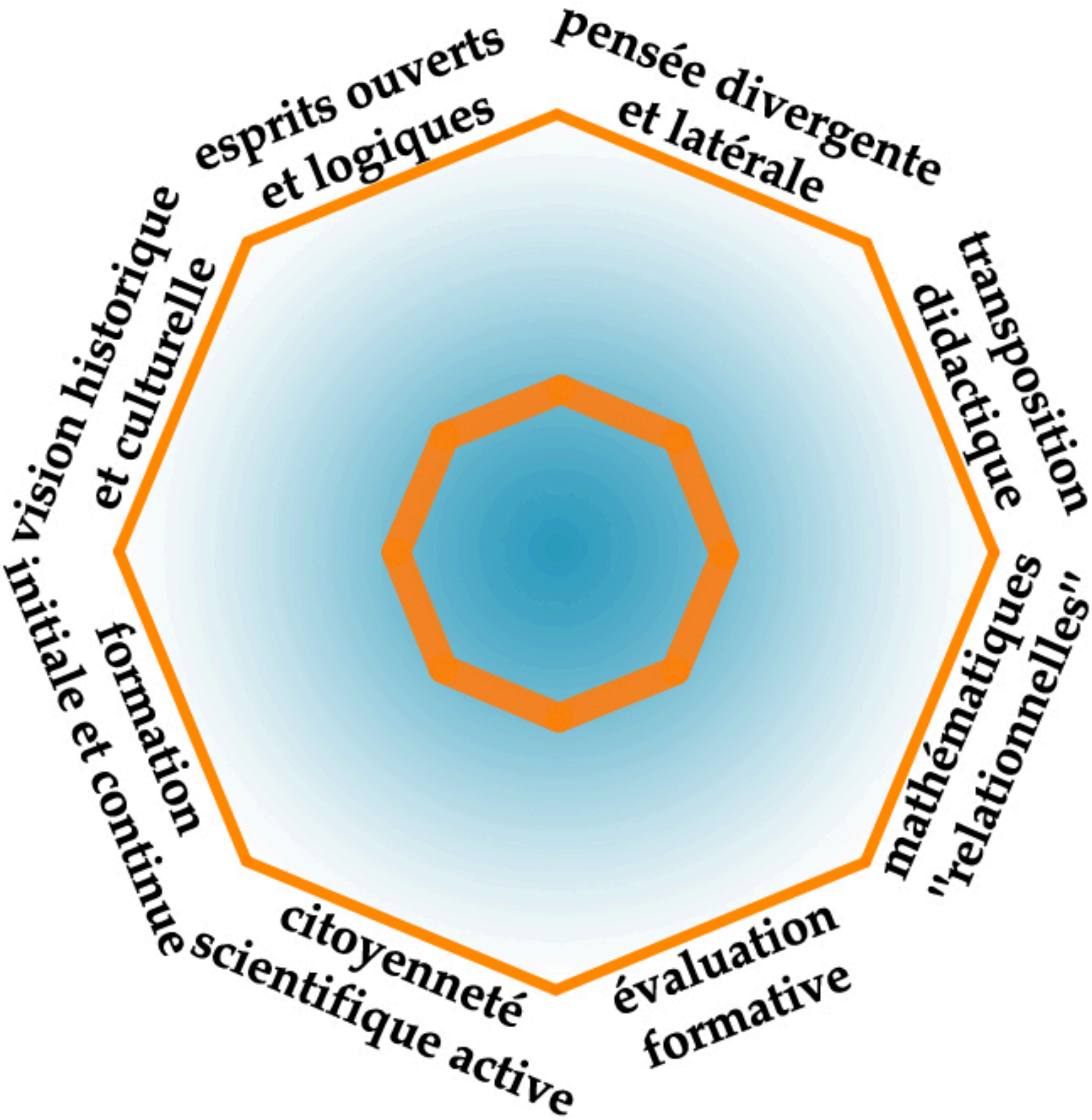
MANIFESTE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Pour une utilisation consciente, démocratique et formative de la pensée mathématique et de ses outils en dialogue avec "Indicazioni Nazionali e nuovi scenari" (2018)

Juin 2020



Pourquoi un Manifeste sur l'enseignement des mathématiques?

