenermi al titolo che ho dato e cioè « Basi concrete in un primo insegnamento della geometria », chiedo scusa se me ne dovrò allontanare qualche volta, ma allo scopo — penso — di dare più risalto al titolo stesso. Mi sembra infatti che non sia possibile mettere in luce quelle che noi riteniamo necessità odierne per un primo incontro con la geometria se non si chiarisce il nostro pensiero sia da un punto di vista storico-metodologico che da un punto di vista largamente didattico, cioè vedendo questo corso in rapporto con gli studi che lo comprendono e in particolare con quelli della scuola pre-elementare ed elementare.

(1) Ogni relazione si compone di due parti, una di carattere metodologico e una di didattica viva, riguardante cioè esperienze fatte in classe.

E' appunto all'uno o all'altro di questi punti di vista che faremo ricorso per procurare raffronti e per comprendere l'influenza che hanno avuto sul pensiero didattico degli insegnanti di oggi.

Cominciamo con un breve cenno sulla storia del corso di geometria intuitiva, dalla data della sua nascita e cioè dal 1881. Ma risaliamo ancora un po' avanti: lo spirito a cui doveva attenersi l'insegnamento della geometria e in generale della matematica nelle scuole secondarie italiane veniva fissato nel 1867 dal Cremona, dal Betti e dal Brioschi, incaricati dal Ministero di redigere i programmi per le scuole secondarie. « La matematica — dice la relazione della Commissione ministeriale del '67 — non deve considerarsi come un complesso di cognizioni utili in sè perchè applicabili ai bisogni della vita, ma principalmente come un mezzo di cultura intellettuale, come una ginnastica del pensiero diretta a svolgere le facoltà del raziocinio ed aiutare quel sano criterio che serve a distinguere il vero da ciò che ne ha solo l'apparenza »; si avverte nella relazione l'influenza della critica dei principi che — come è noto — arrivò nella seconda metà del secolo scorso ad un acume sottilissimo.

Alle idee espresse dalla Commissione si ispirò dunque tutto l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie raggiungendo un assetto logicamente rigoroso e formalmente impeccabile. Eppure, in questo regime di rigore, in quest'epoca dove si guardava molto più dalla parte della cattedra che da quella dei banchi, sorse, e proprio per opera degli stessi rigoristi, una coscienza pedagogico-psicologica. Nel 1881, sotto il Ministero Baccelli, veniva introdotto e dedicato agli allievi dei primi anni della scuola secondaria lo studio della geometria sperimentale o costruttiva o intuitiva (quest'ultima è la denominazione del 1881 ed è l'attuale) come precedente lo studio della geometria razionale. Ed è veramente notevole come l'Italia, che fra tutti i Paesi era quello in cui più rigorosamente si svolgeva l'insegnamento della matematica, sia stata la prima nazione (almeno a quanto mi risulta) in cui si sentì il bisogno di introdurre nei primi anni della scuola media un insegnamento geometrico a carattere intuitivo. Ma l'influenza delle disposizioni primitive del Cremona era così grande che anche il corso di geometria intuitiva seguì nella linea il corso di geometria razionale, differenziandosi da questo nel senso di sostituire le dimostrazioni logico-deduttive con delle prove sperimentali da effettuarsi col disegno o anche con l'uso di un materiale, e senza spiegare all'allievo la ragione della linea seguita. Veniva premessa un'assiomatica che, pur prendendo ispirazione dall'osservazione, dall'esperienza e da dati psicologici, era pur sempre astratta perchè non obbligava l'allievo a fare dei tentativi e gli dava l'impressione di qualcosa di dommatico, di prestabilito, di non-umano. E la situazione non migliorò certo quando nel 1923 i programmi seguirono l'influenza del filosofo Gentile. Nella riforma Gentile, infatti, le istruzioni miravano soprattutto a sviluppare nell'allievo le facoltà di comprendere la sistemazione deduttiva di una teoria, e i corsi di scuole medie erano ispirati per lo più a un'educazione di carattere letterario, storico, filosofico, più che scientifico. Si poteva, in sostanza, essere delle persone colte, delle vere personalità, anche con delle conoscenze molto scarse di matematica.

