12 t. arancione
67

Archimede 1959

INDICE

DELL' UNDICESIMA ANNATA (1959)

(*PER RUBRICHE*)

1.

ARTICOLI DI TESTA

2.

FILOSOFIA - METODOLOGIA DIDATTICA

3.

ANTOLOGIA

(a cura di R. Giannarelli)

4.

MATEMATICHE APPLICATE

5.

PER I CANDIDATI AI CONCORSI

TRATTAZIONE DIDATTICA E DATI DI PSICOLOGIA SCIENTIFICA [1]

Se il metodo storico, di cui abbiamo parlato nella relazione precedente, consiste nel risalire alle origini della civiltà e nell'analizzare i successivi sviluppi e le varie fasi attraversate dall'uomo verso l'acquisizione di un concetto o di una legge matematica, allo scopo di trarre ispirazione didattica, il metodo della psicologia scientifica segue un cammino che può considerarsi analogo perchè si comincia anche in questo a studiare l'apprendimento matematico a partire dalla primissima infanzia.

Anche qui non si può dire quale sia l'inizio, da quale età si debba cominciare questa indagine, perchè anche qui la prima matematica non è nè numero nè misura e non è nemmeno intuizione delle figure nel senso euclideo (la facoltà che porta a distinguere ad esempio un quadrato da un cerchio o da un triangolo), ma va cercata nelle percezioni più o meno acute che ha il fanciullo, nel senso che dà ai movimenti, nell'orientarsi, nella scoperta qualitativa di cose uguali: va cercata insomma nei primi atti che rivelano da parte del bambino un pensiero capace di collegare percezioni ed azioni, cause ed effetti.

Come si vede, anche qui lo studio delle prime strutture matematiche obbliga il professore ad uscire dalla cinta del proprio insegnamento per entrare in altri campi, come quello della psicologia, della psichiatria, della medicina insomma. Non a caso molti dei grandi pedagogisti, ad esempio la Montessori e Decroly, vengono da una Scuola di medicina; e dal campo delle scienze naturali viene anche lo psicologo di Ginevra Jean Piaget, di cui vorremmo oggi illustrare nelle sue linee essenziali il metodo di lavoro.

Per comprendere il valore delle esperienze di psicologia di Piaget conviene rifarsi ai metodi della Montessori e di Decroly, metodi che, pur partendo da idee diverse, segnarono ai primi di questo secolo una linea d'azione attiva anche per quanto riguarda l'insegnamento della matematica. Come medici, entrambi furono condotti allo studio dei bambini intellettualmente o psichicamente anormali; per questi, era evidente che si doveva far leva non sulle facoltà intellettuali ma sulla rispondenza dei sensi, si doveva cioè partire dal concreto.

Furono perciò studiati fin nei dettagli i tipi di materiale e di esperienze che potevano esercitare un'azione sui sensi e, di riflesso, un'azione sulla mente. Le correlazioni sensi-mente, cioè concreto-astratto, erano, dati i soggetti, o rallentate o anormalmente accelerate. Comunque, una via per giungere all'intelligenza era allo studio e questa medesima via, opportunamente modificata, poteva applicarsi anche per i bambini normali accelerando così e rendendo più chiaro un processo d'acquisizione, che, spesso, era lungo e tedioso.

Ma, per mettere in luce questi metodi, sono obbligata a rifarmi ancora più indietro: prima della Montessori e di Decroly, cioè fino a quasi tutto il

---

[1] Terza Relazione tenuta al «II Convegno sulla didattica della matematica», Firenze, novembre 1958.

secolo scorso, l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari era o di tipo *verbale* o di tipo *percettivo*: la matematica era insegnata cioè o come una serie di verità, di regole indiscutibili, che si dovevano imparare a memoria, o facendo ricorso a immagini grafiche e anche materiali che dovevano avere per scopo di suscitare una presa di coscienza di una certa nozione attraverso i sensi.

Diamo un cenno delle varie metodologie su un esempio particolare: l'acquisizione del concetto di numero, dei primi numeri interi.