Pour que les étudiants de tous les niveaux d'éducation puissent:

- utiliser des outils mathématiques pour interpréter la réalité et avoir une conscience critique des données réelles et perçues;
- construire activement leurs propres structures cognitives comme élément de citoyenneté active et promouvoir une attitude expérimentale afin de surmonter le désintérêt pour la connaissance et la méfiance à l'égard de tout ce qui intervient dans les mathématiques.

Pour que les enseignants:

- développent une passion et un intérêt pour la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ;
- expérimentent des réponses collégiales, des échanges de pratiques et des problèmes de sens ;
- ne se contentent pas de solutions faciles et préétablies, mais redécouvrent et améliorent leurs compétences en matière de capacité d'étudier et d'enseigner.

Ce manifeste est destiné aux enseignants, aux directeurs d'école, aux formateurs d'enseignants, aux parents, aux groupes de recherche pédagogique et disciplinaire, aux étudiants et aux chercheurs.
Le document ministériel “Indicazioni nazionali e nuovi scenari” où la "pensée mathématique" figure parmi les "outils culturels pour la citoyenneté", ainsi que ce document, est un point de départ pour la discussion dans les groupes de recherche en mathématiques du MCE.

N'oubliez pas cela:

- même dans l'apprentissage des mathématiques, il y a des différences de sexe, de rythme, de temps d'apprentissage et des différences culturelles ;
- les mathématiques constituent un obstacle pour beaucoup de gens dès leur plus jeune âge et deviennent un instrument de sélection et de différenciation scolaire et sociale dans le choix des filières scolaires.

A travers la campagne "**4 étapes pour une Pédagogie de l'émancipation**", le Mouvement de Coopération Educative indique et promeut des pratiques réalisables en accord avec ce que propose ce Manifeste.

Objectifs et stratégies d’enseignement

1

Promouvoir une **vision historique et culturelle** des mathématiques, qui renforce leur fonction d'instruments de connaissance et d'organisation de la réalité, à l'intérieur et à l'extérieur de l'école, en tenant compte des cultures d'origine des élèves.

a) Préparation de **contextes significatifs et motivants** (1), en évitant les situations artificielles qui n'ont de sens que pour le professeur et non pour les élèves, dans leur stade d'évolution, dans leur sexe, dans leur culture.
b) Prise en charge du **passage du langage naturel au langage mathématique** (2) avec un travail systématique sur les mots et les symboles et leurs significations techniques, dans le domaine sémantique des mathématiques, pour les utiliser de manière consciente dans une démonstration, dans une définition, dans une argumentation, avec gradualité et attention à l'âge des élèves.
c) Renforcement des actions visant à la **construction de structures logiques, linguistiques, cognitives** pour fournir aux élèves des outils adaptés à l'époque actuelle et aux différents milieux de vie.
d) Comparaison des **différentes manières de quantifier, comparer, classer, mesurer, calculer** provenant de différentes cultures (ethnomathématiques) (3) à partir de ce que les élèves eux-mêmes portent en s'insérant dans des contextes familiaux et culturels différents.

2

Former des **esprits ouverts et logiques** capables d'utiliser les structures des mathématiques pour construire des conjectures, argumenter, réfuter, critiquer, justifier, penser de manière rationnelle même dans des situations d'incertitude, problématiser, formuler des questions, poser des problèmes.

a) Construction d’un **environnement d'apprentissage** qui aide les apprenants à faire face aux difficultés de compréhension et à faire face à la frustration et à l'échec.

b) Utilisation de la **discussion mathématique** comme un outil pour négocier des significations et construire des connaissances partagées, à la fois en grands et en petits groupes, pour problématiser et aborder des problèmes ouverts avec plus de solutions, en apprenant à justifier leurs stratégies avec des arguments appropriés.
c) **Traitement des erreur** comme une étape féconde du processus d'apprentissage et comme une ressource pour les individus et les groupes : encourager les processus de pensée partagés qui aident à l'autocorrection, souvent négligés parce qu'on se contente de réponses "correctes" sans examiner les processus de pensée sous-jacents.
d)

3

Valoriser, éduquer, développer la flexibilité et la **pensée divergente et latérale** (4) comme moyens de prévenir les difficultés et les émotions négatives et d'alimenter le plaisir et le désir de découverte, favoriser la passion, le plaisir, la curiosité, la satisfaction de comprendre les mathématiques et développer la créativité même dans ce domaine .

