IL NUMERO

"Lo sviluppo del concetto di numero dalla scuola dell'infanzia alla fine della scuola primaria. La ricerca 'dopo Piaget' e le ricadute sulla didattica del numero."

Donatella Merlo NRD Torino

CHE COSA FAREMO OGGI

- Una **relazione** sul numero e sulle strutture additive con alcune indicazioni didattiche.
- Una **discussione** sui contenuti della relazione per individuare punti di contatto tra la proposta didattica che ne scaturisce e le pratiche didattiche dei componenti del gruppo.
- Una **proposta di lavoro**.

Data la scarsità del tempo a disposizione alcuni temi sono appena accennati.
In piattaforma troverete poi materiali di approfondimento per chi lo desidera.

CHE COSA DICE LA MATEMATICA: IL NUMERO NATURALE

- Per la matematica ci sono tanti insiemi numerici, non solo quello dei numeri naturali, e ognuno di essi si costruisce a partire da esigenze di tipo diverso.
- I **numeri naturali** sono i primi numeri "inventati" dall'uomo e nascono da esigenze pratiche legate alla vita quotidiana, servono per **controllare delle quantità.**
- Per i matematici un numero naturale è una **classe di insiemi equipotenti** cioè ogni numero rappresenta tutti gli infiniti insiemi che hanno la stessa "numerosità".
- Una classe si costruisce a partire da una **relazione di equivalenza.** Questo tipo di relazione gode di tre **proprietà** che la caratterizzano: **riflessiva, simmetrica e transitiva**.
- Un numero naturale possiamo quindi vederlo come una specie di "sintesi" di tutti i possibili insiemi che si potrebbero costruire o pensare con quella determinata numerosità.

QUAL È IL PROBLEMA

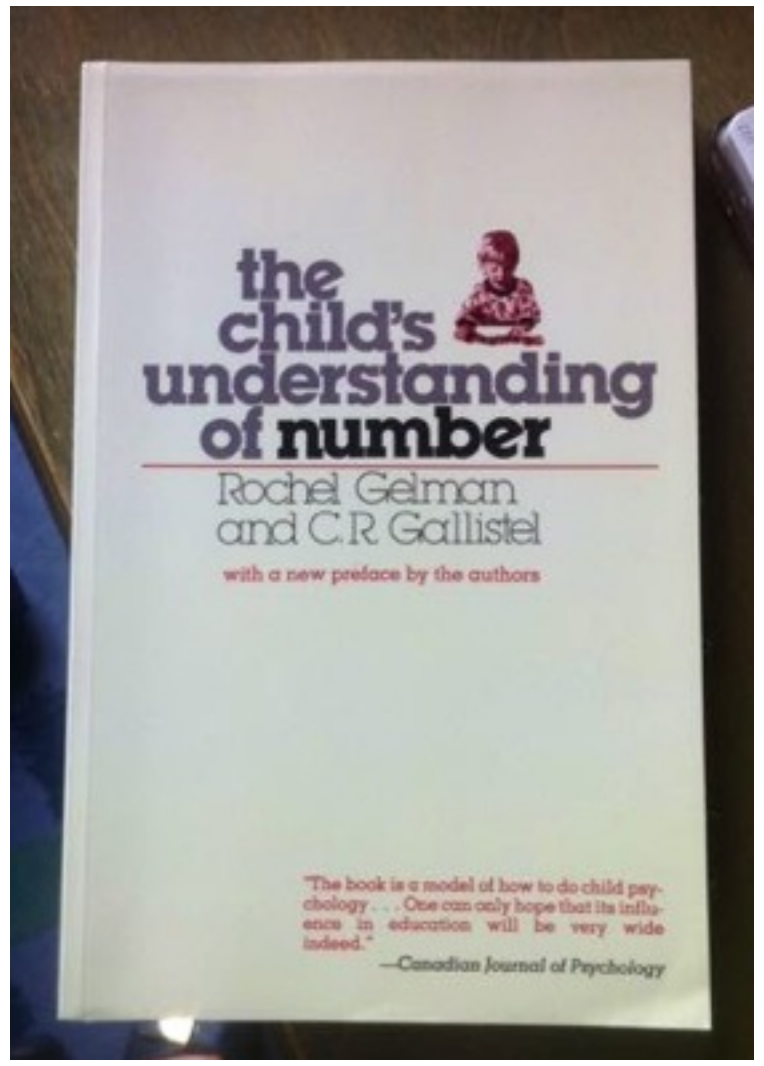
- Questo modo di intendere i numeri naturali è del tutto **astratto** ed è quindi necessariamente un **punto di arrivo**.
- L'insiemistica come metodo di approccio alla matematica prendeva questa astrazione come **punto di partenza** per la costruzione del concetto di numero con i bambini di 6 anni facendo riferimento alle **teorie di Piaget** per cui la struttura della matematica doveva **combaciare** in modo quasi automatico con le nostre **strutture mentali** e quindi questo modo di procedere avrebbe dovuto facilitare anche l'apprendimento da parte dei bambini.
- **Classe=classificazione** in base ad una relazione di equivalenza e quindi i giochi di classificazione come punto di partenza per costruire il **concetto di numero cardinale**, le **relazioni di ordine** (complessissime) come punto di partenza per costruire **l'ordinamento dei numeri naturali** (che invece si sviluppa molto più semplicemente a partire dalla funzione "successore di")

QUAL È IL PROBLEMA

- Le strutture matematiche sono considerate più semplici perché derivano da astrazioni che tolgono al concetto tutte le "complessità" generate dal loro uso nella vita pratica. Ma l'astrazione non è un dato, è il risultato di un **processo** che i bambini devono ripercorrere per potersene appropriare.
- Se il numero è una **classe di equivalenza di insiemi equipotenti** basta far costruire ai bambini tanti insiemi equipotenti per far capire il costrutto matematico del numero? Evidentemente no.
- Gli studi psicologici successivi hanno dimostrato, alla luce di nuove scoperte in molti ambiti tra cui quello delle neuro scienze, che **si apprende a partire da quello che si ha già in testa** quindi sono le strutture conoscitive che ciascuno di noi si costruisce attraverso l'esperienza di vita a formare la base per ogni successivo apprendimento.

