

# 9<sup>AS</sup> JAEM

*Jornadas para el Aprendizaje  
y la Enseñanza de las Matemáticas*

9 10 11  
SEPTIEMBRE LUGO  
1999

# ACTAS

## INDICE

**Conferencias**

Pérez Gómez, Rafael. <i>Matemáticas en la Tercera Cultura</i> .....	11
Castelnuovo, Emma. <i>La matemática escolar en este siglo</i> .....	17
Antibi, André. <i>La motivación en Matemáticas ¿ La del profesor? ¿ La del alumno?</i> .....	22
Alsina Catalá, Claudi. <i>Entre la realidad y la utopía ... Nosotros los de Mates</i> .....	26
Vizmanos Buelta, José Ramón. <i>El poder de visualización en Matemáticas</i> .....	26
Quesada, Antonio. <i>Integrando el uso de Calculadoras en la enseñanza de las matemáticas a nivel de primaria</i> .....	27
Waits, Bert. <i>Álgebra Computacional Simbólica "de bolsillo": sus implicaciones para el futuro</i> .....	31

**Ponencias**

Cortegoso Iglesias, Manuel; Gómez Cabrero, Enrique. <i>¿Qué matemática habría que enseñar si se permitiese el uso de todo tipo de calculadoras en la selectividad?</i> .....	36
Fernández Mira, Mariló. <i>Yo programo, tú calculas, el representa</i> .....	38
Puerta García, Francisco. <i>Tratamiento gráfico de la función derivada</i> .....	43
Marín Rodríguez, Margarita. <i>Encuentros telemáticos con Matemáticas</i> .....	48
Pérez Sanz, Antonio. <i>Ver las Matemáticas</i> .....	53
Quesada Moreno, José Francisco. <i>El Proyecto Thales-CICA-Internet: Internet como recurso didáctico y como infraestructura para la educación a distancia</i> .....	58
Pol Masjoan, Anna; Borrel Thio, Francesc. <i>La estadística. Su presencia en la sociedad actual y en el currículum de la educación secundaria</i> .....	63
González Manteiga, Wenceslao. <i>Una visión personal de la enseñanza de la estadística en los distintos niveles educativos</i> .....	69
Álvarez García, José Luís; González García, Antonio Eugenio. <i>El Taller de Matemáticas: Un lugar para la investigación</i> .....	73
Bou García, Luís. <i>Obradoiro de Matemáticas: Algunas propuestas</i> .....	78
Fernández Pérez, José Luís. <i>Matemáticas y mercados financieros</i> .....	82
Rodríguez-Moldes Rey, Covadonga. <i>Etnomatemáticas: Las Matemáticas "vivas"</i> .....	88
Gómez Alfonso, Bernardo. <i>Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud</i> .....	91
Ortiz, Ángeles. <i>El pensamiento algebraico para todos</i> .....	97
Borrajó Borrajó, Genara. <i>Construcción del conocimiento matemático en la Educación Infantil</i> .....	100
Edo Basté, Mequé. <i>Educación Infantil: Una realidad plural repleta de posibilidades matemáticas</i> .....	105
Canals Tolosa, M <sup>a</sup> Antonia. <i>Eluso del material manipulativo en el aprendizaje de las Matemáticas en la escuela primaria</i> .....	109
Martín Adrián, Antonio R.. <i>Principios constructivistas en la enseñanza de las Matemáticas</i> .....	113
Gago Couso, Felipe. <i>Resolución de problemas y abstracción</i> .....	117
Méndez Pérez, José. <i>La Enseñanza de las matemáticas en la Universidad</i> .....	119
Callejo De la Vega, M <sup>a</sup> Luz. <i>Investigar sobre la propia práctica, un medio de desarrollo profesional</i> .....	124
de la Fuente Martínez, Constantino. <i>El desarrollo profesional y la formación permanente: ¿convergerán alguna vez hacia el mismo límite?</i> .....	128
Aguirre Herrera, Guillermo. <i>Sentando las bases: dos, diez...(Matemáticas en la E.S.O.)</i> .....	131
Velázquez Manuel, Fidela. <i>Las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria: Un modelo cultural</i> .....	137
García García, Francisco Jesús. <i>¿Pueden sobrevivir las matemáticas en un Bachillerato virtualmente obligatorio?</i> .....	142
Valcalce Gómez, José Luís. <i>Matemáticas en el bachillerato. Estructura y currículo</i> .....	145
Segarra Neira, Luís; Barba Uriach, David. <i>Matemática mágica... Matemática sorprendente?</i> .....	150
Pazos Crespo, Manuel. <i>Hacia la Matemática Recreativa</i> .....	151

