ACTAS

7as JAEM

JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Madrid 14, 15, 16 Septiembre 1995

Conferencia Inaugural

Las representaciones Gráficas en Matemáticas: un estudio histórico-crítico

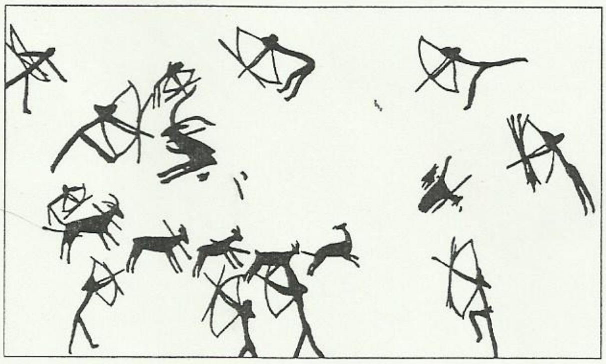
Emma Castelnuovo
Italia

La historia de las representaciones gráficas en matemáticas es, al mismo tiempo, antigua y reciente.

Antigua, porque se inicia en épocas prehistóricas y se desarrolla a lo largo de los siglos con altos y bajos, hasta adquirir hoy en día una importancia más allá de las matemáticas y de la ciencia en general. En efecto, hoy la imagen visual tiene sobre nuestras acciones y sobre las decisiones de la sociedad una influencia sin duda superior al texto escrito.

Por otro lado, la historia de los gráficos es relativamente reciente, si al término "representación gráfica" se le da el sentido hoy más común: ***un dibujo que refleja la variación de un fenómeno concreto o abstracto.*** A este significado quiero referirme, independientemente de su estudio teórico desde el punto de vista de la geometría analítica.

La representación gráfica, en su significado más amplio, nos lleva al dibujo, al arte. Es precisamente por el arte por donde quiero empezar. Vamos a reflexionar sobre estas expresiones artísticas. Esta representación de caza (fig. 1), pintada en la cueva de la Araña (Valencia) llama la atención por su estilo claramente expresionista. Hay, en esta pintura del Paleolítico, un sentido matemático que se manifiesta en las proporciones entre hombres, animales, arcos y flechas, todo en un ambiente verdaderamente dinámico.



Cueva de la Araña. Valencia. (Fig. 1)

Una jirafa grabada en horizontal, en la cumbre de una colina rocosa en el desierto del Níger: se encuentra a 130 Km. al norte de Agadés. No pude tomar una foto de este grabado con mi cámara por las dimensiones enormes del animal. Dadas estas dimensiones, se puede afirmar que el grabado ha sido realizado "de memoria". Lo que impresiona es el sentido de las proporciones en un dibujo que no se podía ver en su conjunto, ya que no existían otras colinas en los alrededores.

Este grabado pertenece al Neolítico-Africano.

Y ahora regresamos a Europa. Cuando del Paleolítico se pasa al Neolítico se advierte que el campesino ya no necesita del sentido agudo de observación que tenía el cazador. Está motivado a expresarse de un modo abstracto: con un dibujo representa un pensamiento, una idea.

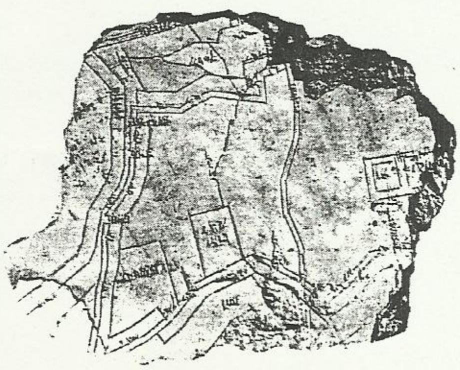
Las famosas espirales, típicas del Neolítico en Irlanda (fig. 2), significan quizás un volver sobre sí mismo, quizás la eternidad.