IL RIBALTAMENTO

- Questo nuovo modo di vedere le cose ha portato a criticare anche le famose prove piagetiane sulla conservazione del numero perché il problema si poneva in tutt'altro modo.
- Tra i primi a criticare queste prove troviamo due psicologi americani R. Gelman e C. R. Gallistel che hanno scritto nel 1978 un testo diventato fondamentale per gli studi successivi sull'acquisizione del concetto di numero da parte dei bambini in età prescolare e scolare: **The child's understanding of number.**



- Fin dal primo capitolo G&G mettono l'accento su **ciò che i bambini sanno fare** e criticano quanti, rifacendosi ad esempio alle prove di conservazione della quantità, mettono l'accento su ciò che i bambini **"non" sanno fare**.
- Questo deve essere quindi il nuovo sguardo da applicare alle situazioni di apprendimento: cercare che cosa i bambini "sanno" fare.

I 5 PRINCIPI DI CONTEGGIO

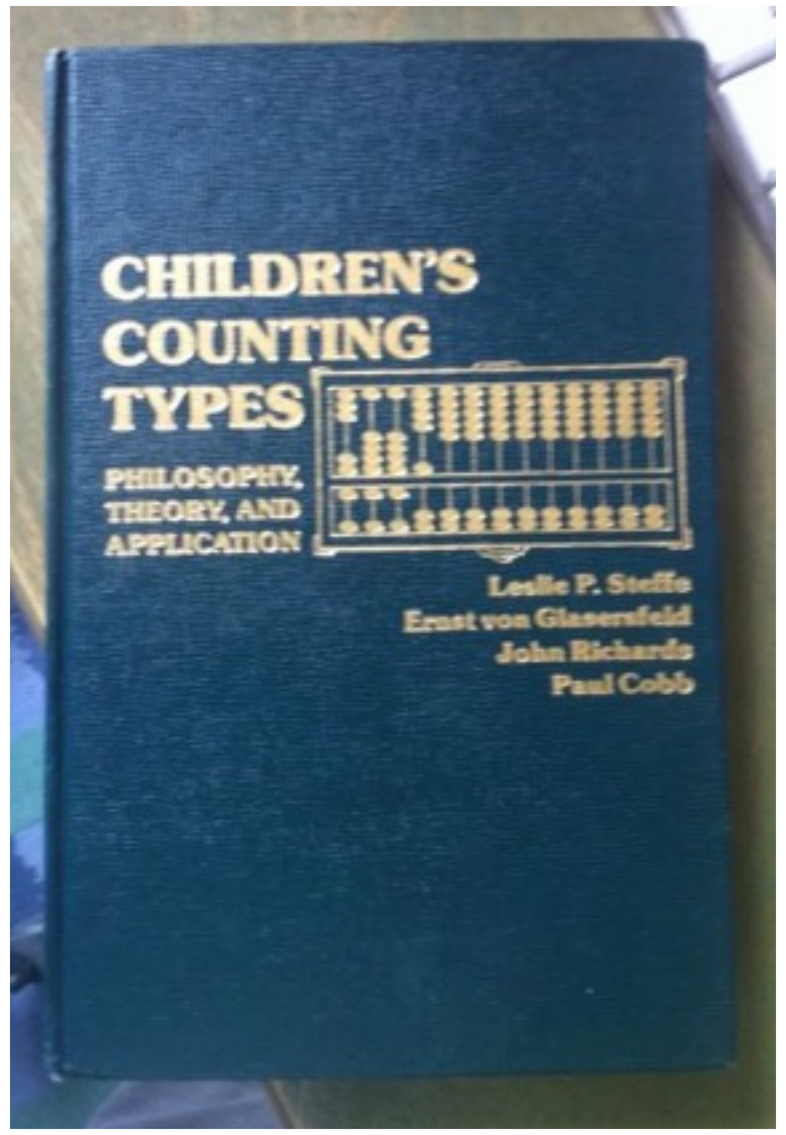
- Dall'osservazione dei bambini nasce quindi la loro teoria sui principi di conteggio che offre a noi un nuovo modo di impostare il discorso sul numero a partire da ciò che il bambino fa spontaneamente in mille occasioni fin da molto piccolo: **contare**.
- I 5 principi danno una descrizione di **come si sviluppa il concetto di numero a partire da attività di conteggio** per cui, ad un certo punto del loro percorso, i bambini sono in grado di dire: *questi oggetti sono 5*.
- Per giungere a dare senso a quella frase, i bambini devono aver superato tutta una serie di fasi, che i due psicologi descrivono nel loro testo supportandoli con delle prove.
- Ad un certo punto il bambino dice: **1, 2, 3, 4, 5, …. 5.** Questo 5, ripetuto al termine di un conteggio, indica, secondo i due psicologi, la presa di coscienza del fatto che **l'ultimo numero di un conteggio esprime la cardinalità dell'insieme**.
- Passaggi successivi portano poi il bambino a raggiungere quell'astrazione per cui il 5 e qualsiasi altro numero può essere associato in quel modo a **qualsiasi entità si consideri contabile**.