Per ritornare al campo della geometria intuitiva, si può asserire che il corso era, ed è in generale, a carattere *descrittivo, non costruttivo;* è un corso statico. E ciò, nonostante la grande influenza esercitata da Federigo Enriques che, sia in scritti di didattica, sia in pagine dedicate alla storia del pensiero scientifico o anche a teorie di geometria superiore, sia e soprattutto nelle sue lezioni-conversazioni che noi allievi abbiamo sempre vive nella memoria, non mancò mai di sottolineare il carattere storicistico, dinamico, a cui ogni insegnamento della matematica doveva ispirarsi.

Se le idee puriste volevano immergere il giovane, fin dall'inizio degli studi secondari, in un mondo dove tutto era prestabilito e ben ordinato, « in una teoria — così si esprime Enriques nel 1915 nella prefazione al primo volume della *Teoria geometrica delle equazioni* (2) — che deve apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che, discendendo dai concetti più generali alle applicazioni particolari, respinga da sè le incerte e mutevoli suggestioni del concreto... », « oggi — così conclude, sempre in quella prefazione, — l'epoca in cui gli uomini di scienza nascondevano le traccie del proprio cammino è ormai sorpassata; la nostra generazione considera giustamente come un dovere di render chiaro in ogni opera scientifica il sistema delle idee costruttive ».

Facendo nostro il pensiero del Maestro, noi sentiamo come dovere, anche nella modesta opera scientifica che è l'insegnamento in una scuola secondaria, di render chiaro ai bimbi fin dal loro primo incontro con la geometria il sistema delle idee costruttive. In

(2) F. Enriques e O. Chisini: *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. I. Ediz. Zanichelli, Bologna, 1915.

questo modo — pensiamo — essi non verranno respinti dai primi elementi di matematica perchè ogni passo sarà fatto da loro stessi, ogni passo sarà una loro costruzione.

Ma ci sembra che, più che le parole, qualche esempio possa chiarire, fin da oggi, la diversa impostazione dei due metodi d'insegnamento: *il descrittivo e il costruttivo.*

PARTE II

Lo stesso argomento trattato con metodo descrittivo e con metodo costruttivo

Prendiamo come argomento il seguente: *i criteri di uguaglianza dei triangoli,* e fissiamo l'attenzione sul modo con cui si insegna il terzo criterio.

Qualunque definizione venga data di triangoli uguali (in generale si dà nel corso inferiore quella secondo cui due triangoli sono uguali se sono sovrapponibili col movimento) è l'insegnante che enuncia i criteri d'uguaglianza e in particolare il terzo; dirà: « Due triangoli sono uguali se hanno i tre lati corrispondenti uguali ». Alcuni insegnanti, dopo aver disegnato due triangoli con i lati rispettivamente uguali, fanno constatare che si può portare l'uno a combaciare con l'altro ritagliando le figure disegnate su un foglio; si fa uso dunque di un materiale. Altri dànno la dimostrazione che si segue in generale nel corso superiore e che risale a Filone, cioè una dimostrazione logica che dipende dalle proprietà dei triangoli isosceli. Altri ancora si basano

sulla costruzione del triangoli da eseguire con riga e compasso, data la lunghezza dei tre lati.

I primi due modi, pur facendosi nel primo uso di un materiale, hanno un carattere espositivo, descrittivo. Se vogliamo essere sinceri, dobbiamo dire che solamente la terza maniera di trattazione seguirebbe lo spirito del corso, attenendosi al titolo « geometria costruttiva ». Ma — e qui entro nel vivo del problema didattico — vediamo che cosa ci dice l'esperienza diretta nei riguardi di questo modo di trattazione: mi riferisco ad esperienze condotte per molti anni in classi di prima media. Dite ai bambini di costruire con riga e compasso un triangolo di lati lunghi cm 6, cm 5, cm 4. Essi vi chiederanno da « quale base » devono partire; voi direte loro che è indifferente e consiglierete di partire successivamente da un lato lungo cm 6 e poi cm 5 e infine cm 4. Ogni bimbo ha davanti agli occhi sul suo quaderno tre triangoli di lati cm 6, 5, 4. « Sono uguali questi triangoli? ». Sul principio sarebbero tentati di rispondere di no, ma si capisce che occorre mettersi d'accordo sull'uguaglianza; il *postulato del movimento* non è poi tanto evidente. « Sono uguali, sì — vi diranno —, ma sono disposti diversamente ». E, per osservarli meglio, gireranno il quaderno.