Espirales del Neolítico en Irlanda. (Fig. 2)

En esta espiral, la exactitud del dibujo atestigua sin duda unos conocimientos matemáticos.

De 3000 años antes de Cristo, a los cuales se remonta esta espiral, pasamos a civilizaciones más recientes.

Este es el plano de la ciudad de Nippur (fig. 3), un famoso centro religioso y cultural de la antigua Babilonia. Este plano está grabado en una tabla de árcilla, y se remonta al 1500 a.C. Después de excavaciones sucesivas se descubrió que el plano corresponde exactamente a la antigua ciudad. Por lo tanto se trata de un dibujo que revela firmes conocimientos matemáticos.

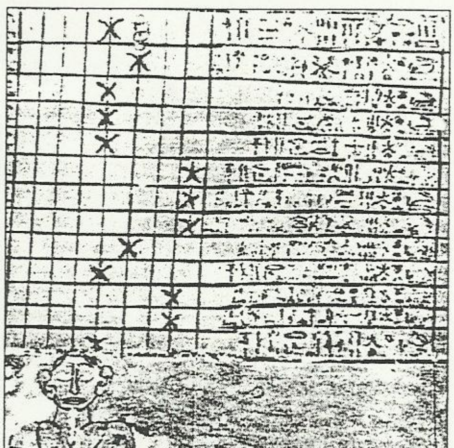


Plano de la ciudad de Nippur. (Fig. 3)

He ilustrado hasta ahora unos dibujos que están ligados, sin duda, a las matemáticas, pero que están lejos del sentido de gráficos que representan un fenómeno variable.

Quiero ahora entrar verdaderamente en el campo matemático.

Esta pintura (fig. 4) marca el inicio de la representación gráfica en el plano cartesiano. Se trata de una pintura realizada en el techo de la tumba del Faraón Ramses VII (1100 a.C.).



Representación gráfica en el plano cartesiano. (Fig. 4)

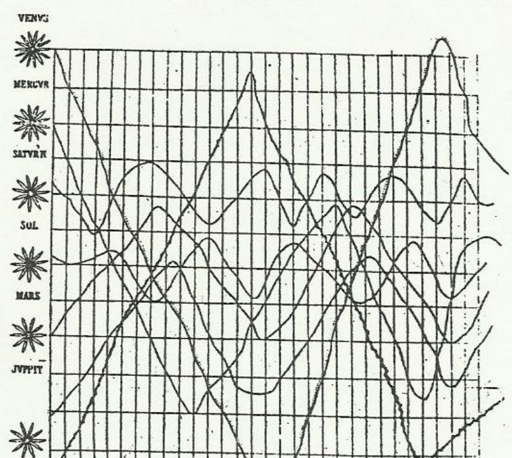
Hay un cielo de estrellas sobre un plano cuadriculado, seguramente con el propósito de que el Faraón, incluso muerto, pueda gozar de este espectáculo maravilloso.

Cada estrella tiene, en el plano cuadriculado, una posición determinada según la hora de observación. Se puede considerar esta pintura como el inicio de la representación en el plano coordenado.

Pero sólo se trata de puntos luminosos: es un cielo estrellado. Se nos pregunta: ¿como podían tener la idea de trazar recorridos que no se ven? Pero algunas veces se ven: las estrellas fugaces siempre ejercitaron un encanto sobre la humanidad. No tenemos ningún dibujo de estrellas fugaces, mientras muchos son los escritores, los poetas, los astrónomos que hacen referencia a ellas en sus escritos.

Veamos como Marco Manilio, un astrónomo romano del siglo I a.C., describe las estrellas fugaces. Dice: "La noche, en el cielo sereno, cuando las estrellas centellean por doquier, se pueden ver unas luces caer o vagar en el espacio. Dejan, detrás de ellas, una larga tira de fuego que se afila en un hilo sutil". Sin duda esta descripción podía sugerir una imagen gráfica, pero, como he dicho, no tenemos ningún dibujo de este fenómeno.

