La moltiplicazione: caratteristiche e proprietà.

Le difficoltà degli allievi e la didattica

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30

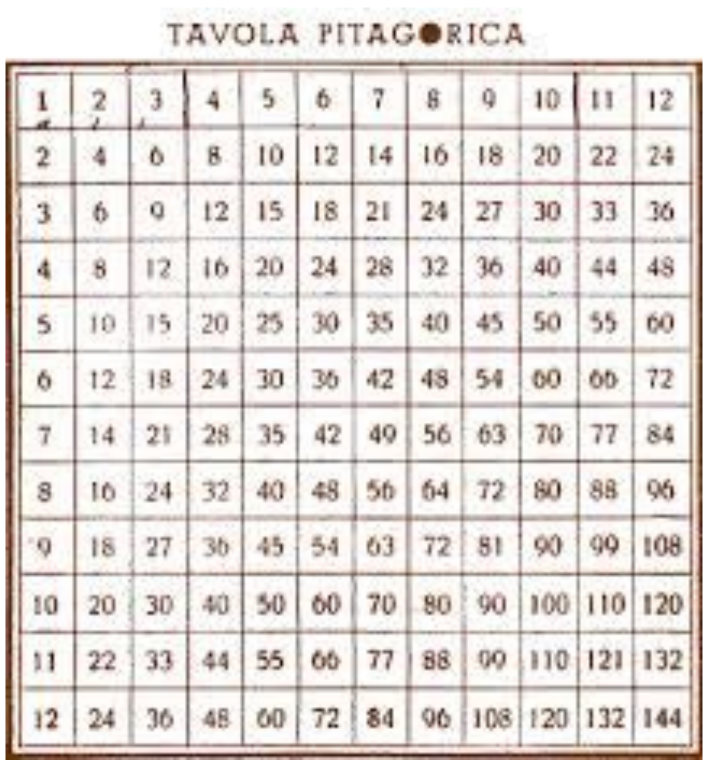
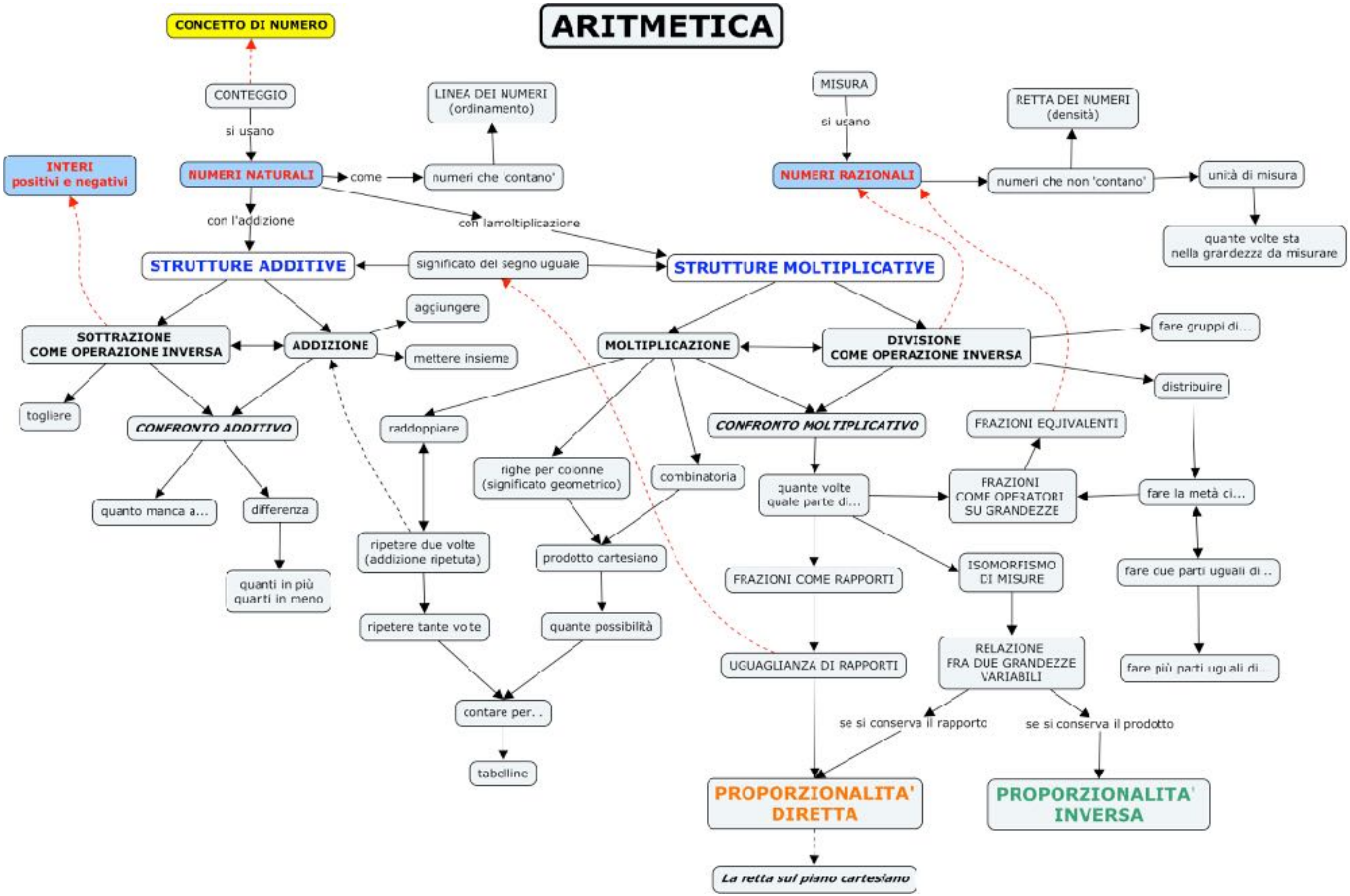


TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144


ARITMETICA
CONCETTO DI NUMERO
CONTEGGIO
si usano
LINEA DEI NUMERI (ordinamento)
INTERI positivi e negativi
NUMERI NATURALI
come
numeri che 'contano'
con l'addizione
con la moltiplicazione
STRUTTURE ADDITIVE
significato del segno uguale
STRUTTURE MOLTIPLICATIVE
MISURA
si usano
NUMERI RAZIONALI
RETTA DEI NUMERI (densità)
numeri che non 'contano'
unità di misura
quante volte sta nella grandezza da misurare
aggiungere
SOTTRAZIONE COME OPERAZIONE INVERSA
ADDIZIONE
mettere insieme
togliere
CONFRONTO ADDITIVO
quanto manca a...
differenza
quanti in più quanti in meno
MOLTIPLICAZIONE
DIVISIONE COME OPERAZIONE INVERSA
fare gruppi di...
distribuire
raddoppiare
righe per colonne (significato geometrico)
combinatoria
CONFRONTO MOLTIPLICATIVO
FRAZIONI EQUIVALENTI
quante volte quale parte di...
FRAZIONI COME OPERATORI SU GRANDEZZE
fare la metà di...
ripetere due volte (addizione ripetuta)
prodotto cartesiano
FRAZIONI COME RAPPORTI
ISOMORFISMO DI MISURE
fare due parti uguali di...
ripetere tante volte
quante possibilità
UGUAGLIANZA DI RAPPORTI
RELAZIONE FRA DUE GRANDEZZE VARIABILI
fare più parti uguali di...
contare per...
se si conserva il rapporto
se si conserva il prodotto
tabelline
PROPORZIONALITA' DIRETTA
PROPORZIONALITA' INVERSA
La retta sul piano cartesiano

La moltiplicazione nel concreto…

- Quali situazioni avete proposto ai bambini per introdurre la moltiplicazione?

- Quali significati della moltiplicazione pensate di aver costruito?

- Quando e come avete introdotto la simbologia?

- Quali ostacoli sono emersi?

Come per l'addizione, anche in questo caso dobbiamo avere ben chiaro a quali situazioni rimanda una scrittura come

3 x 7 = 21

…e nell’astratto.

- Il punto è che i bambini dovrebbero gradualmente superare l’idea che uno dei due fattori sia una **quantità** e l’altro un **numero di volte.**

- Ad esempio: 3 x 7 significa 3 caramelle per 7 volte oppure 3 volte 7 caramelle? Questo non dovrebbe essere un problema…

- Chi opera astrattamente con questa operazione sa che i due **fattori**, comunque si moltiplichino, portano allo stesso risultato, non ci interessa che cosa rappresentino concretamente i due numeri.