a) Réalisation de l'**atelier des mathématiques** en tant que milieu dans lequel expérimenter, découvrir et construire des connaissances mathématiques de manière opérationnelle, en se basant sur la résolution de problèmes liés à des situations réelles et/ou internes aux mathématiques.
b) Valorisation du **rôle du groupe, de la classe** comme lieu de confrontation et de réflexion sur les "inventions" et découvertes de chacun, multipliant les interprétations possibles.
c) Construction avec les élèves de **modèles** (5) matériaux, symboliques, graphiques, numériques à "manipuler" pour faciliter les processus de compréhension et de conceptualisation.
d) Utilisation d'**outils numériques** et de **logiciels** pour favoriser les processus de généralisation et de réflexion sur les relations entre les objets mathématiques plutôt que les compétences instrumentales, en développant et en élargissant les compétences même avec les élèves plus faibles.

e) Recherche sur les mathématiques et leurs règles dans la nature et utiliser la nature elle-même pour lire, découvrir les concepts mathématiques sous-tendus et accueillir des stimulations et des questions.

4 Prendre en charge la **transposition didactique** des connaissances, en élaborant et en expérimentant des stratégies didactiques efficaces, en assumant la charge de la conception didactique et de la révision continue des parcours en tenant compte des processus cognitifs des étudiants réels.

a) Construction de concepts mathématiques en tenant compte de leurs développements et de leurs connexions réciproques, avec une **didactique hélicoïdale** (6), capable de revenir plusieurs fois sur des thèmes et des concepts en les élargissant, structurée sur des **temps lents et longs** (7) pour prêter attention aux erreurs, difficultés, obstacles (cognitifs, épistémologiques...) des élèves

b) Partir d'objets mathématiques déjà construits, par exemple des expressions arithmétiques, des polynômes, des graphes de fonctions, pour leur donner un sens par des processus de **réinvention guidée** des concepts sous-tendus pour encourager la **construction de structures interprétatives** qui donnent un sens aux abstractions mathématiques.

c) Prise de conscience des relations réciproques entre le corps et les "objets mathématiques", au sens de l'**incarnation**, c'est-à-dire de la *connaissance incarnée* (8), qui offre des éléments pour comprendre l'origine des concepts mathématiques et aide donc à l'élaboration de stratégies appropriées pour favoriser une **compréhension profonde** de ceux-ci, non pas comme une référence générique aux expériences corporelles mais comme la nécessité de passer par le corps pour atteindre l'esprit.

d) Attention aux **processus** par lesquels les concepts sont construits, afin d'éviter la formation de **concepts-obstacles** dépendant d'une didactique qui ne prend pas dûment en considération les relations complexes entre les modes d'apprentissage des étudiants, les constructions théoriques de la discipline et la médiation de l'enseignant.

e) Attention aux **espaces "scolaires"** (9) qui permettent d'exprimer les attitudes et les intérêts des élèves, même s'ils ne sont pas directement liés à l'apprentissage scolaire, qui relient l'école au monde réel et au territoire dans lequel elle est insérée et qui favorisent des organisations flexibles des groupes de classe.

5

Proposer des **mathématiques "relationnelles"** orientées vers la découverte des relations qui lient entre eux les "objets mathématiques" (le "pourquoi", le "comment", les explications) comme alternative à une vision purement instrumentale et mécanique de la discipline basée sur la mémorisation de règles et de procédures conventionnelles.

a) Recherche et reconnaissance des rythmes, structures, cycles, régularités dans des situations réelles et attention à leur **formalisation mathématique** par des outils de plus en plus élaborés et complexes (algèbre, fonctions, représentations géométriques...) pour découvrir progressivement les structures qui unifient la discipline.
b) **Modélisation** (10) de situations réelles afin de résoudre des problèmes par des outils mathématiques et de comprendre le sens et l'utilité pratique des mathématiques elles-mêmes.
c) Développement de la capacité à voir avec les "**yeux de l'esprit**" ce qui est difficile à percevoir tout en restant ancré au concret, à ce qui relève de nos sens, afin de concevoir progressivement les objets mathématiques dans leur pure abstraction.
d) Construction de **cartes mentales** pour organiser les concepts abstraits en réseaux de significations reliés entre eux, en gardant à l'esprit les champs conceptuels (11) auxquels ils se réfèrent.