Son, al contrario, recorridos mucho más abstractos los que están dibujados en un pergamino del siglo X o XI d.C. (fig. 5): se trata de un pergamino descubierto en 1877 y que se encuentra en la Biblioteca Real de Mónaco. En él están indicadas las trayectorias de los planetas en un reticulado espacio-temporal. Se trata del primer gráfico donde no están indicados solamente unos puntos sino también unos recorridos: las órbitas planetarias en función del tiempo. Parece que este gráfico, sin duda dibujado con un poco de imaginación, ha sido realizado para ayudar a los alumnos de las escuelas monásticas.



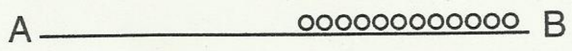
Trayectorias de los planetas en un reticulado espacio-temporal. (Fig. 5)

En el mismo siglo, el XI, se encuentra una representación gráfica que se refiere a otro fenómeno variable: es la notación musical. En este caso la representación está ligada a la mano y a la sensibilidad del músico. Fue Guido d'Arezzo quien tuvo la idea de trazar rectas paralelas (que formarán el pentagrama), sobre las cuales se apoyan las notas. La altura de una nota corresponde a un valor de la ordenada, mientras los tiempos no corresponden a puntos de un eje perpendicular, sino que son las formas de las notas las que indican la duración del tiempo.

Para encontrar una representación gráfica más próxima a la cartesiana hay que esperar todavía tres siglos, y llegar al año 1360. Debemos a un religioso, el obispo francés Nicolás de Oresme, la idea de desplazar la atención de los fenómenos concernientes a movimientos en el cielo a movimientos realizados con un experimento. Entre los muchos trabajos de Nicolás de Oresme, uno, en particular, indica el nuevo papel que debía tener la representación gráfica en el campo de la física-matemática.

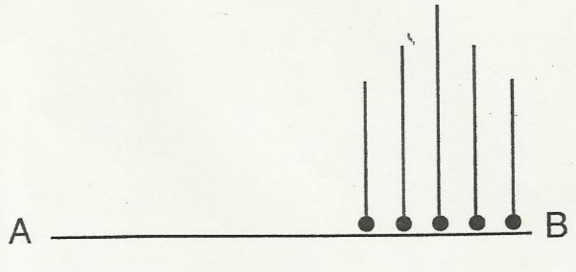
Oresme estudia tanto el movimiento de los cuerpos que se desplazan con velocidad constante (movimiento uniforme) como el de los cuerpos que tienen una velocidad que varía en modo constante (movimiento uniformemente acelerado).

Procede así: sobre un segmento AB, donde B es el ***origen,*** representa el tiempo; a cada tiempo le corresponde un punto: la distancia del punto al origen es ***la longitud*** (fig. 6).



(Fig. 6)

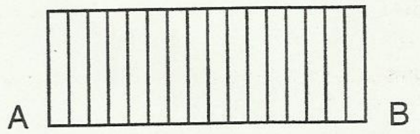
La velocidades están representadas con segmentos perpendiculares a AB; la longitud de cada segmento se debe imaginar (Oresme dice: "imaginanda est") como la intensidad de la velocidad. Utiliza la palabra ***latitud*** para indicar la longitud de los segmentos (fig. 7).



(Fig. 7)

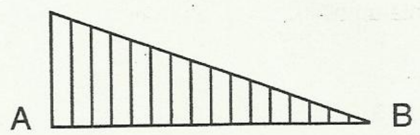
He aquí sus dibujos, (figs. 8a,8b y 8c) que ponen en correspondencia la física y la geometría.