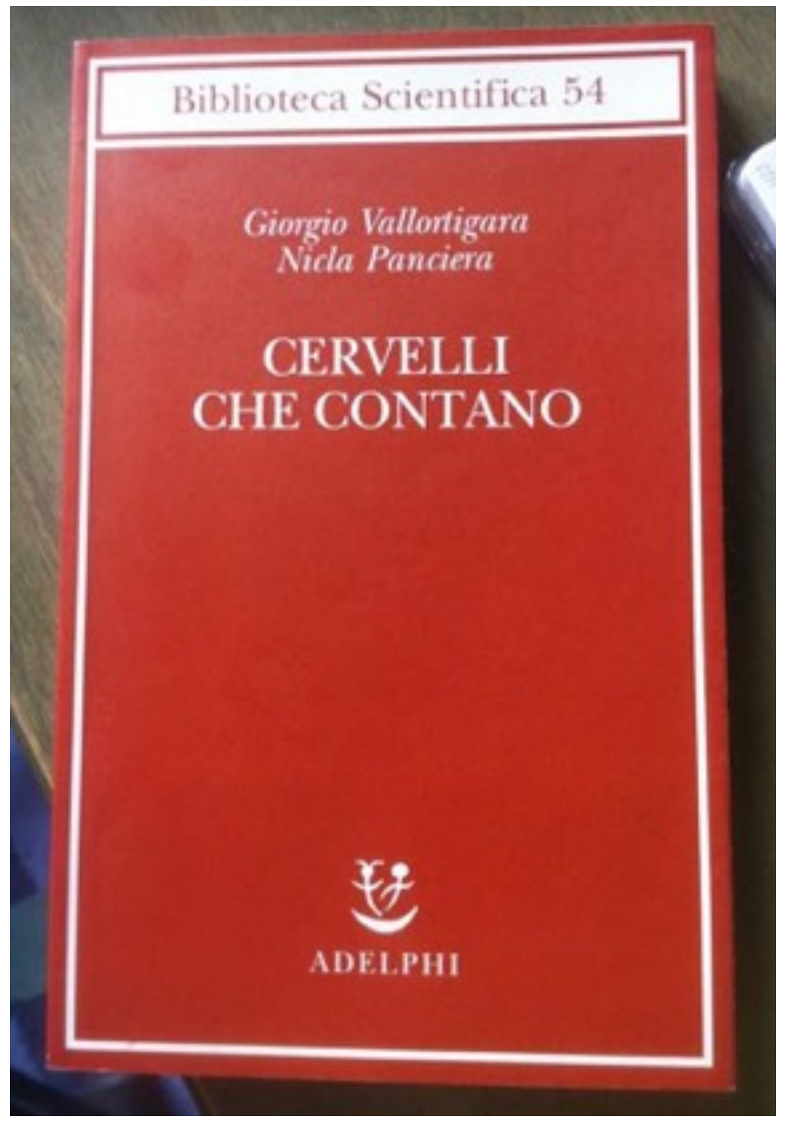
I 5 PRINCIPI DI CONTEGGIO

- Il modello di G&G si basa su 5 principi:
  1. **Principio uno-uno**
  2. **Principio dell’ordine stabile**
  3. **Principio di cardinalità**
  4. **Principio di astrazione**
  5. **Principio di irrilevanza dell’ordine**
- A ciascuno di questi principi corrispondono **possibili errori** che i bambini correggono via via anche da soli ma su cui la scuola si deve interrogare.
- Qual è il rischio se non lo si fa? Classificare come **incapaci** bambini che hanno solo **difficoltà con alcuni di questi principi** ad esempio non riescono ancora a sincronizzare parole con gesti nel contare e quindi alla fine non producono un numero esatto (errori nell’applicazione del principio uno-uno).

PERCEPTUAL UNITS

- Steffe, von Glaserfeld, Richards, Cobb, **Children’s Counting Types (1983)**: gli autori si soffermano sul fatto che per contare occorre avere coscienza delle ‘unità’ da contare quelle che gli autori chiamano “perceptual units” (unità percettive) altrimenti non si sa a che cosa applicare i principi di conteggio.
- La semplice **recita della filastrocca** numerica non costituisce conteggio. Per qualificarla come atto di conteggio, la recitazione di ciascun numero della sequenza deve essere accompagnata almeno da una **momentanea presa di coscienza dell’esistenza di una unità individuale** a cui la parola possa essere associata.
- Ciò indica nel **processo di discretizzazione** del reale, percepito come un continuo, un passaggio fondamentale per costruire il concetto di numero naturale.