6

Réaliser une **évaluation formative** basée sur une enquête des apprentissages des apprenants qui prenne en compte les compétences implicites déjà présentes chez les étudiants et leur évolution afin d'obtenir des éléments utiles pour la révision continue des parcours didactiques en les calibrant sur les acquis réels de l'apprentissage.

a) Utilisation d'**outils qualitatifs** tels que protocoles d'observation, carnets de bord, documentation des parcours didactiques avec les travaux des étudiants, des photographies, des films, des transcriptions des discussions à l'aide d'outils informatiques qui facilitent le partage et la diffusion des matériaux produits.

b) Pratique de l'**auto-évaluation** avec l'utilisation des outils de retour d'information des étudiants.

7

Contribuer avec les mathématiques à la construction d'une **citoyenneté scientifique active**, par la formation d'outils utiles à la participation démocratique tels que la capacité d'écouter les autres, de communiquer, d'expliquer et de justifier ses idées.

a) Connaissance et utilisation des **différents codes** (graphique, linguistique, iconique, symbolique) avec lesquels s'exprime la pensée mathématique, conscients de la nécessité de savoir passer d'un code à l'autre, afin d'utiliser le langage mathématique dans toute sa puissance.

b) Utilisation critique des **manuels scolaires** et des **sources alternatives** (sites Internet, films, matériel déjà préparé et structuré, fiches, cahiers d'exercices); méfiance à l'égard des "recettes" qui évitent le raisonnement, la comparaison et le dialogue avec les étudiants et entre les étudiants dans le processus de construction des connaissances.

c) Lecture et **interprétation critique des informations** provenant des médias à travers des représentations mathématiques (graphiques, pourcentages, fractions...).

8

Approfondir les concepts mathématiques dans une perspective de **formation initiale et continue**, en tenant compte des relations et des différentes compétences à construire dans chaque ordre scolaire.

d) Participation à des **groupes de recherche** pour discuter et comparer les contenus, les stratégies méthodologiques et les résultats de recherche ; partage de bibliographies, d'outils pédagogiques et théoriques, de modèles de référence.

e) Organisation de parcours d'**expérimentation didactique** avec tutorat des formateurs afin de garantir la validité des propositions et de constituer, au fil du temps, des **répertoires d'activités** à proposer dans les classes.
f) Des parcours à reculons à partir d'un certain niveau scolaire afin de reconstruire l'**évolution des concepts** et de donner une cohérence et une continuité au projet éducatif.
g) Organisation de moments de **diffusion** et de **restitution** aux écoles et au territoire des recherches menées dans le domaine des mathématiques pour dépasser les lieux communs et les stéréotypes, même en ce qui concerne les familles des étudiants et la société en général (conférences, rencontres, expositions, publications…).

Propositions

De cette vision globale découlent les choix concernant les contenus à enseigner et les méthodes à utiliser pour que nos élèves acquièrent les compétences requises non seulement pour les besoins de l'école mais aussi "pour eux-mêmes" (Emma Castelnuovo) et dans la société en général.

Ceux qui adhèrent au Manifeste assument donc la tâche de :

- traduire les points du Manifeste en actions concrètes et cohérentes en partageant les élaborations et expériences personnelles sur le terrain avec une documentation appropriée ;
- collaborer à la diffusion, par des moyens différents, des résultats des élaborations collectives ;
- participer à des journées d'étude sur des thèmes spécifiques introduits par le Manifeste ;
- conscients des problèmes de pauvreté et de discrimination en matière d'éducation, intervenir par des actions visant à contraster la privation socioculturelle et le décalage entre les différentes régions de notre pays qui sont particulièrement fragiles et manquent de structures éducatives, de stimulations et d'offres culturelles.

Les promoteurs

Nicoletta Lanciano nicoletta.lanciano@uniroma1.it
Donatella Merlo donatellamerlo@icloud.com

Notes et approfondissements

(1) Faire attention aux exercices qui véhiculent des **situations stéréotypées** telles que "papa achète des livres et des billets d'avion et maman achète des tissus et fait des gâteaux" ou "inopportunes", et évitez les exemples et les exercices dénués de sens pour les élèves tels que les baignoires qui se remplissent... Partez plutôt de ce que vous voyez et vivez. Les exercices sont souvent une partie très faible même dans les textes de recherche de l'enseignement des mathématiques.

(2) En ce qui concerne le langage naturel, il est important de former, d'inventer et d'accueillir un "**lexique familial**" du groupe, un argot de classe initial, afin de donner un nom à ce que vous découvrez et rencontrez : plus tard, quand un concept est acquis et fait désormais partie de ce que vous savez, vous pouvez arriver à la langue spécifique. Par exemple, pour le concept de surface, nous passons du balayage d'une surface par un mouvement, au remplissage par épuisement d'une figure et ensuite à l'intégrale avec le symbole du grand S qui provient de la sommation.