Mi piace scegliere questo argomento che considero un po' fuori del tempo e della storia, non soggetto all'ambiente in cui si vive, ribelle – direi – a qualsiasi manifestazione di civiltà e di progresso. Il bimbo d'oggi, che i nostri nonni non saprebbero riconoscere perchè già a due o tre anni è per molti lati un piccolo uomo in miniatura, così abituato alle ultime scoperte fatte nel mondo della tecnica che egli considera come patrimonio naturale, questo bimbo moderno, si trova per quanto riguarda il numero « da uno a due e da due a tre » come si trovavano i suoi coetanei di millenni di anni fa, come si trovano oggi i bimbi dei popoli primitivi.

« Da uno a due e da due a tre »: nelle metodologie precedenti quelle della Montessori e di Decroly, pur appoggiandosi sull'aiuto dei sensi, non si metteva l'accento sul passaggio da numero a numero ma piuttosto si insisteva sulla percezione di un determinato numero: non c'è « da uno a due o da due a tre », ma piuttosto c'è « uno o due o tre ». Così, per esempio, per dare l'idea del numero 3 si mostrava uno schema grafico di questo tipo :· e si facevano vedere dei gettoni in questa stessa posizione; per dare l'idea del numero 5 si presentava uno schema di questo genere ::· Ma non vi era passaggio da numero a numero, non si insisteva cioè sulle operazioni, all'inizio manuali, che si dovevano fare per passare da un numero a un altro. Si trattava quindi di una didattica basata su tante *percezioni di immagini nella loro staticità*, di cose, di oggetti, non su percezioni di trasformazioni, di operazioni. Questi metodi dunque, pur facendo ricorso a un modello, a un materiale, non si possono considerare come attivi.

Fatta eccezione di grandi pedagogisti, come Comenius o come Pestalozzi, la cui opera deve però considerarsi come isolata, occorre arrivare alla Montessori e a Decroly per entrare in modo sistematico nell'insegnamento attivo, cioè operativo.

Per renderci conto del processo mentale che il materiale Montessori fa fare al bambino, consideriamo anche qui l'acquisizione del concetto di numero. Si dànno al bambino delle aste di lunghezza differente, da 10 cm a un metro; queste materializzano i primi dieci numeri. Ogni asta è divisa in colori alterni rosso e blu, di lunghezza costante (10 cm) corrispondente all'asta più piccola. Ogni asta rappresenta quindi un numero; il numero è la misura dell'asta. Si passa dunque dall'elemento al complesso: il numero viene costruito. Qui non c'è solo percezione passiva di un'immagine, ma c'è costruzione, si opera. Si tratta di un metodo *attivo-sintetico*; sintetico perchè costruttivo: dall'elemento si passa all'insieme degli elementi, al globale.

Il metodo decroliano, pur potendosi ravvicinare a quello della Montessori perchè anch'esso operativo, ne differisce sostanzialmente per gli ideali e i mezzi d'attuazione. Il presupposto di Decroly è questo: la mente del bambino non è attratta dal dettaglio, dall'elemento, ma da una veduta d'insieme, dal globale. Decroly non dà perciò in mano al fanciullo un materiale per costruire, ma suggerisce degli spunti da trarsi per lo più da fenomeni naturali, in modo da condurre il bambino a delle osservazioni analitiche. Così, la crescita di una pianta o la quantità di acqua piovana raccolta in un recipiente in un dato tempo condurranno a misurare e a contare. È l'analisi che fa un naturalista che Decroly suggerisce al fanciullo; dall'osservazione globale di un fenomeno si è condotti alla scomposizione del fenomeno, all'analisi. Dal complesso si passa al semplice: il metodo di Decroly è *analitico*.

Pur seguendo linee opposte, questi metodi mirano entrambi, ai fini del passaggio dal concreto all'astratto, *a preparare degli esercizi che portino a misurare e a contare*. I materiali e gli espedienti che offriamo al bambino sono tutti ispirati a questa idea; il bimbo è *quindi obbligato a seguire certi passaggi* che gli vengono suggeriti, se non dal maestro, dal materiale stesso con cui lavora.