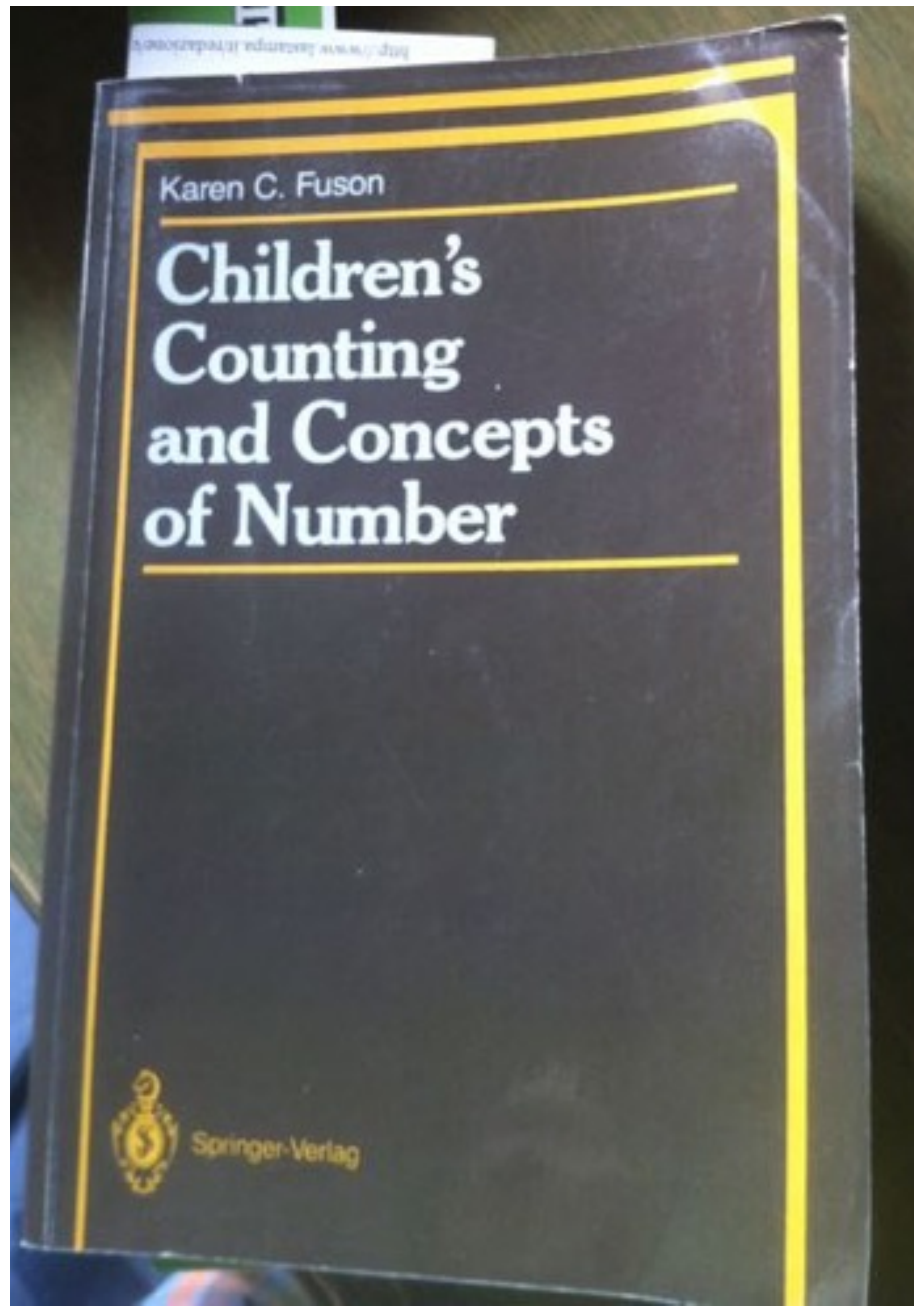




TEORIA DEI CONTESTI DIVERSI

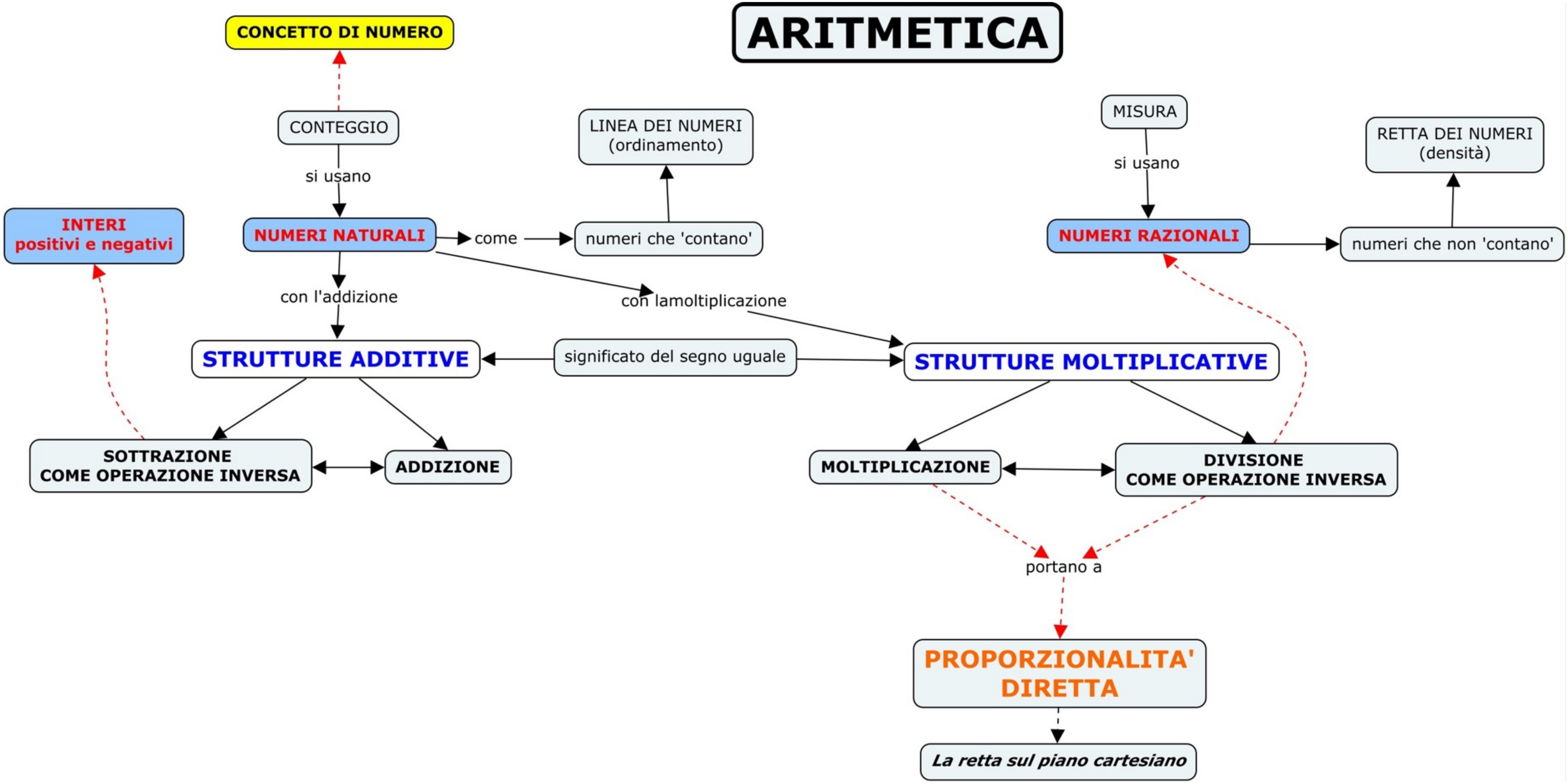
- K. Fuson, **Children's Counting and Concepts of Number (1988)**: qui è significativo il plurale del termine "concepts" perché la Fuson ha descritto in modo dettagliato **i diversi usi del numero** che il bambino fa dalla nascita fino all'età scolare e a ciascuno di essi corrisponde una diversa concettualizzazione del numero stesso.
- Secondo questa autrice coesistono tanti diversi significati di numero nelle **parole-numero** (number words) che il bambino tiene sotto controllo basandosi sul contesto in cui le usa.