Dunque, si conclude che si può partire da un lato qualunque e che i triangoli che hanno i lati rispettivamente uguali sono sempre uguali.

Suggerite adesso loro di prendere come lunghezza di lati cm 12, cm 5 e cm 4. Fiduciosi, si metteranno alla costruzione, ma uno dopo l'altro vi diranno che se prendono cm 12 come base non si riesce a costruire il triangolo; vi diranno « il triangolo non si chiude ». Ma la fiducia nei bimbi non manca mai; vi diranno:

« Io prendo invece come base cm 5, oppure cm 4; allora deve venire ». E sforzeranno in tal modo il disegno, non falseranno il disegno (non oserebbero mai farlo), ma forse hanno preso male le misure...; insomma questo triangolo deve esistere. Risultato del cento per cento.

Allora dite loro: « Ricordate l'esempio di prima, quando i lati erano lunghi cm 6, cm 5 e cm 4? Da qualunque lato si iniziasse la costruzione i tre triangoli risultavano uguali. E ora, è mai possibile? In un caso il triangolo non si può costruire e negli altri casi sì ».

Tutto questo sembra loro naturale. Non vi scandalizzate! E' un'assoluta mancanza di facoltà logiche, unita una fiducia illimitata di riuscire. Essi sono allo stadio puramente empirico: provano senza seguire un ragionamento.

Gli errori così frequenti sono fonte di apprendimento per noi insegnanti: sono estremamente istruttivi: è di qui che — a me sembra — si deve anche partire.

Eppure — si dirà — abbiamo seguito lo spirito costruttivo: abbiamo fatto adoperare degli strumenti, eseguire un disegno! Ma, ragioniamo: il disegno non è costruzione nel senso primitivo della parola. Il disegno fissa il pensiero, non fa vedere i vari tentativi; il disegno è lo stadio *finale* della costruzione.

Capirete meglio quanto voglio esprimere se vi riferisco su un altro modo di svolgere questo argomento. Date ad ogni bimbo un certo numero di strisce di cartone di varia lunghezza con fori agli estremi, in modo che egli abbia la possibilità, utilizzando dei ferma-campioni, di costruire vari triangoli (Figg. 1 e 2); e fra queste ci siano anche delle strisce di lunghezza tale

che non sia possibile costruire un triangolo. Dite loro di costruire dei triangoli e di scrivere le loro osservazioni. Nei loro componimenti, che molte volte rivelano non solo un ordine mentale, delle facoltà ragionative legate ancora al gesto e alla manipolazione del materiale, ma anche una fantasia e un'apertura mentale e — oserei dire — sono fonte di indagine psicologica per noi insegnanti, leggeremo sempre cose interessantissime. A nessuno sfuggirà il caso in cui il triangolo non si può costruire, e a nessuno sfuggirà il caso — chiamiamolo « limite » — in cui la somma di due lati è uguale al terzo, il caso dunque che opera la separazione fra la classe dei triangoli costruibili e quella dei triangoli che non si possono costruire.

E da questi casi d'impossibilità — e solo da questi — nascerà l'idea della costruzione col compasso. Ecco come: cercheranno di « chiudere » il triangolo, faranno perciò ruotare due lati; gli estremi di questi lati descrivono due cerchi. E questi cerchi si possono anche disegnare su un foglio di carta, fissando un lato con due puntine da disegno e passando la punta di una matita nell'uno e poi nell'altro foro. Siamo dunque arrivati alla costruzione con riga e compasso, ma solo *come risultato di tentativi fatti lavorando con un materiale.*

Ma c'è un'altra scoperta che il bimbo fa subito se il triangolo è realizzato con delle strisce collegate con dei ferma-campioni, o, meglio ancora, con le strisce di un meccano. Egli scopre che, anche esercitando una pressione sui vertici, il triangolo non si muove, non è articolabile. Si potrà allora interessarlo ai più semplici problemi della statica: costruzione di ponti metallici, di piloni, ecc.

Quando gli allievi hanno in mano delle strisce forate agli estremi e dei ferma-campioni, non si limitano a costruire dei triangoli.