- Se i bambini sono arrivati fin qui, allora anche **le tabelline** assumono una loro funzione perché aiutano a trovare subito il risultato.

- Ciò che cambia è il significato che di volta in volta si può dare ai due numeri “*se essi rappresentano una situazione reale*”.

4. Puoi usare lo stesso rettangolo di cartoncino che hai ritagliato per il 5 x 4 per coprire il rettangolo 4 x 5 che hai appena rappresentato? Perché?

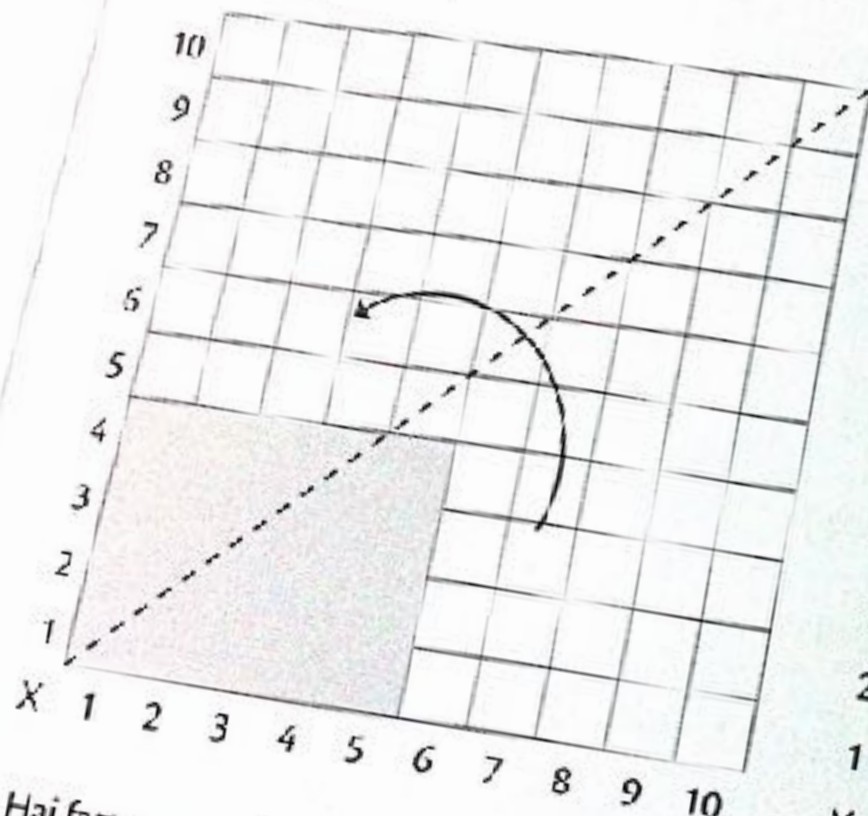
....

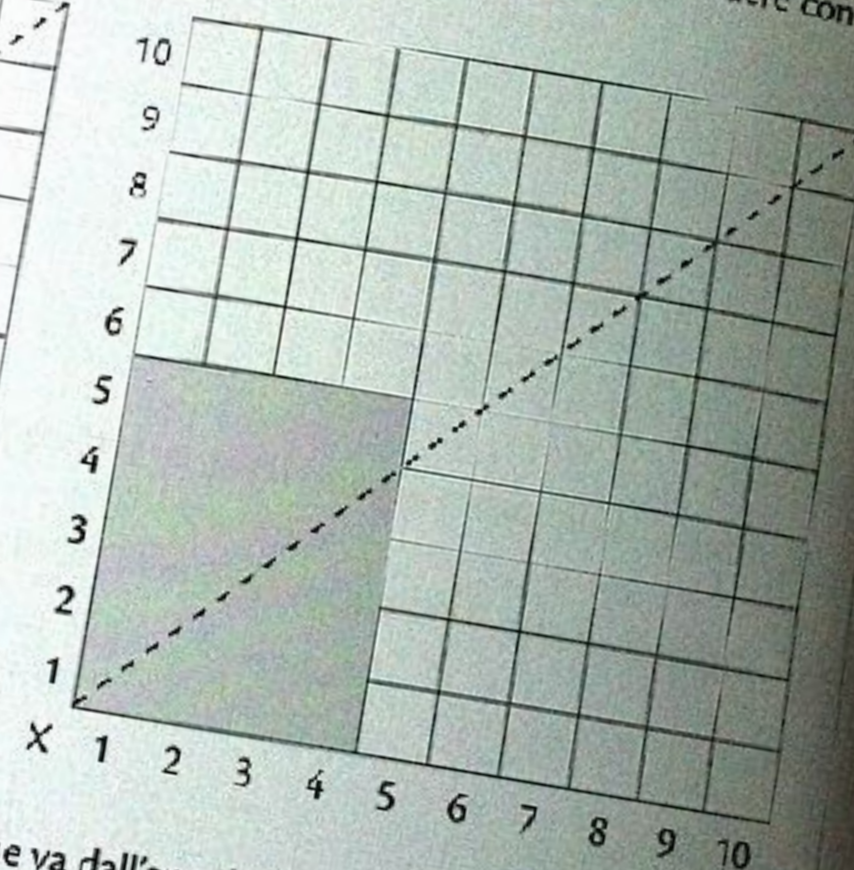
....

....

....

5. Se non lo hai fatto al punto precedente, parti con il rettangolo 5 x 4 di cartoncino nella sua posizione nella tabella e rovescialo con un movimento solo in modo che vada a coincidere con il rettangolo 4 x 5.





Hai fatto una «simmetria» usando la diagonale che va dall'angolo in basso a sinistra all'angolo in alto a destra della tabella.

6. Per ciascun prodotto indicato disegna il rettangolo corrispondente e scrivi l'altro prodotto che puoi rappresentare facendo il simmetrico del rettangolo.

Prodotto
2 x 3
8 x 6

Qual è il problema didattico?

1. Riuscire a tradurre le **situazioni particolari** e concrete nate dentro contesti ben precisi in situazioni più generali **decontestualizzate** in cui la moltiplicazione operi solo in quanto tale.

2. Far **superare l'idea iniziale** e intuitiva per cui la moltiplicazione sia solo un modo per accorciare l'addizione cioè un'**addizione ripetuta** perché questo non porta verso l'astrazione matematica.

3. Conoscere le **tabelline** quindi non è solo "avere il calcolo facilitato" ma questa conoscenza dovrebbe diventare una specie di **<u>impedimento</u>** a ritornare all'addizione ripetuta e quindi darci modo di **entrare in un'altra struttura.**

STRUTTURA = un INSIEME + un'OPERAZIONE

L'operazione struttura l'insieme.

Le proprietà di struttura

Se considero la **struttura (N, x)** cioè i ***numeri naturali*** con la ***moltiplicazione*** vedo subito che:

- l'operazione è **chiusa** (se moltiplico due naturali trovo **sempre** come risultato un naturale)
- l'operazione è **associativa** perché (3 x 2) x 6 = 3 x (2 x 6)
- esiste un **elemento neutro**, l'1, perché 3 x 1 = 1 x 3 = 3
- esiste anche un **elemento nullificatore,** lo 0 perché qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0
- Però **non esiste un inverso** perché *non ci sono due numeri naturali che moltiplicati diano l'elemento neutro 1*… devo ampliare l'insieme alle **frazioni** per poter avere l'inverso perché: ⅓ x 3/1 = 1 (un secondo ampliamento dopo quello agli **interi**!)

Addizione e moltiplicazione nei naturali

- Considero le tre strutture su **N**:
    - ➡ **N, +**
    - ➡ **N, x**
    - ➡ **N, +, x**

- Se metto insieme addizione e moltiplicazione ho una proprietà in più, la **distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.**

- **(10 + 7) x 5 = (10 x 5) + (7 x 5) = 50 + 35 = 85**

- Questa è una proprietà fondamentale per le **manipolazioni algebriche** che i bambini dovranno affrontare dalla scuola media in poi (es. addizione di monomi simili) ma si usa già nella scuola primaria perché costituisce la **base dell'algoritmo di calcolo della moltiplicazione in colonna.**

Restando nei naturali…

- Il concetto di **multiplo** assume una grande rilevanza.

- I bambini parlano dei multipli dicendo che “**sono i numeri delle tabelline**” ed è proprio così.