**1. Tecnologías en la enseñanza de la Matemática. Calculadoras gráficas y ordenadores.**

Álvarez Solano, Víctor, María Dolores Frau García. <i>Las Matemáticas, ¿asistidas por...?</i> .....	159
Álvarez Solano, Víctor; Eugenio Manuel Fedriani Martel. <i>El ordenador y el profesor de Matemáticas: ¿enemigos o aliados?</i> .....	161
Augusto Ibáñez. Ediciones SM. <i>Matemáticos enREDados. Internet para Profesor@s</i> .....	165
Baldrich Álvarez, Jordi. <i>Como trabajan el álgebra las calculadoras gráficas: una comparación entre la TI 92 y la CFX 9970 G</i> .....	166
Baldrich Álvarez, Jordi. <i>Calculadoras y animación de gráficos</i> .....	171

## LA MATEMÁTICA ESCOLAR EN ESTE SIGLO

Emma Castelnuovo

El título parece "normal" cuando se llega al final de un siglo; pero no se trata solamente del final de un siglo sino del final de un Milenio. Por lo tanto, para destacar los acontecimientos concernientes a esta enseñanza, a veces bastante "fuertes", que se verificaron en nuestro siglo, me parece importante decir algo sobre la matemática escolar en los siglos precedentes. Y me refiero sobre todo a las escuelas secundarias.

La geometría de Euclides siguió dominando durante siglos la enseñanza de las matemáticas. Pero es cierto que el propósito de Euclides (300 a. C.) no era lo de presentar su obra a los jóvenes de la escuela; en efecto, sus Elementos nunca han sido introducidos en las escuelas griegas de su tiempo. Para encontrarlos en la enseñanza debemos referirnos al Alto Medievo. En esta época, en este mundo generalmente analfabeto, la cultura y la instrucción se encierran en los Monasterios. En estos centros religiosos, no solamente se introduce el estudio del latín (que será el idioma de los ambientes cultos) sino también de la matemática y de la música. Los Monasterios y las escuelas, ¿para quienes? . No solamente para los futuros monjes, sino también para los alumnos que no tenían la intención de seguir la carrera eclesiástica pero que pertenecían a familias cultas y ricas; una pequeña minoría: la enseñanza en las escuelas religiosas resultaba muy costosa. Por lo que concierne a la enseñanza de las matemáticas, parece que ya en el siglo VI los Elementos de Euclides entraron en un Monasterio de Italia del Sur (fig. 1); el Centro religioso "Vivarium" (el vivero de intelectuales), creado hacia el 540 por el literato Cassiodoro al final de su carrera política como ministro de Teodorico.

Los Elementos de Euclides habían sido traducidos al latín, y simplificados por el matemático Boecio, amigo de Cassiodoro.

1000-1100. Luego, alrededor del año 1000, los árabes que habitaban España redactaron exactas traducciones de los Elementos del griego al árabe; después de un siglo los Elementos fueron traducidos del árabe al latín. Y ocurrió un hecho bastante curioso: Euclides en latín, conocido a través de los Musulmanes, remontó del Sur al Norte de España para encontrar hospitalidad en los Monasterios Cristianos, particularmente en Asturias (fig. 2). Del Sur al Norte la geometría de Euclides introdujo a los jóvenes ricos en el mundo de la abstracción.