Questa pedagogia non è dunque libera. È appunto la libertà nella costruzione matematica che vuol raggiungere la metodologia, basata su esperienze psicologiche, di Jean Piaget.

La concezione che del materiale, o meglio del ricorso all'oggetto e all'azione, ha J. Piaget è notevolmente diversa da quella dei due pedagogisti di cui abbiamo ora parlato. Anzi l'evoluzione del significato di base concreta che troviamo in Piaget è essenzialmente dovuta a una critica fatta alle due metodologie precedenti. Il materiale non deve per Piaget servire da spunto per far sentire la necessità del numero o della misura, ma deve servire a sviluppare certe leggi che poi saranno necessarie per l'acquisizione di un concetto matematico, per esempio per la formazione del numero; certe leggi che spesso, erroneamente, si considerano come connaturate con l'intelligenza infantile e si attribuiscono come patrimonio del fanciullo fin dalla più tenera età. Piaget ha organizzato da anni una serie di esperienze su migliaia di bambini, messi a colloquio singolarmente con maestri specializzati, e da queste sono risultate le difficoltà e le incomprensioni dei bimbi per delle leggi senza le quali è impossibile costruire l'edificio matematico.

Voglio riferire di alcune esperienze che conducono alla formazione del concetto di numero e del concetto di misura; tali esperienze – come ho detto prima – sono state eseguite su migliaia di bambini e ci forniscono quindi dei dati su grandi numeri.

1. – L'esperienza della conservazione degli insiemi.

Si presentano al bambino due recipienti cilindrici di vetro, uguali, contenenti l'uno acqua rossa e l'altro acqua blu fino allo stesso livello. L'acqua del secondo recipiente si travasa in un terzo recipiente, sempre di vetro, molto più alto e più stretto, e si domanda al bambino se il primo e il terzo vaso contengono la stessa quantità di liquido. Risposta negativa fin verso ai 5 anni. I bimbi dicono « ne contiene più il terzo perchè l'acqua arriva più in su ».

Anche se l'acqua del secondo recipiente viene travasata in due o tre vasi piccoli vi diranno ancora che questi vasi ne contengono di più « perchè ora sono tanti ».

La stessa esperienza può farsi con quantità discontinue, con delle palline rosse e blu che il bimbo stesso può mettere e travasare nei vari recipienti; ma il risultato è sempre lo stesso: la comprensione da parte del fanciullo è esclusivamente di carattere percettivo.

È solo verso i 6 anni che si ha conservazione dell'insieme; il bambino sorride della domanda che gli viene fatta e dice: «certo che la quantità d'acqua è sempre la stessa! Basterebbe ritravasarla di nuovo nel vaso di prima per vedere che l'acqua raggiunge sempre lo stesso livello». Ecco, ora il bambino possiede la legge di reversibilità.

Da questo genere di esperienze risulta che non è possibile che il bambino afferri il concetto di numero fino a che gli manca la legge di conservazione degli insiemi, cioè la legge d'invarianza del numero.

2. – L'esperienza dell'ordinamento in serie.

Per costruire il numero è necessaria anche una condizione d'ordine: il bambino deve essere in grado di poter ordinare in serie degli elementi, e questo non si ottiene che fino ai 5-6 anni.

L'esperienza è la seguente: si dànno al bambino un certo numero di regoli (a forma di parallelepipedo di ugual base), che differiscono di poco uno dall'altro, per esempio di un cm, e gli si dice di metterli in scala, in ordine d'altezza. L'adulto che non ha mai assistito a questa esperienza resterà meravigliato a sentire come la cosa risulti difficile a un bambino: i piccolissimi sanno confrontare due regoli e poi basta; quelli un po' più grandi sanno fare raggruppamenti di pochi regoli. È solo verso i 5-6 anni che il bambino trova il metodo: egli comincia a scegliere il più piccolo fra i regoli e lo confronta con tutti gli altri, poi....