- Le tabelline sono **decontestualizzate**, rappresentano la moltiplicazione di due numeri naturali e il suo risultato, memorizzarle serve per calcolare più velocemente

- Nello stesso tempo possiamo accorgerci che **non tutti i numeri naturali entrano nelle tabelline**, solo alcuni privilegiati…

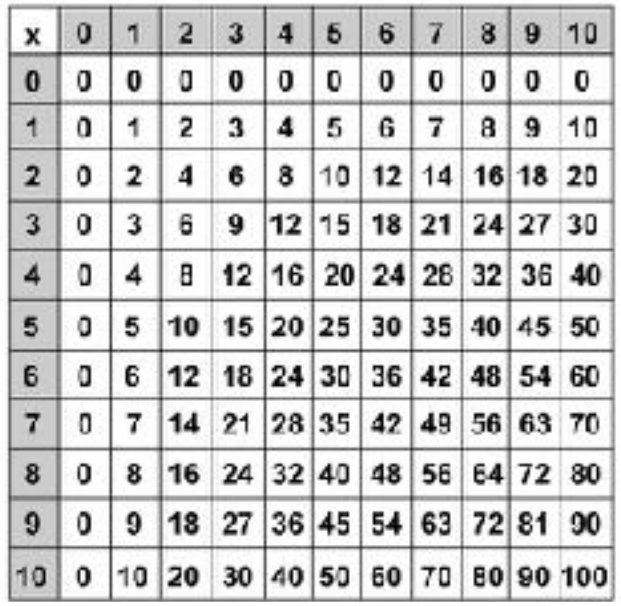
- Quali? Perché? E quali non entrano? Perché? Lascio a voi cercare le risposte….

Tabella della moltiplicazione con e senza zero

Tabelline alla cinese

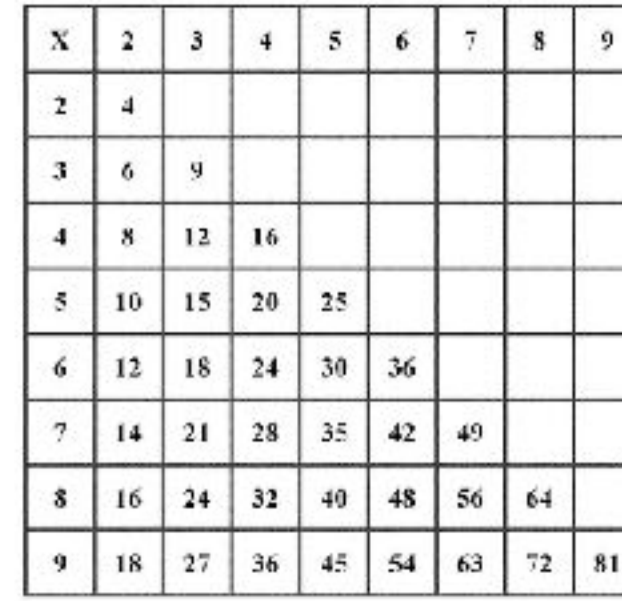

TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100



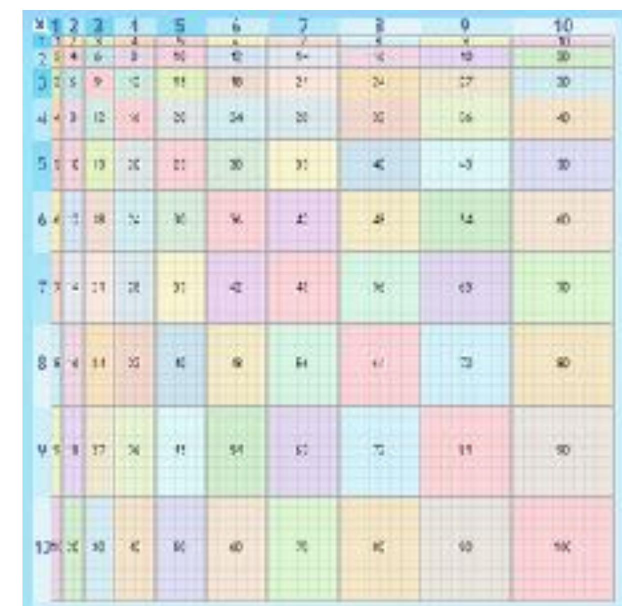
X	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4							
3	6	9						
4	8	12	16					
5	10	15	20	25				
6	12	18	24	30	36			
7	14	21	28	35	42	49		
8	16	24	32	40	48	56	64	
9	18	27	36	45	54	63	72	81

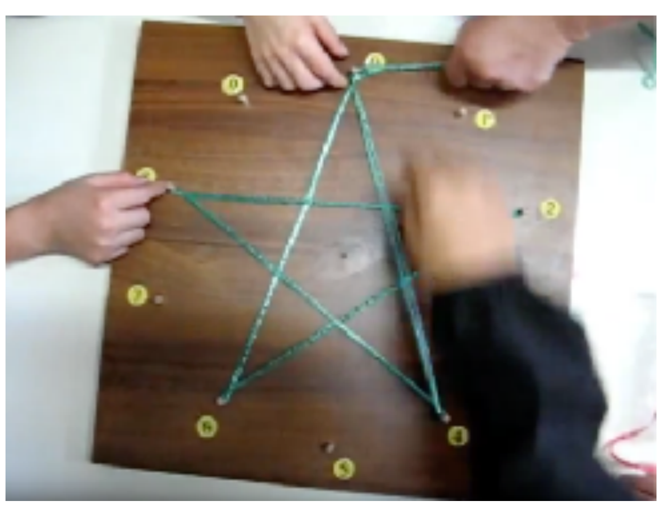
Aritmetica modulare o dell'orologio (Montessori)

Moltiplicazioni per 6-7-8-9 con le dita

https://youtu.be/XhYulqByNs4

Decanomio





https://youtu.be/EPCga7PZ8mE

Il tubo pitagorico di Quercetti

?

http://www.quixgame.it/tabelline_3918577.html

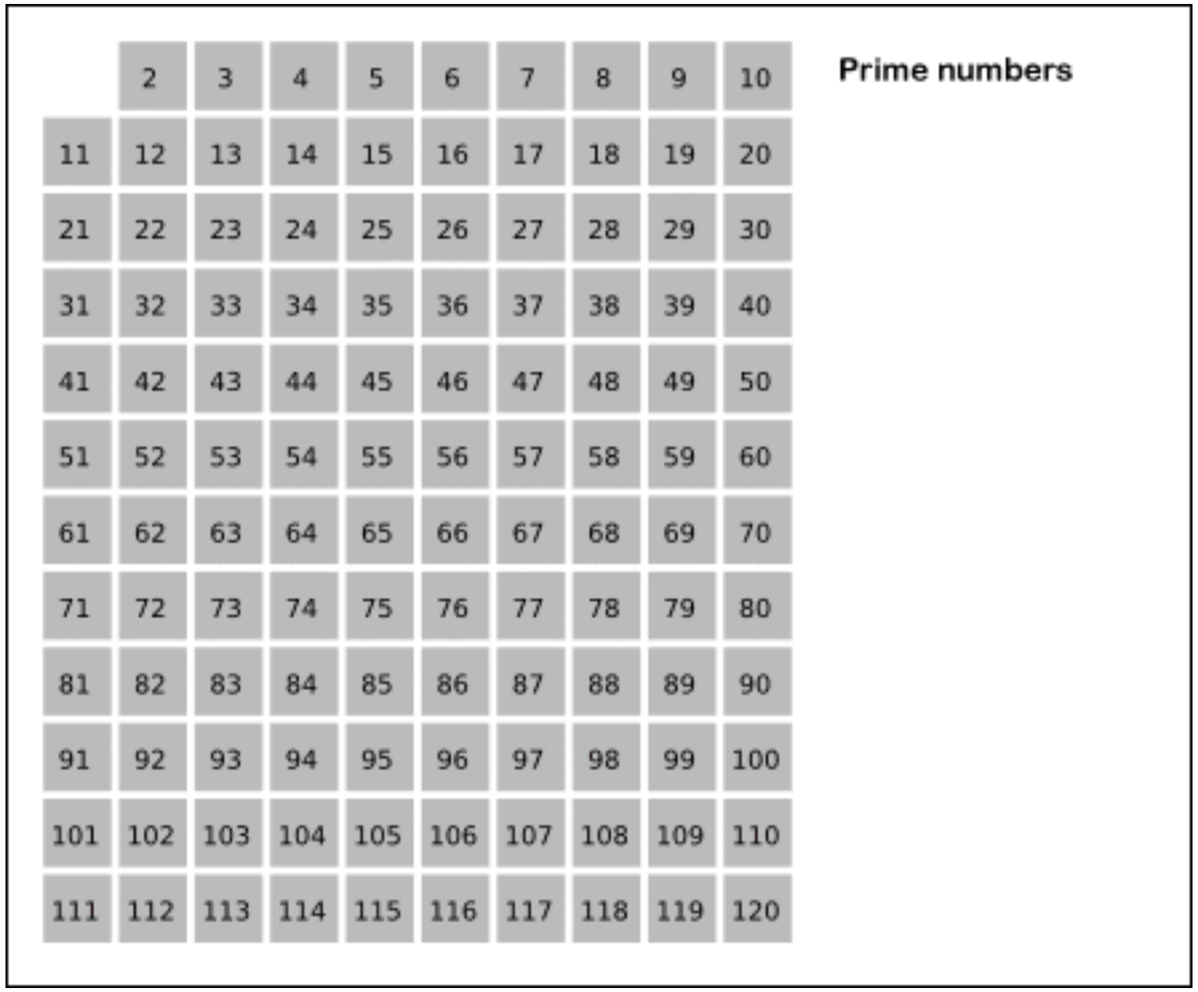
Il crivello di Eratostene

- Il crivello (setaccio) di Eratostene è un antico procedimento per il calcolo delle tabelle di **numeri primi** fino ad un certo numero **n** prefissato.