1. **Usi cardinali**
2. **Usi ordinali**
3. **Usi come misura**
4. **Usi come sequenza (senza oggetti di riferimento)**
5. **Usi come conteggio**
6. **Usi come simbolo**
7. **Usi non numerici (etichette)**



QUALE DIDATTICA DEL NUMERO NATURALE?

- Il **conteggio** come punto di partenza e il consolidamento dei 5 principi come strumento per arrivare alla cardinalità in tutta la sua astrazione (e tornare alla matematica)
- L'ordine dei numeri sulla **linea**: i numeri che "contano"
- La **discretizzazione del continuo** per poter individuare elementi da "contare"
- La differenza tra "**contare**" e "**misurare**": come si costruiscono le "unità" per misurare e che numeri servono, i **numeri che "non contano"**
- I numeri sulla **retta numerica**
- La **scrittura** del numero
- Le **strutture additive e moltiplicative**: le operazioni con i numeri


ARITMETICA
CONCETTO DI NUMERO
CONTEGGIO
si usano
LINEA DEI NUMERI (ordinamento)
MISURA
si usano
RETTA DEI NUMERI (densità)
INTERI positivi e negativi
NUMERI NATURALI
come
numeri che 'contano'
NUMERI RAZIONALI
numeri che non 'contano'
con l'addizione
con lamoltiplicazione
STRUTTURE ADDITIVE
significato del segno uguale
STRUTTURE MOLTIPLICATIVE
SOTTRAZIONE COME OPERAZIONE INVERSA
ADDIZIONE
MOLTIPLICAZIONE
DIVISIONE COME OPERAZIONE INVERSA
portano a
PROPORZIONALITA' DIRETTA
La retta sul piano cartesiano

INTERVISTA AI BAMBINI SUI NUMERI…

- Che cosa sono i numeri?
- Dove sono? Dove li vedi? Chi li usa?
- A che cosa servono?
- *Quanti sono i numeri?
- *Chi li ha inventati?
- *Qual è il numero più grande che conosci?
- *Qual è il numero più piccolo che conosci?
- *Chi è più grande tra questi numeri: 3 o 5?

….E SUL CONTARE

- Che cosa vuol dire contare?
- Perché si conta?
- Fino a quanto si può contare?
- Come si fa a contare?
- Che cosa si può contare?
- Che cosa non si può contare?
- Come si fa a contare quello che non si può contare?

IL CONTEGGIO DALLA PRIMA ALLA QUINTA: L'EVOLUZIONE DEL CONTARE

- **Numeri che "contano" e numeri che "non contano"**: che cosa si può contare, la storia dei 3 porcellini e la retta numerica (in prima)
- Attività di **conteggio di collezioni** con l'applicazione dei 5 principi, uso di **segnature** e di forme di **organizzazione spaziale** della collezioni da contare (in prima e seconda)
- **Lettura e scrittura del numero** (la regola ricorsiva dei nomi di numero, differenza tra cifra e numero, il valore posizionale delle cifre): giochi con la pascalina e l'abaco orizzontale (dalla seconda in poi)
- **Quanto è grande 100… 1000…** (in seconda e terza) per ragionare sugli ordini di grandezza
- I **numeri grandi** e la scrittura polinomiale del numero: i chicchi di riso

CHE COSA DICE LA MATEMATICA: LE STRUTTURE ADDITIVE

- Usando i numeri naturali si vede subito che, quando si opera con essi ad esempio aggiungendo o togliendo quantità, succedono cose particolari.
- L'operazione di addizione **struttura** l'insieme dei numeri naturali in un modo che dipende dalla caratteristiche dell'operazione di addizione, dalla sue proprietà.
- Aggiungere mi porta a costruire numeri sempre più grandi che si possono immaginare generati da un continuo "aggiungere 1": questo processo, come sappiamo, non ha una fine. Di questo sono consapevoli anche bambini molto piccoli.
- Togliere è il contrario di aggiungere e questo mi porta a ragionare non solo sull'addizione ma anche sulla sua inversa, la sottrazione.

LA TABELLA DELLA SOTTRAZIONE

–	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0										
1	1	0									
2	2	1	0								
3	3	2	1	0							
4	4	3	2	1	0						
5	5	4	3	2	1	0					
6	6	5	4	3	2	1	0				
7	7	6	5	4	3	2	1	0			
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

- Che problemi ci pone questa tabella?
- Il risultato 1 è dato da tante sottrazioni diverse, così tutti gli altri: perché?
- Una parte della tabella è vuota: come mai?
- Come risolvere problemi del tipo 1-5?

CHE COSA DICE LA MATEMATICA: LE STRUTTURE ADDITIVE

- La sottrazione come inversa dell'addizione mi porta a scoprire qualcosa di nuovo: ad esempio che se voglio togliere più di quanto ho non riesco più ad esprimere questo fatto con uno dei numeri che ho costruito prima. Mi serve qualcos'altro.
- Quando opero un **confronto additivo tra numeri naturali trovo sempre una differenza** che può essere positiva se il primo numero è maggiore del secondo o negativa nel caso contrario.
- Come si può esprimere questo confronto? Inventando dei numeri di tipo diverso e costruendo altre **classi di equivalenza formate da coppie ordinate di numeri.**
- In questo caso non guardo più alle quantità ma ad un confronto di quantità.
- Metto quindi nella stessa classe tutte le coppie di numeri che mi danno la **stessa differenza** (3,4) sta con (5,6) ma anche con (1500, 1501) e danno origine al numero -1 che non è più un numero naturale proprio perché nasce da un **confronto** di due quantità non dal **conteggio** di una quantità.