1400- La difusión de la geometría euclídea en las escuelas toma otra dimensión tras la invención de la imprenta en 1455. En fig. 3 vemos la primera edición de los Elementos de Euclides, publicados en Venecia en 1482.

1500- Pasan unos siglos. Estamos en un largo período que vio nacer las mejores obras artísticas, literarias, científicas. ¿Quién estudia? Estudian solamente los que tienen el dinero suficiente para frecuentar las escuelas religiosas, o quienes están instruidos por un preceptor privado. Pero, los pocos jóvenes que estudian, encuentran grandes dificultades para comprender la geometría de Euclides; es una matemática demasiado abstracta. Tenemos, a este propósito, testimonios de dos personalidades: un pedagogo y un matemático. Janos Comenius, natural de Bohemia, es el mayor pedagogo de todos los tiempos. Se impone con su "Didáctica Magna", publicada en 1657; dice: "La escuela debe elevar al pobre y también ayudar al rico; ya que el rico está obligado a seguir desde el comienzo un estudio abstracto que lo aplastará para siempre. El conocimiento debe comenzar a través de los sentidos ¿Por qué, entonces, comenzar con una exposición verbal de las cosas y no con una observación real de estas cosas?"

Después de menos de un siglo, el gran matemático y astrónomo francés Alexis Claude Clairaut se expresa con estas palabras en el prólogo de su libro "Eléments de géométrie", publicado en París en 1741: "No es admisible comenzar el estudio de la geometría desde lo más abstracto, es decir punto, recta, plano. Quien comienza debe partir de lo concreto, de la realidad que nos rodea para, luego, pasar de lo concreto a lo abstracto. Con un comienzo abstracto el novato se alejará para siempre de las matemáticas".

Voces, las dos, que se pierden en el mundo de los que no quieren escuchar.

Los Elementos de Euclides siguen imperando en los pocos países que tienen escuelas para los ricos. Se puede decir, quizás exagerando, que los analfabetos son los únicos que se salvan. . .

1800- Pero, el mundo evoluciona: al final del 1700, con la Revolución Francesa, la situación escolar cambia. Uno de los Artículos de la Constitución declara que la instrucción pública es obligatoria y gratuita

para todos. Se lee asimismo: "La instrucción publica ha de establecer una igualdad de hecho entre todos los ciudadanos". Principios, estos, que son acogidos por muchos países. En los países más evolucionados los niños, los jóvenes van a la escuela, si no todos, por lo menos muchos.

Pero, la igualdad no se verifica, y es sobre todo la matemática responsable de esta diferenciación entre alumno y alumno: en efecto, la geometría de Euclides que sigue dominando, lleva a una falta de comprensión que es insuperable para los alumnos que no encuentran en su familia un sostén cultural, alguien que pueda ayudarlos a comprender una matemática tan abstracta.

La matemática resulta un arma de diferenciación, un arma social.

1900- Y llegamos a este siglo. Los programas de matemática no cambian. Es suficiente consultar los currícula de muchos países publicados por la CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique) en los años 1910 y en los años '30: parecen copia el uno del otro en diferentes idiomas. Y no cambian tampoco aunque haya voces de grandes matemáticos como Felix Klein quien propone la idea de introducir las transformaciones como guía para el desarrollo de la geometría; o como otros que sugieren un inicio inspirado en la intuición y en la realidad que nos rodea. Entre estos no se debe olvidar la obra de Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, quienes, en los años 1926-27 declaran en el prólogo de su "Elementos de geometría" que "Una enseñanza de geometría debe cultivar a la vez lógica e intuición". No -se contesta-; la matemática debe ser pura y por lo tanto no se debe bajar a ninguna aplicación. Opiniones, estas, que están frecuentemente ligadas a ideologías filosóficas y llegamos a la mitad del siglo. Un corte seco se verifica hace 40 años; también este corte se debe a hechos políticos.