- Il procedimento è il seguente: si scrivono tutti i numeri naturali a partire da 2 fino a **n** in un elenco detto **setaccio**.

- Poi **si cancellano (setacciano) tutti i multipli del primo numero del setaccio (escluso lui stesso).** Si prende poi il primo numero non cancellato maggiore di 2 e si ripete l'operazione con i numeri che seguono, proseguendo fino a che non si applica l'operazione all'ultimo numero non cancellato.

- I numeri che restano sono i **numeri primi minori o uguali a n.**



In matematica, un **numero primo** è un numero intero positivo che abbia esattamente due divisori. Analogamente si può definire come un numero naturale maggiore di 1 che sia divisibile solamente per 1 e per sé stesso;

I problemi nel concreto

- Ciò che i bambini devono imparare è che tipo di **situazioni la moltiplicazione riesce a modellizzare** e quali no… e perché.

- Dal **gioco del mercatino** possono arrivare tante sollecitazioni: comprare più cose con lo stesso prezzo… comprare un certo peso di una merce…

- In queste situazioni i bambini inizialmente possono applicare la loro **idea intuitiva di moltiplicazione come addizione ripetuta**… si ripete tante volte lo stesso prezzo… è come addizionare tante volte lo stesso numero…

- Però possono anche, più avanti, cominciare a vedere le cose in un altro modo, ragionando sulle **relazioni tra** una merce e il suo prezzo.

La bancarella della frutta secca

Il mercatino delle pulci

- In prima è probabile che i bambini abbiamo prodotto **liste di numeri** quando contavano per due, per tre ecc. e queste liste potrebbero essere esposte in classe.

- Qui non c'è ancora la moltiplicazione ma solo un certo **modo di contare** e quindi sarebbe utile riprendere le esperienze di conteggio e ricostruire con loro queste liste.

- L'esigenza di **contare grandi quantità** spinge verso il **raggruppamento per…** in modo da non perdere il conto: altra situazione in cui saper **contare per…** permette di risparmiare tempo. Ad esempio contare per 5… per 10…

scuola dell'infanzia

2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

3
6
9
12
15
18
21
24
27
30

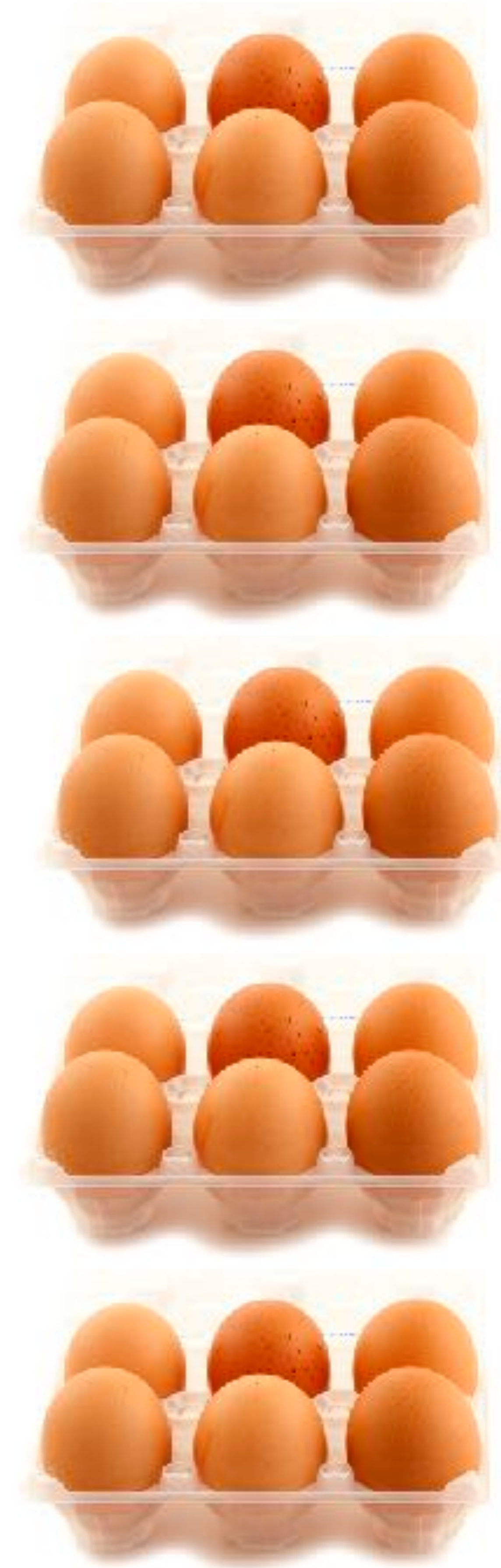
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

classe prima

- Ma poi siamo sempre obbligati a fare i conti con i **significati**. Potrebbe essere utile allora chiedere loro di **cercare/inventare situazioni** in cui la “tabellina” del 6 serva per risolvere qualche problema concreto.

- Ad esempio: *se ho* ***5 confezioni da 6 uova****, la tabellina mi aiuta a dire velocemente quante uova ho? perché?*

- Qui le argomentazioni dei bambini sono fondamentali e andrebbero raccolte in qualche modo per **avere le loro parole** e riutilizzarle al momento opportuno.



1	6
2	12
3	18
4	24
5	30

Giochi con le mani

" Disegna le tue mani mentre contano".

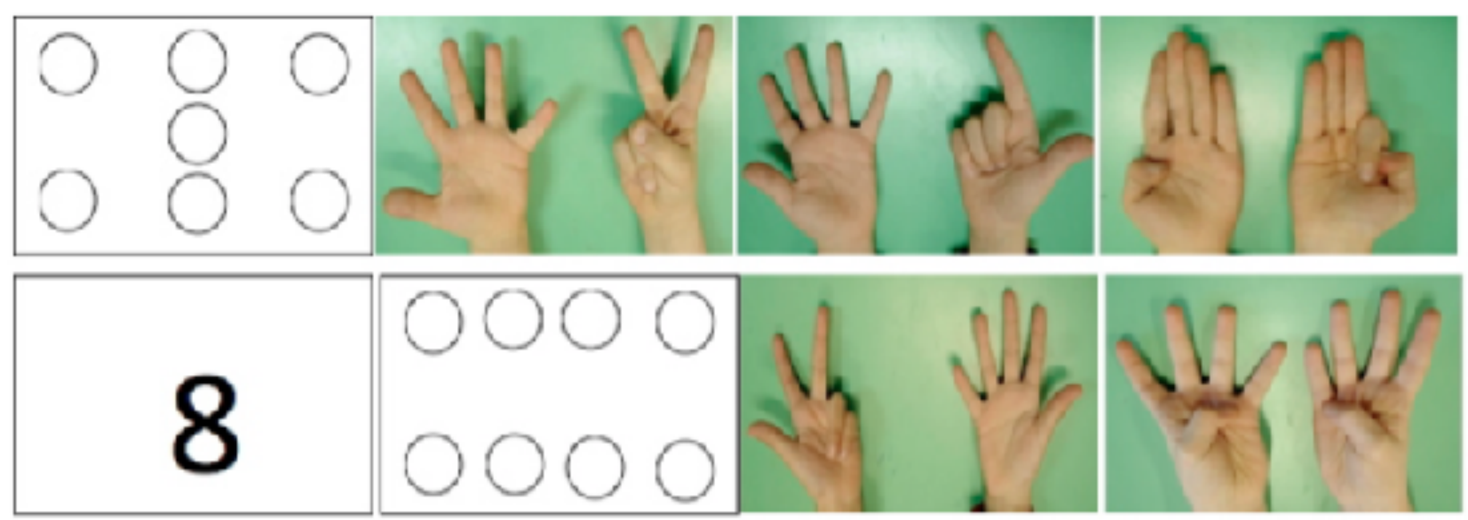
Mettendo le mani dietro la schiena la maestra dice:

Ho le dita di una mano sollevate e ancora altre quattro dita sollevate. Che numero è?