(3) Pour D'Ambrosio (mathématicien brésilien proche de la pédagogie Freinet), l'**ethnomathématique** signifie reconnaître que toutes les cultures et tous les peuples développent des moyens d'expliquer, de connaître, de faire face à leur propre réalité dans un processus d'évolution permanente. L'idée de base est de ne pas rejeter les modèles liés à leur tradition et de reconnaître comme valables tous les systèmes d'explication, de connaissance, construits par d'autres peuples. Ces systèmes, grâce à la dynamique culturelle, ne sont pas statiques ou morts. L'ethnomatématique utilise les différents moyens dont disposent les cultures pour trouver des explications à leur réalité et surmonter les difficultés qui surgissent dans leur vie quotidienne. Dans toutes les cultures, cependant, dans cette quête de compréhension, il est nécessaire de quantifier, comparer, classer, mesurer, ce qui donne spontanément naissance aux mathématiques (Mendes, 2008, p. 19). Ainsi, Mendes (2008) montre que "l'ethnomathématique peut être considérée comme un domaine de connaissance intrinsèquement lié aux groupes culturels et à leurs intérêts, exprimée par une langue (ethnique) également liée à la culture du groupe, à son ethos" (Mendes, 2008, p. 19). En résumé des idées ci-dessus, Rosa et Orey (2006) affirment que l'ethnomathématique dans la perspective dambrosienne est la façon dont des cultures spécifiques (ethno) ont développé, au cours de l'histoire, les techniques et les idées (tica) pour apprendre à travailler avec des mesures, des calculs, des inférences, des comparaisons, des classifications et différentes façons de façonner le milieu social et naturel dans lequel elles sont insérées dans la recherche pour expliquer et comprendre les phénomènes qui s'y produisent (matema).

(4) Joy Paul Guilford, une psychologue américaine, a défini deux modes de pensée qui constituent les opposés d'un continuum où se situent les styles individuels. La **pensée convergente** fonctionne de manière à pousser les gens à ne chercher qu'une seule réponse lorsqu'ils sont confrontés à un problème, à savoir la bonne. C'est la logique à la base des problèmes mathématiques que l'on nous pose depuis l'enfance lorsqu'il n'est pas possible d'avoir plus d'un résultat, l'évaluation est donc claire: bonne ou mauvaise. La **pensée divergente**, d'autre part, se caractérise par la volonté de trouver plus de solutions qui soient acceptables pour différentes raisons, mais qui ont toutes leur propre "dignité". Il est très difficile de penser qu'un style de pensée est supérieur à l'autre, plus susceptible d'être des outils qui s'avèrent utiles dans différents contextes. Le terme "**pensée latérale**", inventé par le psychologue maltais Edward De Bono, fait référence à une méthode de résolution logique des problèmes qui implique une approche particulière, c'est-à-dire l'observation du problème sous différents angles, par opposition à la méthode traditionnelle qui consiste à se concentrer sur une solution directe au problème. Une solution directe implique l'utilisation de la logique séquentielle, la résolution du problème à partir des considérations qui semblent les plus évidentes, la pensée latérale s'en écarte (d'où le terme latéral) et cherche des points de vue alternatifs pour trouver la solution.

(5) Nous réitérons également la nécessité d'apprendre à utiliser des ciseaux, à allumer une allumette, à nouer une corde, à verser un liquide car les compétences manuelles, comme la perception, doivent être éduquées et ne pas se perdre à tout âge. Rappelons aussi que l'atelier est passionnant et inclut tout le monde, ce qui réduit les niveaux d'ennui, de perte de sens et de désintérêt.

(6) **Didactique hélicoïdale**, c'est-à-dire la possibilité de revenir plusieurs fois sur des thèmes et des concepts en les élargissant, parce que vous savez plus de choses, parce que vous êtes maintenant en mesure d'aller plus loin et d'élargir le concept et son champ de validité, ou parce que quelqu'un est resté en arrière et que vous devez reprendre un certain thème une autre fois. Par exemple, ne pensez pas que si vous avez travaillé sur les périmètres des polygones réguliers, le périmètre est un sujet "fini et fermé", mais vous y reviendrez par exemple pour des figures curvilignes ou irrégulières.