QUALE DIDATTICA DELLE STRUTTURE ADDITIVE?

- Non separare addizione da sottrazione ma presentarle subito come **un'unica operazione** che può raccontare storie diverse e portare quindi a scritture diverse.
- Partire dai **significati intuitivi** di addizione (mettere insieme, aggiungere) e di sottrazione (togliere) e farli evolvere verso **nuovi significati** (differenza, quanto manca a...) da **2 + 3 = 5** a **2 + ... = 5** a **5 - 2 = ...**
- Lavorare su **tutti i significati dell'addizione e della sottrazione** giocando con i bambini a trasformare un problema in un altro.
- Il significato dell' **"uguale"** come "uguaglianza" tra due termini che devono essere intercambiabili

Metto insieme

n.			
	CAMBIO		
	UNIONE	SEPARAZIONE	
1	Aldo aveva 5 biglie. Bianca gliene dà ancora 8. Quante biglie ha Aldo in tutto? a + b = ?	Aldo aveva 13 biglie. Ne dà 8 a Bianca. Quante gliene restano? a – b = ?	2
3	Aldo ha 5 biglie. Quante gliene deve dare Bianca perché ne abbia in tutto 13? a + ? = c	Aldo aveva 13 biglie. Ne dà alcune a Bianca. Ora ne ha 5. Quante ne ha date a Bianca? a - ? = c	4
5	Aldo aveva alcune biglie. Bianca gliene ha date 8 e ora Aldo ne ha 13. Quante ne aveva all'inizio? ? + b = c	Aldo aveva alcune biglie. Ne ha date 8 a Bianca e ora ne ha 5. Quante ne aveva all'inizio? ? – b = c	6
	COMBINAZIONE		
7	Carlo ha 5 biglie arancio e 8 blu. Quante ne ha in tutto? a + b = ?	Carlo ha 13 biglie di cui 5 arancio e le altre blu (ovvero 8 blu e le altre arancio). Quante sono le biglie blu (arancio)? a + ? = c ? + b = c	8
	CONFRONTO		
9	Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5. Quante biglie ha Bianca più di Aldo? a + ? = b	Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5. Quante biglie ha Aldo meno di Bianca? b – ? = a	10
11	Aldo ha 5 biglie. Bianca ne ha 8 più di lui. Quante biglie ha Bianca? a + c = ?	Aldo ha 5 biglie, 8 in meno di Bianca. Quante biglie ha Bianca? ? – c = a	12
13	Bianca ha 13 biglie, 5 in più di Aldo. Quante biglie ha Aldo? ? + c = b	Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5 di meno. Quante biglie ha Aldo? b – c = ?	14
	UGUAGLIANZA		
	...biglie. Aldo ne ha 5. ...re Aldo per averne	Bianca ha 13 biglie. Aldo ne ha 5. Quante ne deve perdere Bianca per averne tante quante Aldo? b - ? = a	16

Classificazione dei problemi additivi di Moser

DUE PROPOSTE DIDATTICHE GIÀ SPERIMENTATE PER PRIMA E SECONDA

- La prima si chiama **"Il mondo di Quark"** e consiste in un gioco da fare in prima in cui i bambini simulano il comportamento di alcuni robot che hanno il compito di raccogliere e selezionare palline per poi consegnarle ad un magazzino dove tutto viene registrato con un linguaggio particolare che si scoprirà poi essere quello della matematica.
- Il momento centrale dell'attività è la costruzione di una **macchina conta-palline** che mette subito in relazione l'esperienza di gioco con la scrittura matematica dell'addizione e poi della sottrazione. Da qui partono poi tante attività che consentono ai bambini di fare esperienza con operazioni dirette e inverse in modo abbastanza accattivante.
- Si arriva a questa attività dopo aver già fatto esperienze con successioni del tipo +1… +2… +3 … -1 … -2 … -3 in contesti di gioco e con le filastrocche.
- In seconda l'attività centrale è la realizzazione di un "M**ercatino delle pulci"** in classe costruendo con i bambini tutti gli strumenti necessari: il denaro, i cartellini con i prezzi e gli scontrini.

QUALCOSA DA SPERIMENTARE A PARTIRE DALLA PRIMA PER ARRIVARE A…

➤ LE SUCCESSIONI CON I CUBETTI E POI CON I NUMERI

DA UN LAVORO DI FRANCESCA FERRARA E KETTY SAVIOLI

Proviamo a dire come si passa da una posizione all'altra della sequenza **e poi** la regola generale che ci permette di dire subito, conoscendo la posizione, come sarà la nuova costruzione senza vederla.

Edifici di cubetti ($2n+1$)