(Alla risposta la maestra fa vedere le sue mani)

Come si contano le tabelline sulle mani? Perché?

Diversi modi da diverse culture



ALTRI ESEMPI DI PROBLEMI CON QUALCHE AGGIUNTA…

- Una bustina contiene 5 figurine. Luca compera 4 bustine. Quante figurine possiede? ***Perché? E se avesse comperato 9 bustine, quante figurine avrebbe? Perché?***

- Un contenitore contiene 6 uova. La mamma ogni sabato al supermercato compra 4 contenitori. Quante uova porta a casa? ***Perché? E se……..***

- Filippo ha comprato alcune confezioni di batterie per i suoi giochi. Una confezione contiene 4 batterie. Se compra 5 confezioni, quante batterie potrà usare? ***Perché? E se…….***

- Al supermercato vendono le confezioni di merendine. In una confezione ci sono 5 merendine. La mamma di Giorgia compra 4 confezioni ogni settimana. Quante merendine possono mangiare Giorgia e i suoi fratellini? ***Perché? E se………***

bustine	figurine
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45

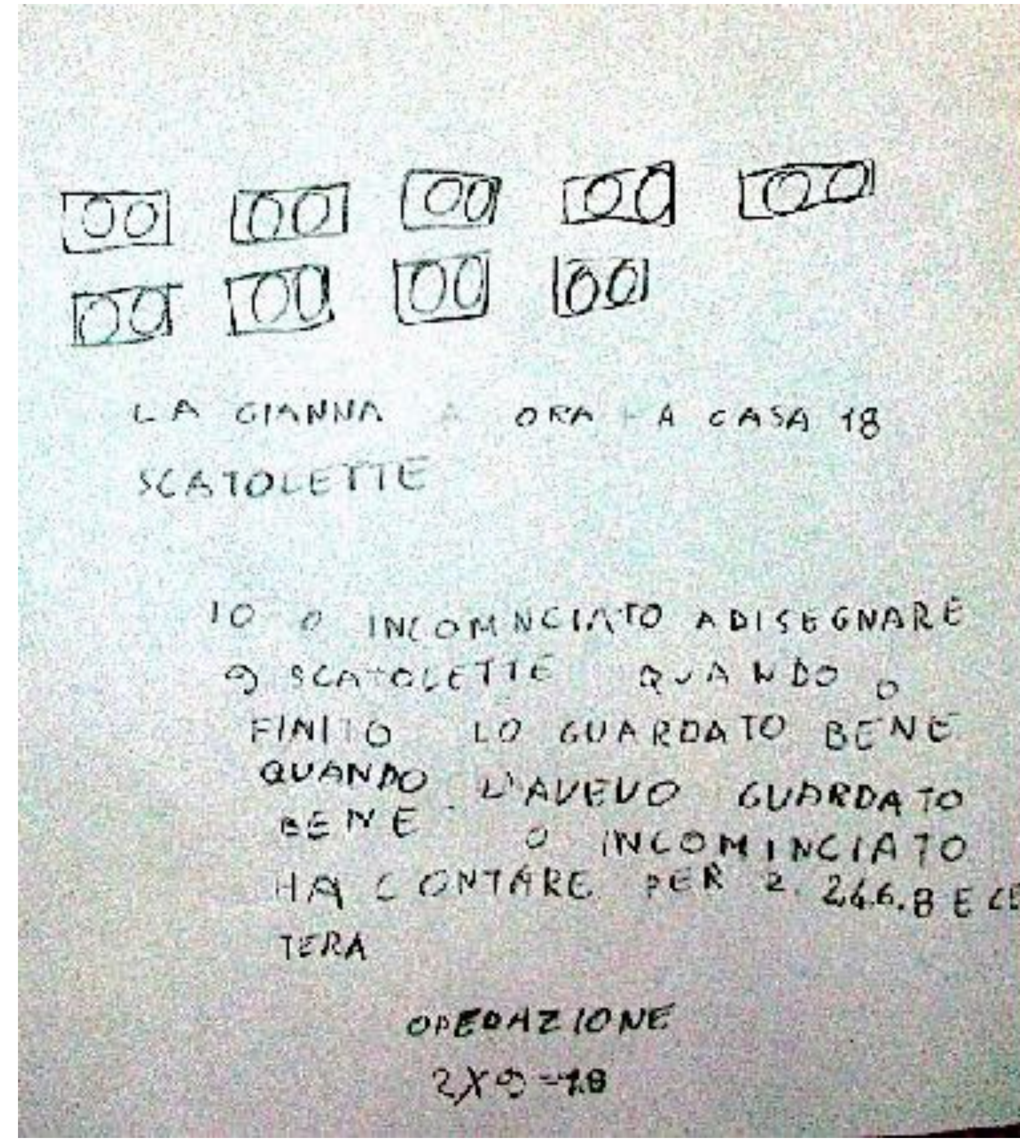
Le domande “aggiuntive” ci portano verso la costruzione di tabelle come questa ma **per arrivarci ci vuole tempo**. Ciò che importa è che i bambini comincino a **vedere** e ad **esprimere** a parole o con il disegno **la relazione**, ad es. tra **bustine** e **figurine**

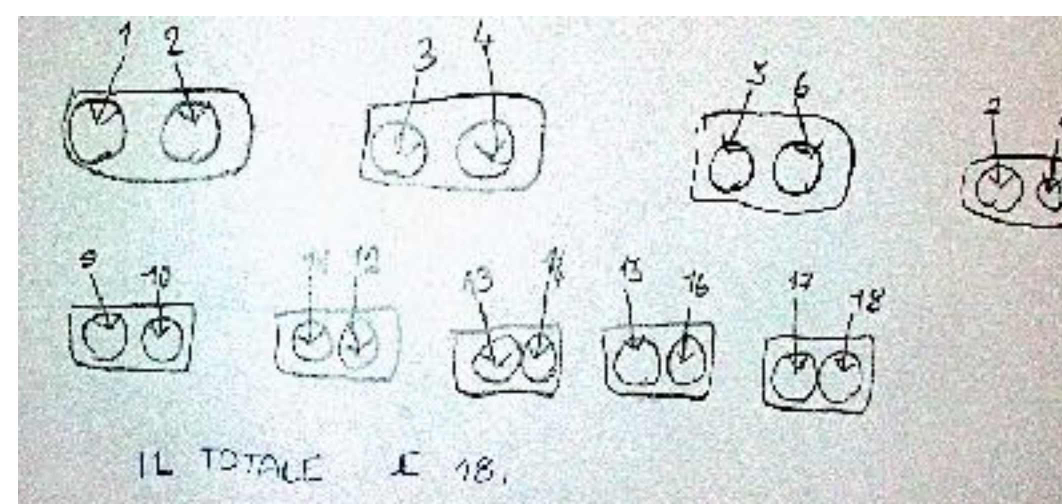
- Chiedere di **spiegare il perché** e poi **modificare i dati con "E se…."** è un primo passo verso la **generalizzazione** e contribuisce a dare senso alle tabelline, a legarle a situazioni di esperienza che si possono incontrare.

- L'altra cosa importante, che deriva dalla richiesta del "perché", è l'invito a **rappresentare** in qualche modo ciò che succede in quella storia.

- **<u>Le tabelle possono essere un punto di arrivo ma possono anche non esserci</u>**, ciò che si deve chiedere ai bambini è di **rappresentare** la situazione in modo assolutamente spontaneo.

- **Solo** **dopo** le rappresentazioni saranno **confrontate** e **discusse** con i bambini per trovare quelle che potrebbero essere condivise da tutti, senza mai sminuire apporti originali e divergenti.





Il campo concettuale delle strutture moltiplicative

- la moltiplicazione
- la divisione
- le frazioni
- i rapporti
- i numeri razionali
- ....