— Si la velocidad es constante: un rectángulo



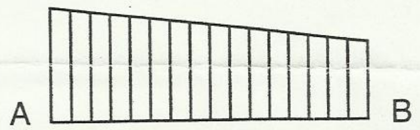
(Fig. 8a)

— Si la velocidad cambia uniformemente partiendo de cero: un triángulo rectángulo



(Fig. 8b)

— Si la velocidad cambia uniformemente pero no parte de cero: un trapecio rectángulo

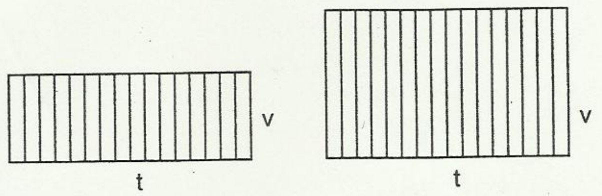


(Fig. 8c)

Oresme sugiere unir los puntos extremos de las velocidades teniendo así una línea. Esta "línea summitatis" es, en términos modernos, ***el gráfico de la función.***

Y, después, haciendo referencia al movimiento uniforme, dice que una velocidad es mayor que otra si en el mismo tiempo el cuerpo recorre un espacio más grande; por lo tanto el área del rectángulo es mayor. Es así como esta idea de Oresme le lleva a afirmar que el espacio recorrido s está representado por el área del rectángulo que tienen base t y altura v (fig. 9).

$$s = vt$$



(Fig. 9)

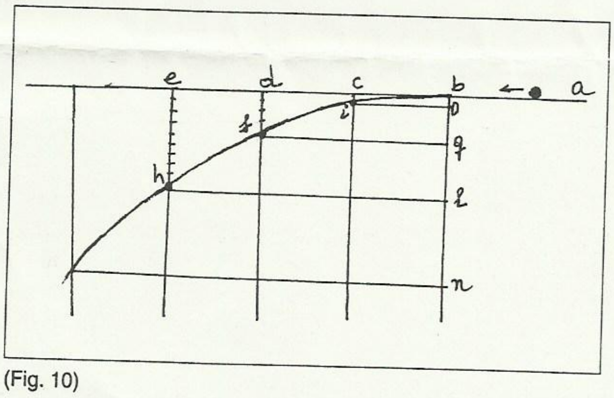
Vemos así como el movimiento se refleja en la geometría de las figuras.

Volvemos ahora a lo que es más interesante para nosotros: las primeras ideas sobre el plano cartesiano.

Oresme dice que a cada punto de la línea summitatis corresponden dos números, la longitud y la latitud, es decir, un tiempo y una velocidad. Pero el cuadro gráfico parece limitado porque no hay dos ejes de referencia: hay solamente un segmento AB y las pequeñas barras construidas sobre esta base.

Todavía tres siglos tienen que pasar para tener, con Descartes, Fermat y Galileo, una clara utilización del plano coordenado. Galileo está interesado en los mismos problemas que Oresme, pero su plano de referencia es ilimitado, con dos ejes. Quiero seguir su construcción de un gráfico que representa un cuerpo que cae, mencionando también su texto.

Galileo considera un cuerpo, una pelota, que se mueve con movimiento uniforme a lo largo de un plano horizontal **ab** (fig. 10). Si el plano se interrumpe en **b**, el cuerpo no cae a lo largo de la vertical **bn** porque —dice Galileo— su movimiento es "indestructible", conservando la dirección horizontal. Por lo tanto se debe hacer la composición de los dos desplazamientos, horizontal y vertical.



(Fig. 10)

Galileo, para dibujar la trayectoria, toma sobre la línea **be**, prolongación de **ab**, unos segmentos iguales **bc, cd, de,...**, y traza, a partir de los puntos **c, d, e...** la paralela a la vertical **bn.** Sobre estas verticales opera así: fija un segmento cualquiera **ci**, y toma

$$df=4ci,\ eh=9ci,\ \ldots$$

Por lo tanto toma "spatia eh, df, ci, ... inter se ut cuadrato linearum eb, db, cb, ...".

Es decir, estos segmentos están tomados según la ley de los cuadrados en un movimiento uniformemente acelerado.

La trayectoria resulta una parábola por la propiedad de esta curva.

Es cierto que la oportuna elección de los dos ejes hace más fácil la comprensión: en efecto, el gráfico corresponde a la trayectoria de la pelota.