$$n=[(n+1)-1]$$

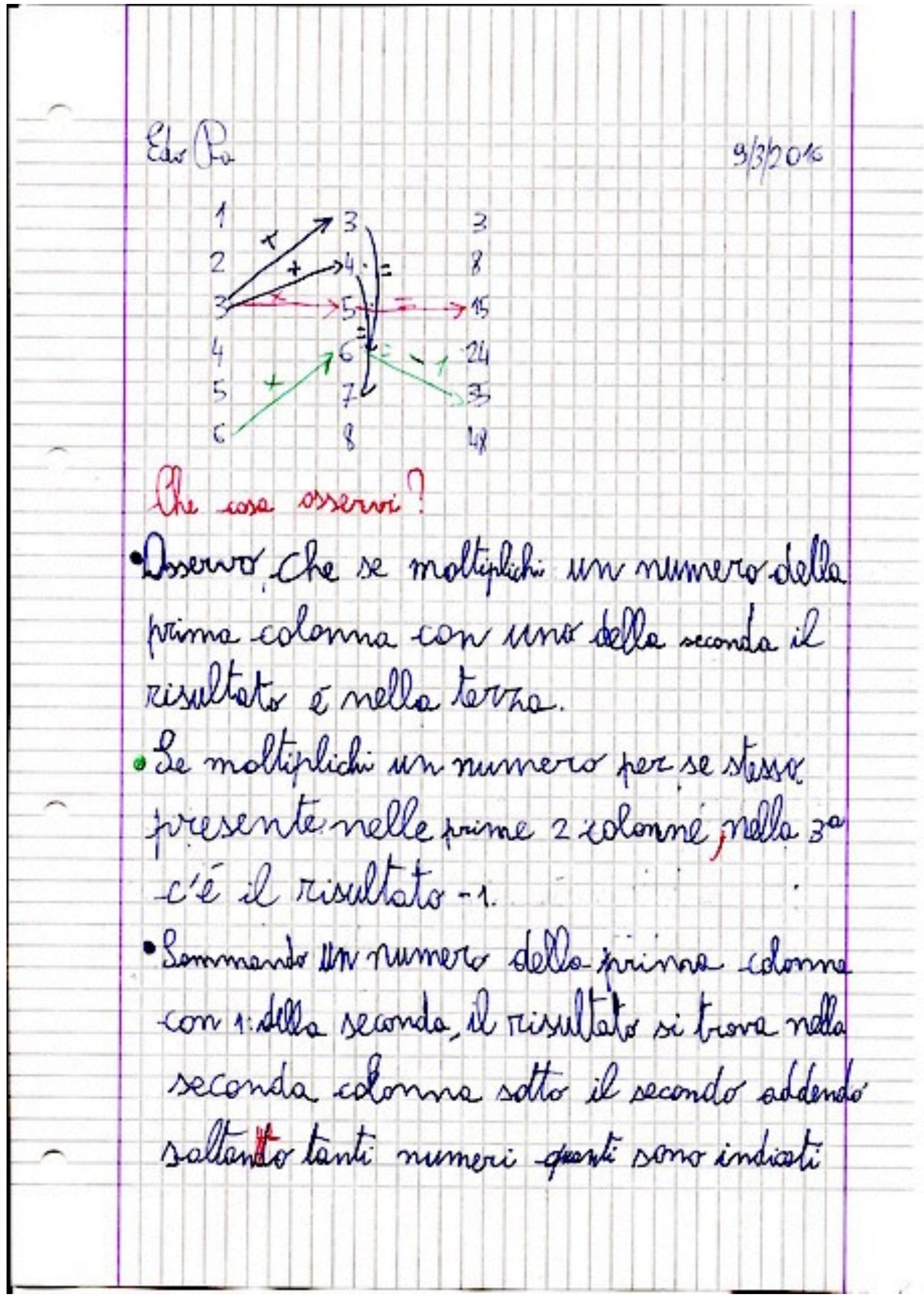
Lara

"Il numero di cubetti che sta sopra è sempre uguale al numero di cubetti che sta sotto meno uno"

QUALCOSA DA SPERIMENTARE DI NUOVO… LA TABELLA DI NUMERI

➤ RICERCA DI REGOLARITA' E POI… COME SAREBBE SE…

DA UN LAVORO DI ROMINA MEYTRE (IV) E PAOLA SGARAVATTO (V)