Il campo concettuale delle strutture moltiplicative e i numeri razionali in: UMI - Unione Matematica Italiana
NUMERI E OPERAZIONI NELLA SCUOLA DI BASE
A cura di Liliana Artusi Chini, Zanichelli, 1985

6

Il campo concettuale delle strutture moltiplicative e i numeri razionali

Gerard Vergnaud

1. *Premessa*

La storia ci insegna che la scienza e la tecnologia si sono sviluppate nell'intento di risolvere problemi. Uno dei punti cruciali nella didattica è probabilmente quello di avvalersi di problemi significativi in modo che la conoscenza, sia nell'aspetto teorico che in quello pratico, possa essere considerata dagli studenti come un aiuto naturale per la soluzione di problemi reali. È chiaro, però, che non è facile soddisfare alla condizione che la conoscenza sia al tempo stesso operativa e interessante.

Piaget ha dimostrato che lo sviluppo della conoscenza e dell'intelligenza richiede un lungo periodo di tempo, ma è giunto a tale conclusione analizzando lo sviluppo dei bambini in termini di capacità generali, soprattutto logiche, dell'intelligenza, senza prestare sufficiente attenzione ai contenuti specifici della conoscenza stessa. Proprio la necessità di capire come si acquisiscono e si sviluppano conoscenze e abilità specifiche, in relazione a situazioni e a

L’analisi di Vergnaud

- **Gerard Vergnaud** psicologo, allievo di Piaget, ha fatto un’analisi dettagliata dei concetti sottesi ai problemi **additivi** e **moltiplicativi** cercando di spiegare come mai certi casi siano più difficili di altri per i bambini.

- I concetti matematici coinvolti nei problemi moltiplicativi sono **tanti** e **complessi** da gestire. Ne vedremo solo alcuni e limitatamente ad una tipologia di problemi, quelli che Vergnaud chiama “**isomorfismo di misure**” (perché si chiamino così lo vedremo la prossima volta parlando della divisione e della misura)

- La prima difficoltà è data dal fatto che in questo tipo di problemi si deve ragionare su una relazione a **quattro,** non a **tre** come nel caso dell’addizione.

- Per giunta il **quarto elemento** di solito non è espresso con un numero.

L'enfant, la mathématique et la réalité, 1981

Vergnaud in pratica

Leggiamo il testo di questo problema:

Oggi in classe siamo 14 alunni. La maestra dà 3 fogli ad ogni alunno.

Ci sono due numeri 14 e 3 … come li uso se non so che 3 va messo in relazione con un numero che non c'è?

La parola in **rosso** è ovviamente la chiave….

x3

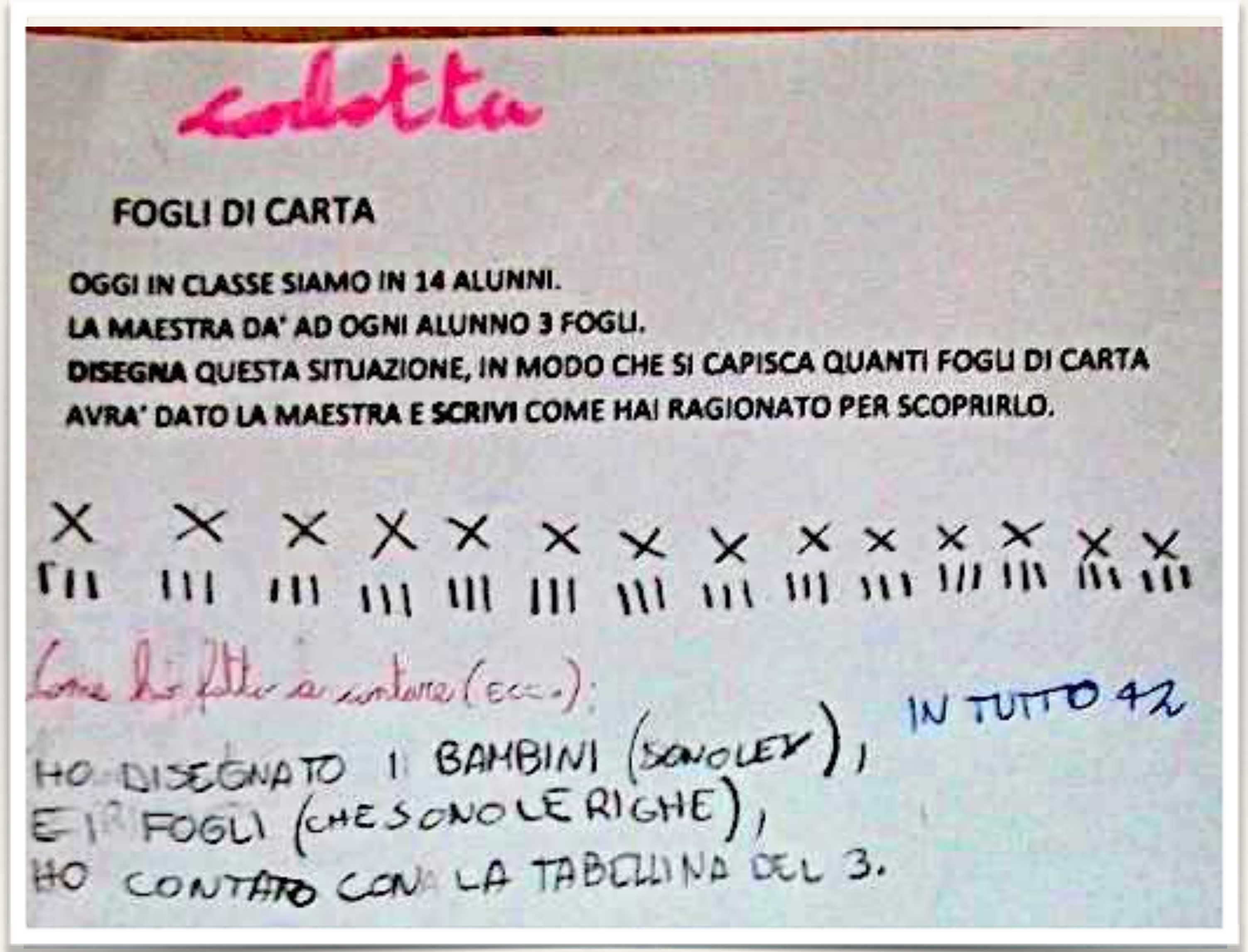
bambini	fogli
1	3
14	?

x14 x14

Questa è la rappresentazione che usa **Vergnaud**, non sto dicendo che "dando" ai bambini questa rappresentazione, invece di partire da quelle spontanee, il problema venga risolto con più facilità… dobbiamo però **costruire con loro i significati** che la tabella evidenzia rendendo **esplicito** il legame tra i 4 valori.

Che cosa fanno i bambini

- Come far prendere coscienza di questo fatto ai bambini? Siamo in seconda.
- Carlotta **rappresenta la relazione** tra alunni e fogli, usa crocette per gli alunni e aste per i fogli mettendo in evidenza che la relazione è di **1 a 3 con la sua rappresentazione**



FOGLI DI CARTA

OGGI IN CLASSE SIAMO IN 14 ALUNNI.
LA MAESTRA DA' AD OGNI ALUNNO 3 FOGLI.
DISEGNA QUESTA SITUAZIONE, IN MODO CHE SI CAPISCA QUANTI FOGLI DI CARTA AVRA' DATO LA MAESTRA E SCRIVI COME HAI RAGIONATO PER SCOPRIRLO.