Si comprende come è necessario possedere questa legge di seriazione per poter costruire il numero: perchè il 2 è compreso nel 3, il 3 nel 4, ...

3. – L'esperienza sulla corrispondenza biunivoca.

Generalmente si sostiene che il bambino «possiede» il numero se ha compreso la legge di corrispondenza biunivoca; Piaget prova con un'esperienza, che è diventata ormai classica, che ciò non è vero: la corrispondenza può rappresentare solo un fatto percettivo per il bambino.

Ecco l'esperienza: ci si vale di due serie di gettoni di uguale grandezza, gli uni di colore rosso e gli altri di colore blu. Si dispongono su un tavolo 6 gettoni rossi allineati, ad una certa distanza uno dall'altro; si dice al bambino di metterne altrettanti di colore blu. Si osservano allora tre stadi nella comprensione del fanciullo: i più piccoli, fin verso ai 4 anni e mezzo, giudicheranno semplicemente la quantità dallo spazio occupato; essi disporranno dei gettoni blu vicini gli uni agli altri, senza corrispondenza, ma in modo che si formi la stessa lunghezza realizzata da quelli rossi. Questo stadio è presto sorpassato da una corrispondenza propriamente detta: il bambino metterà un gettone blu in corrispondenza di ogni gettone rosso. A questo punto siamo portati a dire che il bambino possiede la corrispondenza biunivoca, e dunque il numero, almeno allo stadio di manipolazione operatoria. Ma se si distanziano i gettoni di una serie uno dall'altro, insistendo però sul fatto che non si toglie e non si aggiunge nulla, il bambino vi dirà che ora i gettoni blu non sono più tanti quanti i rossi. La corrispondenza non era dunque che una forma percettiva: quando è venuta a mancare la corrispondenza visiva non vi è stata più equivalenza per il bambino. È solo verso i 5-6 anni che il bimbo ammetterà che l'equivalenza dura qualunque sia la figura geometrica formata dai gettoni.

Piaget dimostra dunque con indagini psicologiche che la costruzione del numero da parte del fanciullo non può farsi se prima non si sono costruite certe leggi, e, da esperienze condotte su larghissima scala, risulta che queste leggi, e quindi il numero, non si formano fino a una certa età.

« Se poi si vuole arrivare – dice Piaget – al concetto di *misura*, si sarà colpiti ancora di più dalla natura del tutto qualitativa delle nozioni primitive ».

Cominciamo col riferire delle esperienze condotte su bambini in tenera età (dai 2 ai 3 anni), e che sembrano strane dal punto di vista matematico. Sono esperienze che si mettono in evidenza facendo copiare dei disegni: il quadrato, il cerchio, il triangolo o il rettangolo sono tutti copiati dal bambino come dei tondi. Si dirà: è la difficoltà manuale che non permette al bimbo di disegnare in maniere diverse queste figure! ma ci si accorge subito che il bambino è capacissimo di copiare in modo diverso una croce, ad esempio. Cioè *il bambino è colpito dalle forme chiuse e dalle forme aperte*.

Così, se sono disegnati due cerchi uno dentro l'altro, o uno fuori dell'altro, o secanti, il bambino copierà con scrupolosa esattezza la reciproca posizione.

Sono dunque *le forme topologiche* che colpiscono prima di tutto la sua attenzione; la percezione euclidea viene dopo, verso i 4 anni.

Parliamo ora delle leggi che conducono alla misura e facciamo due esperienze: l'una mette in evidenza *la non conservazione delle lunghezze* e l'altra *la non conservazione delle superficie*.

1) Si dispongono su un tavolo due pupazzetti a una certa distanza l'uno dall'altro; poi si mette uno spesso cartone fra i due, e si domanda al bambino se i pupazzetti sono sempre alla stessa distanza di prima. I bimbi in tenera età vi diranno che ora la distanza è cambiata, che ora i pupazzetti sono più vicini. E, se nel cartone aprite una finestrella, vi diranno che quando si apre la finestra lo spazio è lo stesso, quando si chiude è di meno.