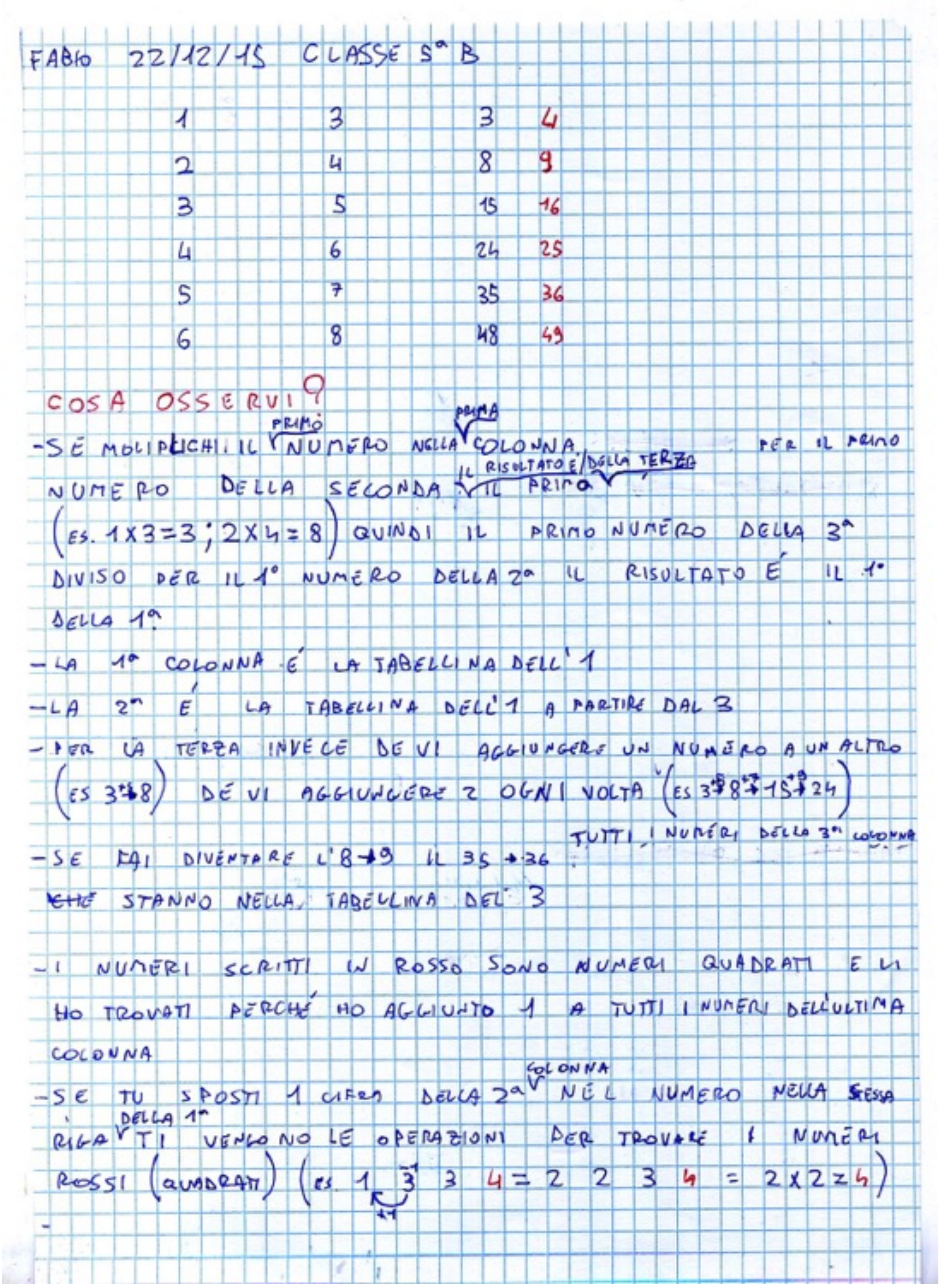


Edo Po 9/3/2016

1	3	3
2	4	8
3	5	15
4	6	24
5	7	35
6	8	48

Che cosa osservi?

- Osservo che se moltiplichi un numero della prima colonna con uno della seconda il risultato è nella terza.
- Se moltiplichi un numero per se stesso presente nelle prime 2 colonne, nella 3ª c'è il risultato -1.
- Sommando un numero della prima colonna con 1 della seconda, il risultato si trova nella seconda colonna sotto il secondo addendo saltando tanti numeri quanti sono indicati



FABIO 22/12/15 CLASSE 5ª B

1	3	3	4
2	4	8	9
3	5	15	16
4	6	24	25
5	7	35	36
6	8	48	49

COSA OSSERVI?

-SE MOLTIPLICHI IL PRIMO NUMERO NELLA PRIMA COLONNA PER IL PRIMO NUMERO DELLA SECONDA IL RISULTATO È IL PRIMO DELLA TERZA (ES. 1X3=3; 2X4=8) QUINDI IL PRIMO NUMERO DELLA 3ª DIVISO PER IL 1° NUMERO DELLA 2ª IL RISULTATO É IL 1° DELLA 1ª

-LA 1ª COLONNA É LA TABELLINA DELL'1

-LA 2ª É LA TABELLINA DELL'1 A PARTIRE DAL 3

-PER LA TERZA INVECE DEVI AGGIUNGERE UN NUMERO A UN ALTRO (ES 3+5 8) DEVI AGGIUNGERE 2 OGNI VOLTA (ES 3 +5 8 +7 15 +9 24)

-SE FAI DIVENTARE L'8 → 9 IL 35 → 36 TUTTI I NUMERI DELLA 3ª COLONNA ~~CHE~~ STANNO NELLA TABELLINA DEL 3

-I NUMERI SCRITTI IN ROSSO SONO NUMERI QUADRATI E LI HO TROVATI PERCHÉ HO AGGIUNTO 1 A TUTTI I NUMERI DELL'ULTIMA COLONNA

-SE TU SPOSTI 1 CIFRA DELLA 2ª COLONNA NEL NUMERO NELLA STESSA RIGA DELLA 1ª TI VENGONO LE OPERAZIONI PER TROVARE I NUMERI ROSSI (QUADRATI) (ES. 1 3 3 4 = 2 2 3 4 = 2 X 2 = 4)

-

UN PASSAGGIO CHE DI SOLITO NON SI FA… DALL'ASTRATTO AL CONCRETO

- Ragionare sui numeri e sul significato dell'operazione per ampliare il concetto ed entrare nella matematica: **se inverto i due numeri nell'addizione il risultato non cambia, ma se faccio la stessa cosa con la sottrazione sembra che non funzioni più. Perché?**
- Dare significato anche a cose come 3-4 cercando dei contesti che siano alla portata dei bambini anche senza arrivare a formalizzare i numeri negativi.
- Se voglio comprare un quaderno che costa 4 euro e ne ho solo 3 come faccio? Devo chiedere un "prestito", devo entrare in un contesto diverso in cui 3-4 abbia senso e pensare a come rappresentare il risultato che noi sappiamo essere -1.
- Mi servono quindi dei "nuovi numeri", li ho già nella mente **prima di sapere come si scrivono**, possono essere numeri con un segno che rappresenta il risultato di una differenza, un confronto…

ENTRIAMO NELLA MATEMATICA

- Ed ecco che ho utilizzato una semplice **deduzione logica** per arrivare a definire una situazione concreta nata da un'espressione costruita su un gioco matematico e questo mi ha consentito di costruire nuovi oggetti matematici.
- Questo è il **gioco della matematica**, sono le sue regole, ciò che costruisco a partire dall'esperienza concreta diventa poi **strumento** per costruire "cose" che possono anche non avere nessun collegamento immediato con la realtà, ma non per questo avere meno valore.
- Questo é il senso del "fare matematica", la costruzione della **mathematical literacy**, la cultura matematica… quindi cominciamo a porci qualche problema.

FINE

PROPOSTA DI LAVORO

- Progettare un’attività sul numero, sulle strutture additive o, dopo il prossimo incontro, sulle strutture moltiplicative per la propria classe e condividerla nel gruppo tramite la piattaforma.
- Discutere la proposta e metterla a punto in modo che sia coerente con l’impostazione matematica del discorso (online).
- Sperimentarla nella propria classe e riportare nel gruppo i protocolli dei bambini per preparare insieme la discussione da fare in classe (da fare in presenza con i protocolli possibilmente già digitalizzati e inseriti in piattaforma per una maggiore fruibilità usando la LIM).
- Fare la discussione in classe e condividerla nel gruppo (online).

PUBBLICITÀ

- Uscirà a ottobre nei Quaderni di CE il libro “Facciamo geometria” riedizione del vecchio testo di Giuseppina Marastoni a cui ho collaborato.
- Troverete sul sito MCE la scheda di presentazione.