Y ahora, antes de continuar con nuestra "historia", vamos a reflexionar sobre el camino seguido.

Después de un gráfico con los recorridos de los planetas, recorridos que no se ven, y después unas consideraciones sobre la primera notación musical, que tiene algo de matemática, hemos considerado los gráficos de Nicolás de Oresme relativos a algunos experimentos sobre el movimiento de los cuerpos. Estos experimentos, como están realizados por el hombre, constituyen algo concreto. Pero también esta representación es bastante abstracta porque es difícil —como dice Oresme— tomar las velocidades como segmentos.

Después hemos considerado el gráfico de Galileo relativo a la caída de los cuerpos. Este gráfico, dado que corresponde a una trayectoria visual, es realmente algo concreto. Pero -se nos pregunta-: ¿puede este experimento de física interesar al hombre de la calle? Sin duda la gente no se plantea un problema de este tipo... Los problemas que interesan a la gente son los que conciernen a la vida y a la muerte. Ya vimos como en el Paleolítico los hombres pintaban animales que representaban, al mismo tiempo, un peligro y una fuente de subsistencia.

¿Por qué hasta el final del siglo XVIII, es decir, un siglo y medio después de Galileo, los hombres no sintieron la necesidad de ilustrar con gráficos diferentes tablas numéricas relativas a cuestiones de economía, de finanzas, de medicina,...?

¿Es el purismo de la geometría cartesiana lo que ha dificultado la visualización de problemas empíricos en el plano coordenado?

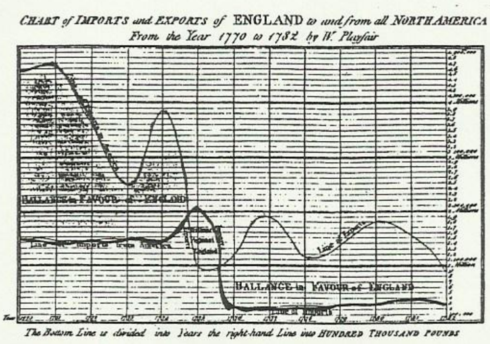
Dejemos esta cuestión por un momento para relatar unas recientes investigaciones concernientes a la historia de los gráficos estadísticos.

Parece que fue el escocés William Playfair (1759-1823) quien tuvo la idea de representar con gráficos de tipo diferente muchas tablas numéricas empíricas. W. Playfair no era un matemático; era un diseñador, un comerciante, un inventor,... cambiaba de actividad según su interés en cada momento. Pienso que una de sus aserciones puede describir a este tipo original. Escribe: "Cada noche, cuando regreso a mi casa, pongo mis guineas una sobre otra teniendo así un pequeño cilindro. Al final de cada semana, observando estos cilindros, puedo decir a simple vista cuando he ganado más".

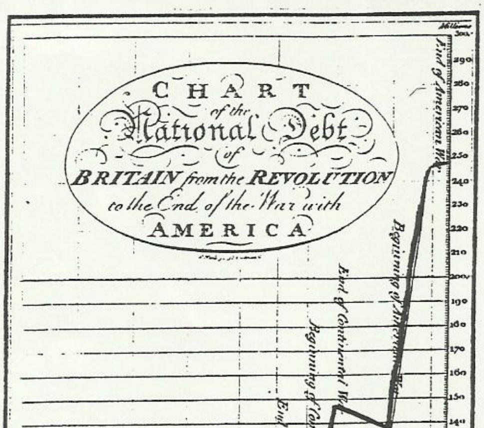
Un medio tan sencillo y útil como los histogramas ha sido inventado por un no-matemático y, además, por un tipo que no tenía ningún escrúpulo académico.

A William Playfair se deben también otras representaciones gráficas, como diagramas con áreas, histogramas, gráficos de sectores y gráficos de líneas.