He aquí lo que ocurrió: el 4 de Octubre de 1957 los Rusos lanzaron el satélite artificial, Sputnik. Este lanzamiento tuvo consecuencias verdaderamente inimaginables en el campo de la enseñanza de las matemáticas ¿ Por qué los Rusos fueron los primeros en el lanzamiento de un satélite? Para llegar a una tecnología tan alta y para sensibilizar a todo un país -observaron los países occidentales y particularmente los Americanos- significa que en Rusia hay una formación científica elevada, un conocimiento serio de las matemáticas. También en nuestros países se debe organizar una enseñanza mas profunda de la matemática. Pero ¿qué matemática introducir? ¿cómo cambiar los programas?

Los Estados Unidos convencieron a la OECE (Organisation européenne de coopération économique) para que organizara una Conferencia internacional a fin de que los distintos países expusieran sus programas de matemática y expresaran sus pareceres. La Conferencia tuvo lugar en Royaumont (Francia) en el mes de Diciembre de 1959, durante unos quince días. Asistieron al Seminario de Royaumont matemáticos, pedagogos, inspectores, profesores de escuela secundaria; unas 60 personas.

Los exponentes de relieve eran los matemáticos franceses Gustave Choquet y Jean Dieudonné y los americanos Marshal Stone y Howard Fehr.

Jean Dieudonné, en la apertura de la Conferencia, declara con fuerza que es necesario cancelar definitivamente el estudio de la geometría euclídea y que toda la enseñanza de las matemáticas debe basarse sobre la teoría de los conjuntos y de las estructuras. "¡Abajo Euclides! ¡Abajo el triángulo!" , me parece escuchar todavía su voz tonante. "Solo así -dijo- se logrará acercar el estudio de la matemática secundaria a los cursos de la Facultad Universitaria de Matemática ".

Aún hoy, después de 40 años, permanezco perpleja, como me había ocurrido al escuchar la voz de Jean Dieudonné. Cambiar, de acuerdo, pero ¿por qué preocuparse de una exigua minoría, la de los jóvenes que estudian matemática en la Universidad? ¿Y los otros? ¿Quién se preocupa de la masa? Dejo ahora mis comentarios para hablar de lo que pasó.

1961- Después del Seminario de Royaumont, una Comisión de especialistas redactó en 1961 un libro con ideas muy amplias sobre la introducción didáctica de temas relativos a conjuntos y estructuras en diferentes niveles de edad. Se dice también en este volumen que cada país no debe alejarse demasiado de sus propias tradiciones de enseñanza, y que es oportuno hacer experiencias organizando clases piloto. Pero, este volumen publicado en 1961 ha sido "sumergido" por otros libros publicados en algunos países; libros ciertamente valederos desde un punto de vista matemático pero didácticamente demasiado rígidos.

Ocurrió por lo tanto que la mayoría de los países " cayó -como decía con humorismo Hans Freudenthal- en el conjuntismo a toda costa". Se pasaba de Bélgica a Francia, a Suiza, a... , se pasaba de un continente a otro, y siempre se encontraba la misma clase de matemática; y los chicos parecían los mismos. Se dirá: ¿ qué más se quiere? ¿no era la igualdad por la cual se luchaba? No, no queríamos y no queremos tener alumnos que parecen iguales por el hecho de que no tienen ninguna reacción por no estar en condiciones de comprender una matemática más abstracta que la de Euclides.

Un efecto aplastante, aún más triste en los países en vía de desarrollo, donde la abstracción de los conjuntos desentonaba de manera impresionante con la realidad del país.

Así, en este mundo escolar sin reacciones durante la enseñanza de la matemática, pasaron más de quince

años.

1968- Porque tampoco los jóvenes del '68, que luchaban para cambiar todo en el ambiente escolar, es decir profesores y currícula y metodologías y . . . todo, no tuvieron ninguna reacción contra la enseñanza de las matemáticas. Ninguna, porque pensaban que el estudio de la matemática no podía ser desarrollado de otra manera.