(7) Une didactique structurée sur des temps lents et longs, conscients que cela est difficile dans une société qui récompense la vitesse comme une valeur absolue et en contradiction avec les temps frénétiques et syncopés des écoles secondaires en particulier. Mais il est nécessaire de prêter attention aux erreurs, aux difficultés, aux obstacles de toutes sortes (cognitifs, épistémologiques, linguistiques...) des élèves. En particulier, la question problématique de la vitesse est présentée dans les tests d'évaluation.

(8) Sur l'encyclopédie Treccani l'article *embodiment* se lit comme suit : "...une réflexion sur les aspects corporelles et incarnés (*embodied*) des processus cognitifs et mentaux a eu lieu depuis les années 1980 dans diverses disciplines, de la linguistique cognitive à l'intelligence artificielle, de la neurobiologie à la phénoménologie, et est devenue centrale pour la recherche philosophique sur l'esprit et la cognition entre les années 1990 et la première décennie du 21e siècle. Déjà G. Lakoff et M. Johnson dans leurs études classiques sur la métaphore, à partir de l'utilisation des métaphores linguistiques, avaient mis en évidence la composante des aspects opérationnels de la corporéité dans l'origine des états mentaux et du langage ; et ces axes de recherche orientent aujourd'hui les secteurs de la psycholinguistique et de la linguistique cognitive. *Embodiment* signifie donc incorporer des concepts, les vivre dans le corps et dans sa propre histoire et condition, comprendre et donner un sens aux mathématiques. Par exemple, reconnaître les métaphores spatiales liées au temps, visibles dans les gestes et exprimées par les mots que nous utilisons quotidiennement : regard et bras en avant pour indiquer le futur et en arrière pour indiquer le passé (dans la culture occidentale); mais aussi utiliser des mots tels que "proche, contigu, prochain" qui indiquent des moments de temps en référence à des localisations spatiales. En logique aussi, on dit par exemple "il suit...". En probabilité, nous faisons des "diagrammes en arbre". Pour compter, on utilise des regroupements et une organisation spatiale.

(9) Vivre les mathématiques avec le corps est fortement empêché par la structure des classes, qui souvent ne sont pas adaptées au mouvement parce qu'elles sont trop petites et rigidement structurées pour un enseignement frontal. Le corps coincé dans les bancs est une telle urgence que la Commission européenne a inclus la lutte contre la sédentarité dans l'Agenda 2030.

(10) **Modélisation** (mathématique) : processus cognitif qui conduit à la construction d'un modèle simplifié d'une situation réelle qui peut être manipulé avec des outils mathématiques tels qu'un calcul, une expression, une formule algébrique, un graphique ; modèle mathématique : représentation quantitative d'un phénomène naturel qui est une description en termes mathématiques, c'est-à-dire par des fonctions, des équations ..., d'un phénomène réel qui peut décrire les liens entre les quantités caractéristiques du phénomène.

(11) **Théorie des champs conceptuels** de Gérard Vergnaud : un **champ conceptuel** est un ensemble de problèmes et de situations à traiter pour lesquels des concepts, des procédures et des représentations de différents types mais en étroite relation les uns avec les autres sont nécessaires, par exemple le champ conceptuel des structures multiplicatives qui comprend la multiplication et la division comme inverse de la

multiplication, les fractions, les rapports, les nombres rationnels, l'analyse dimensionnelle, les fonctions linéaires, la proportionnalité...

Références bibliographiques relatives aux notes précédentes

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.

Gibbs, R. W. (2005). *Embodiment and cognitive science.* Cambridge (MA): Cambridge University Press

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence.* New York: McGraw-Hill

Lakoff, G. , Johnson, M. (1998), *Metafora e vita quotidiana*. Milano: Strumenti Bompiani.

Lakoff, G. , Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought.* New York: Basic Books

Lakoff, G., Núñez, R. E. (2005). *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica.* Torino: Bollati Boringhieri,

Monteiro, A., & Mendes, J. R. (2008). *A Etnomatemática no encontro entre práticas e saberes: espaços de tensão e negociação de sentidos.* Conferencia presentada en el 3° Congresso Brasileiro de Etnomatemática, UFF, Niterói, Brasil.

Shapiro, L. (2004) *The mind incarnate.* Cambridge (MA): The MIT Press

Vergnaud, G. (1994). *Il bambino, la matematica, la realtà*. Roma: Armando Editore