Voglio accennare a tutto un gruppo di problemi molto interessanti che sorgono, quasi da sè, dando in mano a un bambino quattro strisce di cartone, collegabili agli estremi. Se le quattro strisce sono uguali, il bimbo, costruirà il quadrato (Figg. 3 e 4), ma immediatamente si accorgerà che è articolabile, e questo fatto gli sembrerà estremamente suggestivo: il quadrato si può muovere, si trasforma in un rombo. Nascono allora una quantità di problemi, problemi che non potrebbero nascere dal confronto di un quadrato in disegno e di un rombo disegnato, o di due figure realizzate in cartone pieno.

Osserveranno che, nella trasformazione, alcuni elementi variano e altri no. Fermiamoci su due questioni:

1) varia l'altezza, e quindi l'area; ma non mi trattengo su questo problema perché ci ritornerò, a lungo, nella terza relazione;

2) che cosa accade delle diagonali? Vi diranno che una si allunga e una si accorcia, e che — tutti sono pronti a giurare su questo punto —: « Quello che perde una diagonale, lo guadagna l'altra. E' dunque costante la loro somma. Senza esprimere dei giudizi su questa asserzione, inclinate sempre più un lato sull'altro, fino a tendere al caso limite: allora, una delle diagonali tende a zero e l'altra tende al doppio lato del quadrato. C'è sempre più d'uno che afferra la questione. Nel caso del quadrato, ogni diagonale è maggiore di un lato; qui, nel caso limite, la somma delle diagonali uguaglia il doppio di un lato. Dunque: la somma delle

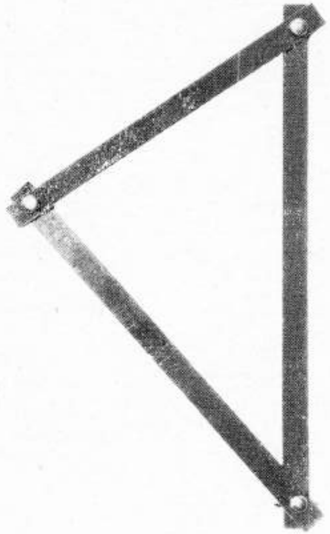

Fig. 1

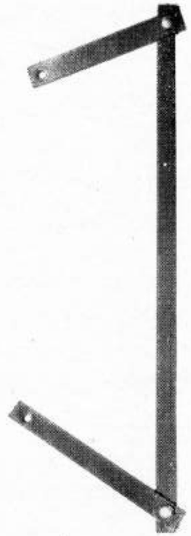

Fig. 2

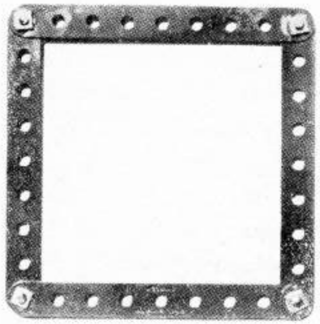

Fig. 3

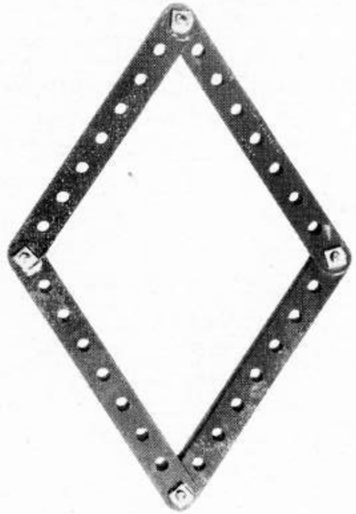

Fig. 4

diagonali non è costante, varia, e raggiunge un massimo. Il concetto di funzione, sia pure in una forma primitiva, comincia a farsi strada nella mente del bambino; a farsi strada faticosamente perchè egli vorrebbe che tutto si mantenesse costante e che quello che si perde da una parte si guadagnasse dall'altra. E, forse proprio perché non connaturato con una mentalità primitiva, questo concetto colpisce profondamente e fa pensare.

Fin da questo primo incontro col materiale vorrei farvi notare come ad afferrare la verità il bambino arrivi considerando i casi limite, cioè sia attratto proprio da quell'attimo in cui il materiale si « smaterializza ».