1976- No, la oposición no llegó de la base.

En el mes de agosto de 1976, durante el Congreso del ICME (International Commission Mathematics Education) en Karlsruhe, el gran geómetra inglés Michael Atiyah en una conferencia plenaria, se lanzó contra los colegas universitarios con estas palabras: "Habéis destronado a Euclides, y estoy de acuerdo. Pero ¿de qué manera habéis sustituido la enseñanza de la geometría? La matemática que se enseña hoy en día en la mayoría de los países esta aun más lejana de la realidad, porque no tiene ningún apoyo geométrico. Debe tenerse en cuenta que la intuición geométrica es y será siempre la fuente más poderosa para la comprensión de muchos temas. Por lo tanto el pensamiento geométrico debe ser estimulado lo más posible y a cualquier nivel"

La fuerte declaración de un matemático como Atiyah "sacudió" una situación que ya estaba bastante tambaleante por los fracasos didácticos en todo el mundo. Por lo tanto, antes de los años '80 muchos países manifestaron la voluntad de realizar un cambio. Muchos congresos internacionales tienen temas como "¿qué geometría se debe tratar en las escuelas?" Y las antiguas pero siempre modernas ideas de Felix Klein de una enseñanza basada sobre las transformaciones inspira a algunos países, aunque la mayoría parece "tener miedo" de transformaciones que "transforman", es decir que cambian la forma de la figura (como hace el inocente sol) y se limitan a las "frías" isometrías.

1980- Llegamos así a los años '80. En estos años se verifica el boom de la informática. Parece que la enseñanza de las matemáticas haya encontrado algo que les gusta a los alumnos y también a los profesores jóvenes. Pero -se dice- si la informática constituye parte del curso de la matemática, debe ser sostenida por la lógica. Se suceden entonces (años '80-'90) congresos seminarios y cursos de lógica para los docentes. Se ignoran los trabajos de grandes psicólogos, como Jean Piaget, sobre la posibilidad de anticipar las teorías de la lógica antes de una edad bastante avanzada; y peor- se ignora o se hace semblanza de ignorar que la lógica en clase contrasta fuertemente con el alumnado de la clase, porque las drogas, también las más ligeras (y hoy en día la cerveza), amortiguan las facultades lógicas de los jóvenes.

1990- Más recientemente, en los años '90, la informática gráfica ha llamado la atención sobre una geometría dinámica. Pero se trata de un dinamismo "dirigido", no estimulado de la intuición.

Hoy en día los alumnos son muy expertos en el uso del computer, pero, en general, no tienen ningún interés en las reglas lógicas que están en su base.

Se observa también en muchos países que los programas de matemáticas están siempre más sobrecargados y tienden a un tecnicismo operatorio. El resultado es que los alumnos, sumergidos en las nociones y en las reglas que deben aprender, son pasivos y se refugian en las "recetas".

En este cuadro bastante desolador ¿qué hacer? ¿Cómo interesar a los jóvenes? ¿Cómo sacudir su pasividad? ¿Qué hacer en un ambiente escolar que cambia, que se nos escapa, mientras cambia también el ambiente geográfico-político en el cual esta inserto?

El coraje de luchar contra esta situación no debe faltar, y hoy, en la víspera del 2000, tenemos un apoyo muy fuerte en un documento redactado hace un año por un acreditado grupo internacional de 8 expertos en educación matemática: es el Proyecto PISA (Project for International Student Assessment), sostenido por la OCSE. El jefe de este grupo es el holandés Jan de Lange de la Escuela de Freudenthal, y las ideas sostenidas por el grupo son precisamente las de Freudenthal, nuestras ideas.

Se dice en este documento que para la evaluación de los alumnos (se refiere a alumnos de 14-15 años) las pruebas no deben estar vinculadas a prestaciones matemáticas de carácter repetitivo, sino que deben apuntar a destacar, por parte del estudiante, la comprensión de amplios capítulos, la conexión, la intuición, la fantasía, cualidades que en nuestros países viejos y supercivilizados estamos perdiendo.