Queste osservazioni sono veramente molto strane; l'errore potrebbe essere forse spiegato pensando al senso che i bimbi danno alla parola « spazio ». Spazio, per il bimbo, è spazio vuoto; è una regione dove ci si può distendere. Se io metto un cartone, lo spazio vuoto diminuisce. È interessante osservare che questo concetto che il bimbo si fa dello spazio corrisponde forse al significato etimologico della parola a cui molti glottologi attribuiscono appunto il significato originario di distesa.

2) Dello stesso genere è l'interessante esperienza sulla non conservazione delle superficie. Si presentano al bambino due quadrati uguali in cartone verde; questi rappresentano due prati; ci si mettono sopra due piccole mucche, e si domanda: « le mucche hanno la stessa quantità d'erba da mangiare ? ». Tutti i bimbi rispondono affermativamente.

Poi, sul primo di questi cartoni, e precisamente nel centro, si dispone un cartoncino marrone e si dice che questo rappresenta una casa. Si chiede al bambino: « adesso, le mucche hanno la stessa quantità d'erba da mangiare ? ». Tutti i bimbi sono d'accordo sul fatto che la mucca del primo prato ha meno da mangiare perchè c'è lo spazio occupato dalla casa. Ma – ed è qui il fatto psicologicamente interessante – se anche sul secondo cartone si mette un cartoncino marrone uguale a quello di prima, e lo si dispone in un angolo, invece che nel centro, i bambini cominceranno a confondersi e risponderanno che ora lo spazio libero a disposizione delle mucche non è lo stesso perchè quando la casa è nell'angolo la mucca ha più spazio, ha da mangiare di più.

Errori di questo genere sono da attribuirsi – mi sembra – sia al significato che si dà comunemente alla parola «spazio» (se, ad esempio, in una camera un tavolo è disposto in un angolo, invece che in mezzo, si dice che «c'è più spazio»), sia alla confusione che il bambino fa fra la nozione di superficie e quella di perimetro.

Comunque, si può concludere che non è possibile costruire il concetto di misura fino a che non esistono le leggi di conservazione, e di queste leggi il bimbo non si impadronisce che fin verso i 6 anni.

* * *

Da queste esperienze e da molte altre (1) Piaget deduce che nel bambino nascono prima le *strutture topologiche*, poi, quasi contemporaneamente, quelle di *tipo algebrico* (esempio: la reversibilità delle azioni) e quelle *d'ordine* (esempio: la capacità di disporre in serie dei regoli).

Ora, a parte l'interesse psicologico, il fatto veramente notevole è che sono proprio queste le tre strutture su cui, secondo la Scuola di Bourbaki, è basato tutto l'edificio matematico. Questa corrispondenza fra il pensiero matematico del fanciullo da una parte e, dall'altra, le fondamenta della matematica moderna che pone a base dell'edificio matematico un sistema operatorio, fa pensare e avrà certamente molti riflessi sulla didattica.

Con questi brevi cenni non pretendo certo di avervi dato un quadro, sia pure incompleto, dell'opera di Jean Piaget e della sua scuola, ma vorrei aver messo in luce lo spirito di queste ricerche e il vastissimo campo di lavoro che con esse si è aperto.

EMMA CASTELNUOVO.

(1) Si possono consultare i numerosi libri di J. Piaget nelle edizioni Delachaux et Niestlé (Neuchâtel) e Presses Universitaires de France (Paris). Il lettore può trovare molte delle idee che abbiamo riferito nel volumetto: PIAGET-BOSCHER-CHATELET, *Avviamento al calcolo*, edizione «La Nuova Italia», Firenze, 1956.

GLI STUDI CHE «BASTANO».

Io sono convinto che Napoleone ha espresso in due parole ciò che ciascuno deve sapere il meglio possibile: geometria e latino. Ampliamo lo sguardo: intendiamo per latino lo studio delle grandi opere e principalmente tutta la poesia umana. Allora, è detto tutto.

ALAIN.