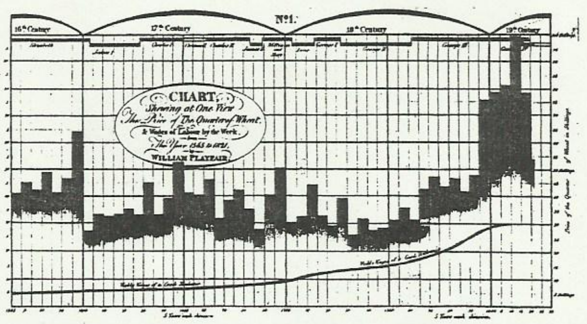
Aquí vemos (figs. 11,12,13) unos gráficos realizados en años sucesivos y concernientes todos a economía y finanzas, cuestiones en las cuales Playfair estaba particularmente interesado.



(Fig. 11)



(Fig. 12)



(Fig. 13)

El primero, de 1785, representa importaciones y exportaciones entre Inglaterra y Norte América en el período 1770-1782; pone de relieve la balanza comercial entre los dos países.

En el segundo, de 1786, Playfair quiere destacar cómo la deuda nacional crece de un modo excepcional en períodos de guerra.

El tercero, de 1821, pone en correspondencia, con una representación muy viva, el precio del trigo con los salarios de los trabajadores.

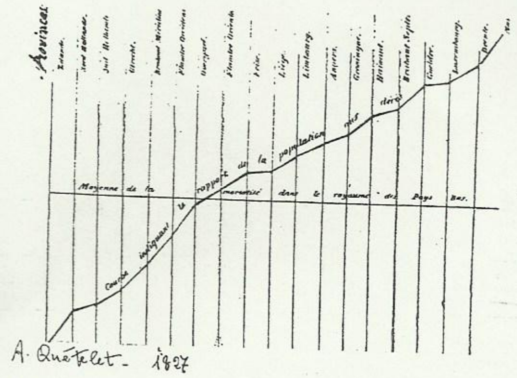
Por lo tanto Playfair, con sus gráficos matemáticos, aunque también "artísticos", se propone interesar a todos, pero sus temas están todavía lejos del hombre de la calle.

La actividad matemática de W. Playfair ha sido descubierta muy recientemente; su nombre no se encuentra ni siquiera en las grandes enciclopedias.

Y ahora, todavía una vez más, vamos a reflexionar sobre la situación. Estamos al final del siglo XVIII. Con sus representaciones geométricas, William Playfair había introducido un medio visual muy fuerte para ilustrar cuestiones de economía y de finanzas. Pero la gente, como he dicho, siempre se ha interesado sobre todo por su salud. Y en la época de Playfair no se encuentran gráficos de este tipo. Mientras, ya un siglo antes, en 1662, se había publicado en Inglaterra un libro de estadística titulado "Observaciones naturales y políticas sobre la mortalidad en Londres". El autor es John Graunt, un comerciante de tejidos de Londres. Se encuentran en este libro tablas y tablas numéricas con diferentes causas de muerte (peste, escorbuto, suicidio,... más de cien causas de muerte). Números y números pero no gráficos.

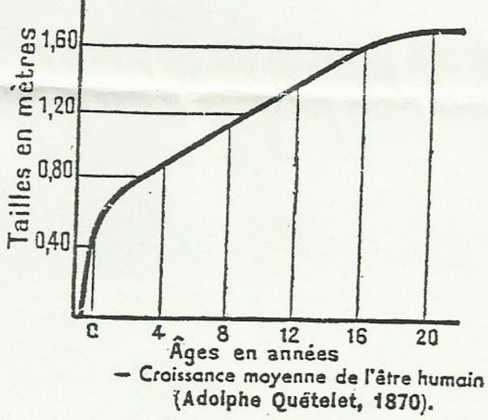
Hay que esperar muchos años para encontrar datos numéricos relativos a la muerte "vivificados" en un dibujo.