Afortunadamente, nunca como en este final de siglo, tenemos la posibilidad de ver, con los inmigrados, una fuente de vitalidad. Y, hoy en día, son ellos, con su natural vivacidad, quienes nos estimulan para recuperar los valores que estamos perdiendo. La matemática que no exige un refinado conocimiento del idioma, será un día no lejano no un arma que evidencia las diferencias sociales, sino, al contrario, un arma para afirmar la igualdad en un mundo sin fronteras.

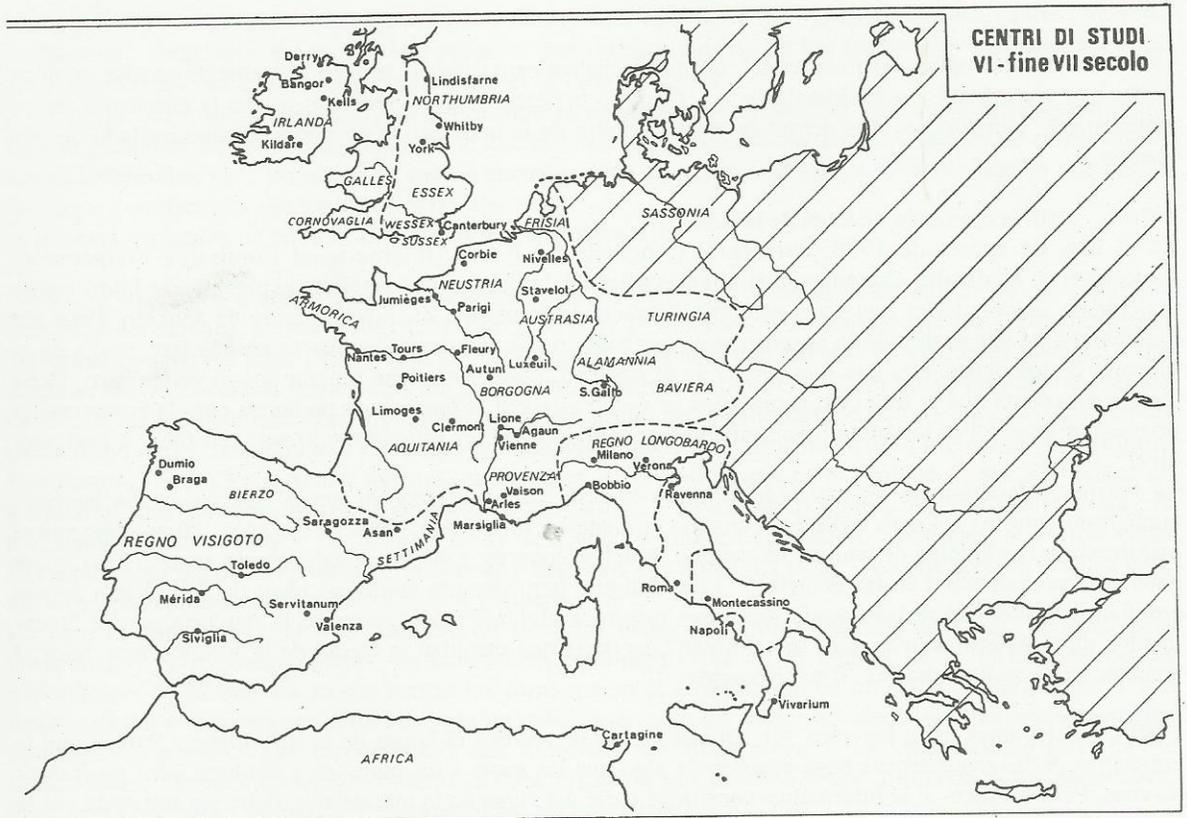


Fig. 1



Fig. 2