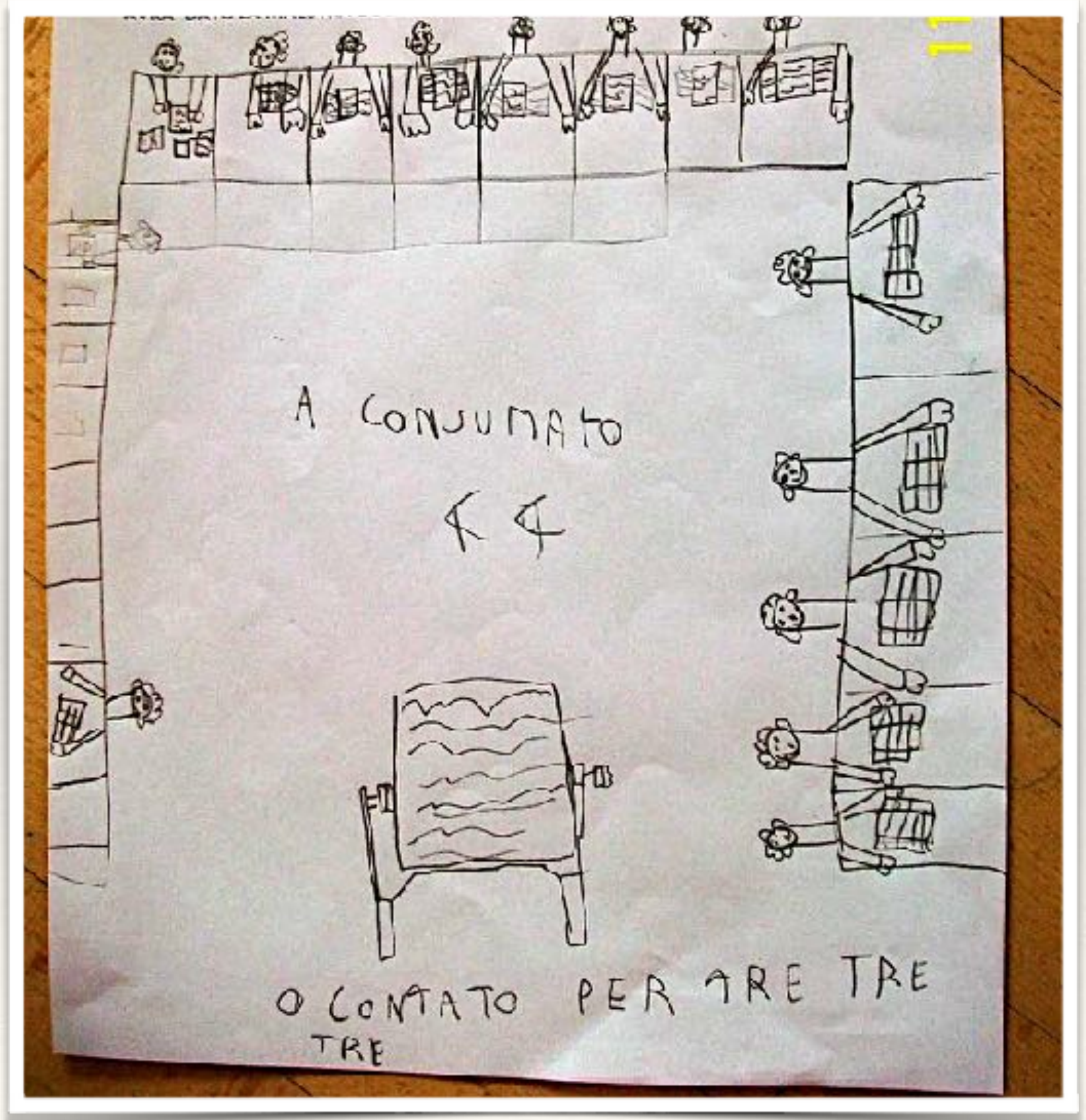
IN TUTTO 42

HO DISEGNATO I BAMBINI (SONO LE X), E I FOGLI (CHE SONO LE RIGHE), HO CONTATO CON LA TABELLINA DEL 3.

- Conta la tabellina del 3, andando oltre il 30, e arriva al risultato corretto.

Che cosa fanno i bambini

- Andrea disegna fogli e bambini e scrive: "A consumato 44... O contato per tre tre tre"
- Evidentemente perde il conto e sbaglia di due ma ha capito che cosa deve fare.
- Anche Andrea mette in evidenza la relazione ma in modo diverso. Il contenuto di informazione però è lo stesso.



- La tabella si può prolungare all'infinito e questo ci permette di considerare tutte le infinite situazioni che potrebbero essere rappresentate in quel modo.

- Possiamo quindi **generalizzare** la situazione, decontestualizzarla e spostare il ragionamento **solo più sulla relazione tra i numeri** trovando la regola che consente di passare da sinistra a destra nella tabella.

- Si passa dal ragionare per **colonne** al ragionare per **righe** e quindi alla **"funzione" y = 3 x**

x 3

cioccolatini (x)	euro (y)
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	21
8	24
9	27
10	30
11	33
12	36
13	39
14	42
.....	.....

Il futuro della moltiplicazione

- Dalla scuola media in poi la moltiplicazione diventa qualcosa di molto diverso da ciò che viene acquisito nella scuola primaria. Il segnale più evidente di questo cambiamento è la scomparsa del segno **X.**

- Il problema quindi è **come preparare** i bambini a fare quel difficile passaggio da:

operazione binaria (3,4) —-> 12 che genera 3 x 4 = 12

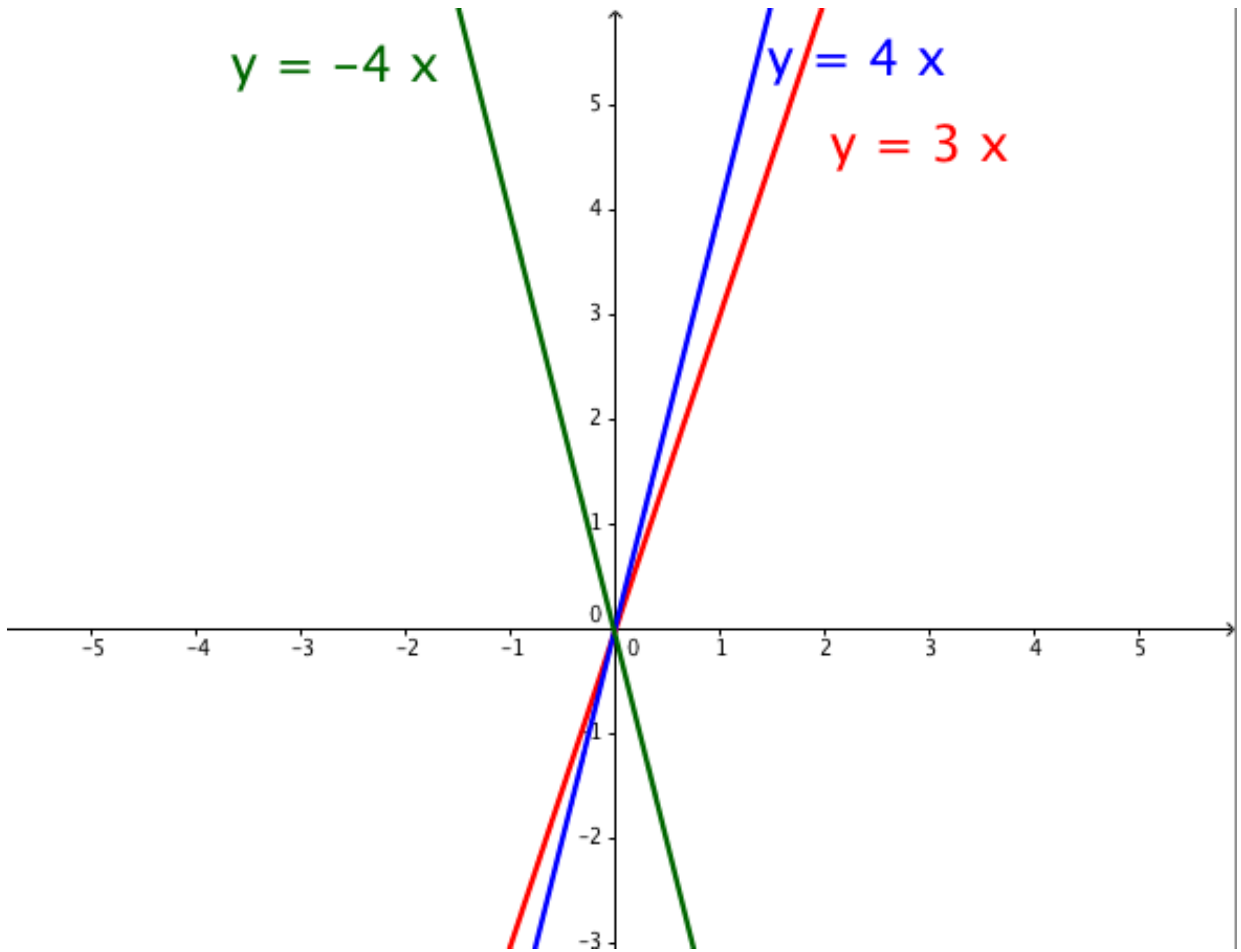
a

funzione y=4 x

In quest’ultima scrittura non c’è più una moltiplicazione specifica ma la moltiplicazione per 4 di qualsiasi numero.

Tutto ciò ci porta verso **proporzionalità** per cui Geogebra ci offre strumenti importanti come la possibilità di rappresentare queste situazioni con una serie di punti allineati che danno origine ad una **retta**.