Aquí (fig. 14) vemos un gráfico, realizado en 1827, concerniente a la razón entre la población y el número de muertos en las diferentes provincias de los Países Bajos. El autor es Adolphe Quételet, un astrónomo y antropólogo belga.



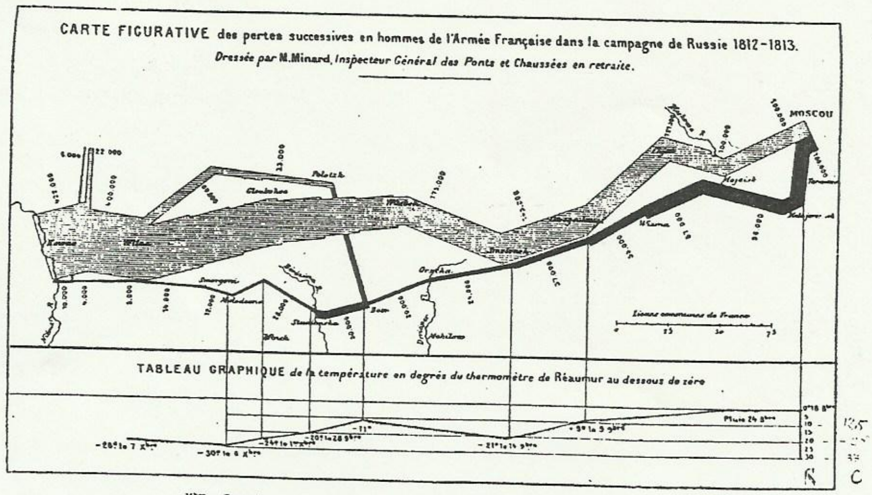
(Fig. 14)

Además a Quetelet se le debe un gráfico (fig. 15), realizado muchos años después, en 1870, que visualiza la estatura humana hasta la edad de 20 años. Quételet se refiere al hombre normal, conforme a los estadios de Gauss. Este gráfico interesa a todos: ¿está mi hijo por debajo o por encima de la estatura media? Muchas son las cuestiones que surgen observando el gráfico.



(Fig. 15)

Estamos al final del siglo pasado. Desde este momento las representaciones gráficas han tenido las más variadas utilizaciones: desde el comercio a problemas demográficos, a cuestiones médicas, a... Otros gráficos concernientes al pasado llevaban a la gente a reflexionar sobre la política. Aquí aparece (fig. 16) un impresionante gráfico realizado en 1861 por el ingeniero francés Charles Minard: es una "pintura" que representa las devastadoras pérdidas del ejército de Napoleón en la campaña de Rusia de 1812.



(Fig. 16)

Empezando por la frontera polaca-rusa, cerca del río Ni
men, el espesor de la tira gris es proporcional al número d
militares: 422.000, cuando invadieron Rusia. A su llegad
a Moscú los militares eran 100.000. La retirada está pintad
con la tira negra, donde el espesor es siempre proporcio
nal al número de hombres. La travesía del río Beresin
muestra el desastre final: solo 10.000 hombres regresaro
a Polonia.

Esta pintura, donde también las temperaturas de ese gélid
invierno están indicadas, describe con pocas líneas una his
toria terrible, y habla sin duda más claro que páginas de una
descripción escrita.

Llegamos ahora a nuestra época.

Hoy en día estamos bombardeados por representaciones gráficas de diferentes tipos: se quiere dar informaciones de todo a todos.

Y, todavía otra vez, se nos pregunta: ¿por qué estos medios visuales tuvieron tantas dificultades para penetrar en la sociedad?

¿Quién ha dificultado esta penetración? ¿Sólo unos matemáticos puristas? ¿O hay otras razones? ¿No se temía, puede ser, que poniendo al alcance de todos, a través de un medio visual, los hechos sociales más variados, la gente adquiriese la posibilidad de intervenir en problemas de ciencia, de economía, de política, cuestiones que, expresadas en números, símbolos, fórmulas, estaban reservadas a pocas personas? ■