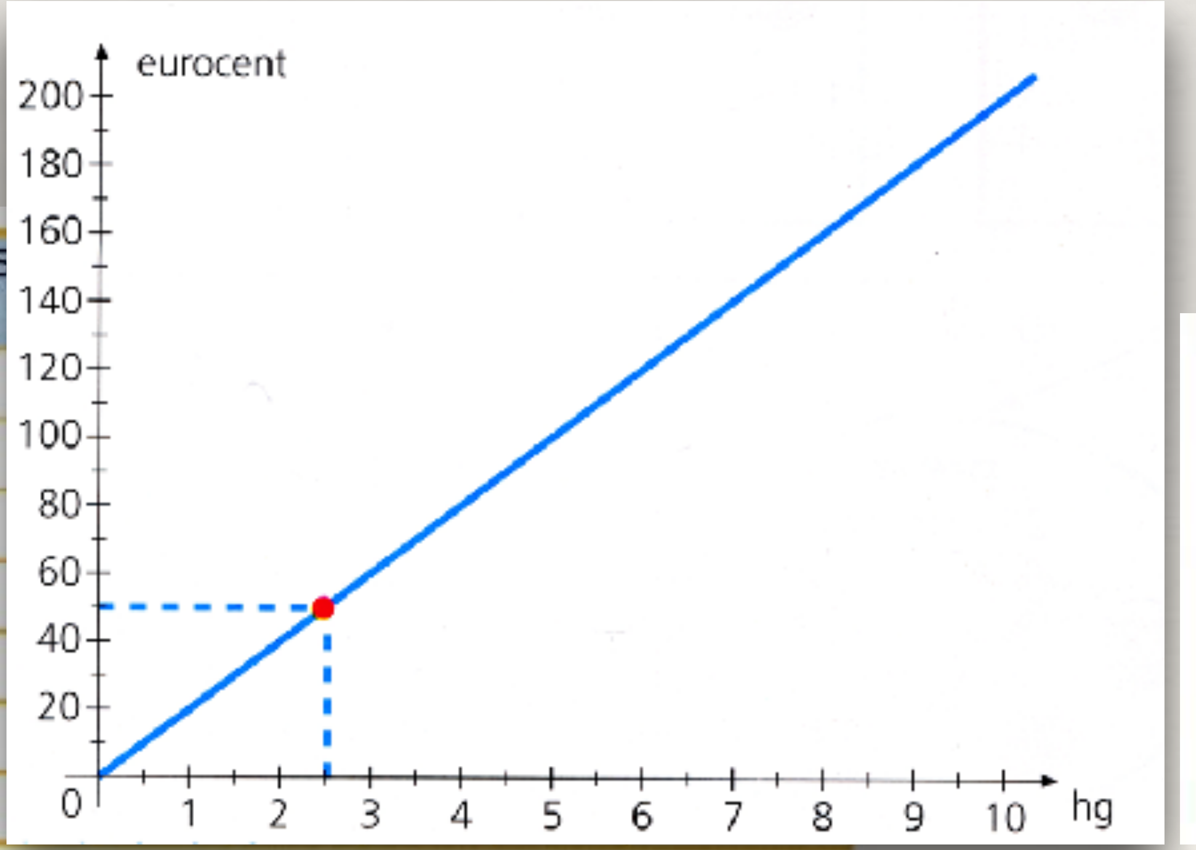
Si apre un mondo



Il cerchio si chiude…

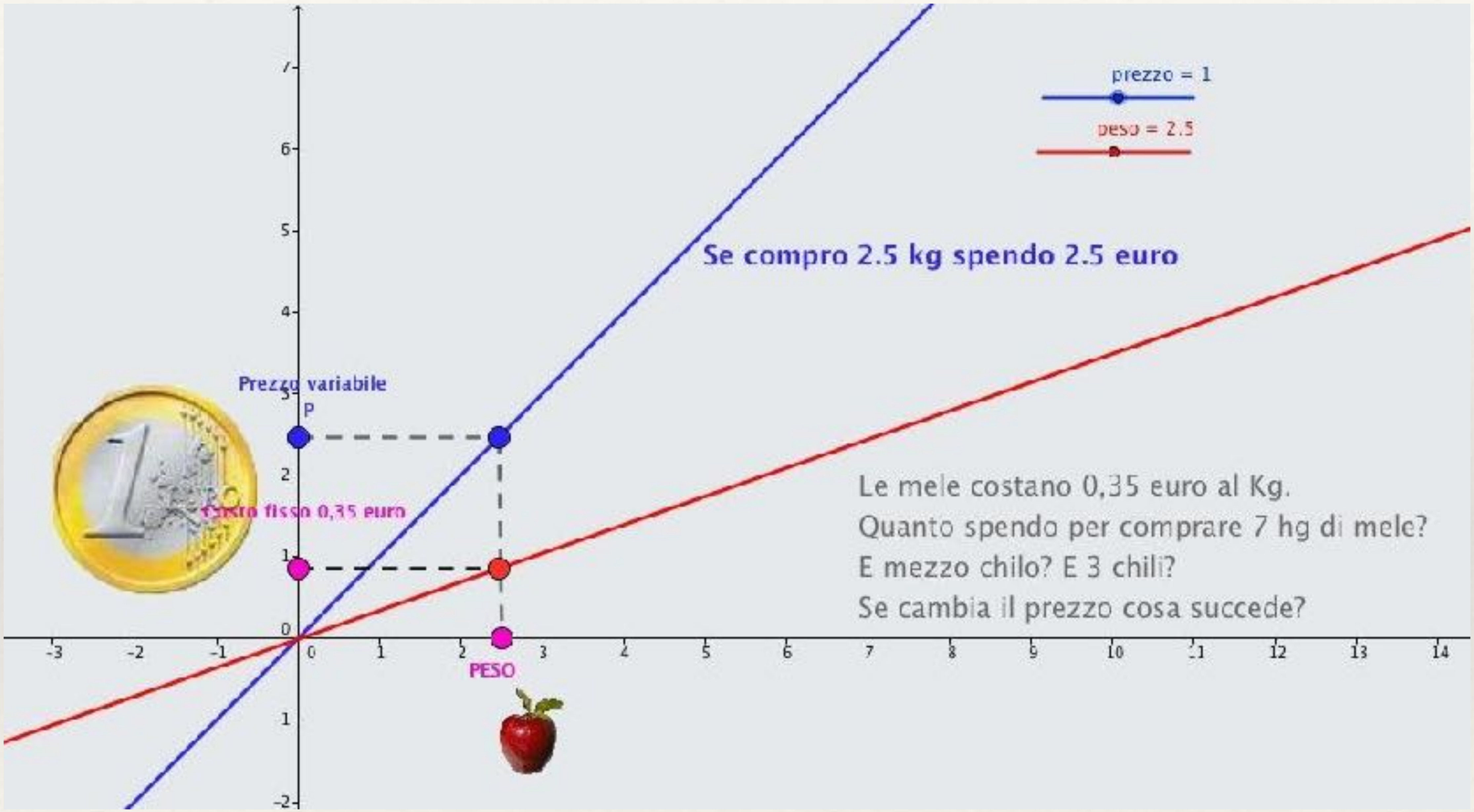
Situazioni diverse danno origine a grafici diversi, ma, se i punti sono allineati, **le due grandezze sono proporzionali** quindi se conosco il valore di una posso ricavare l’altra oppure conoscendo il valore di entrambe posso risalire al tipo di relazione che le lega. Da qui nascono tutti i problemi moltiplicativi diretti e inversi.

merce	1 hg	2 hg	3 hg	4 hg
zucchero	10	20	30	40
burro	40	80		
patate	5			
caffè	75			
pasta	15			
farina	7			
pane	20			



peso	prezzo
2 hg e mezzo	
6,5 hg	
2 kg	
3 kg e 4 hg	
2,7 kg	

Il cerchio si chiude…



Che cosa ci offre in più la tecnologia? La variabilità e quindi la generalizzazione

PROPOSTA DI LAVORO

- Progettare un'attività sul numero, sulle strutture additive o sulle strutture moltiplicative per la propria classe e condividerla nel gruppo tramite la piattaforma.
- Discutere la proposta e metterla a punto in modo che sia coerente con l'impostazione matematica del discorso (online).
- Sperimentarla nella propria classe e riportare nel gruppo i protocolli dei bambini per preparare insieme la discussione da fare in classe (da fare in presenza con i protocolli possibilmente già digitalizzati e inseriti in piattaforma per una maggiore fruibilità usando la LIM).
- Fare la discussione in classe e condividerla nel gruppo (online).
- Nell'incontro di novembre potremo quindi già condividere i primi protocolli degli allievi e preparare la discussione in classe.