1211

MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

SEZIONE PELIGNA - SULMONA

Incontri Mathesis 1990

Quaderno 4

SULMONA

Febbraio-Aprile 1990

SOMMARIO

LE TRASFORMAZIONI AFFINI E LA REALTÀ

Emma Castelnuovo

Introduzione

Nei programmi della Scuola Media del 1979 è stato introdotto il tema delle trasformazioni geometriche (isometrie, similitudini e altre); si fa cenno quindi alle rappresentazioni prospettiche, fotografie, pitture, ombre.

Ci si chiede: cosa fare? Alcuni dicono di iniziare dalle cose più semplici, e quindi dalle isometrie quali le traslazioni, le rotazioni, le simmetrie; io sono dell'avviso che queste trasformazioni più semplici non interessano affatto perché sono noiose. Sono dell'avviso che è opportuno riferirsi alla etimologia della parola *trasformare* che significa "cambiare forma"; ora le isometrie e le similitudini non cambiano la forma degli oggetti e quindi interessano molto meno.

Perché le trasformazioni affini, dunque?

- Non perché ci siano tante applicazioni alla realtà, ma esattamente il contrario;
- è la realtà che ci suggerisce la trasformazione affine.

Conferenza registrata e trascritta da Franco Sebastiano, non rivista dall'Autrice.

1. *Primo approccio sperimentale.*

Mentre parlo, penso ad allievi di 3ª media, ma il discorso può essere affrontato anche nel biennio successivo. Come cominciare, che dire?

Profittiamo del *sole* perché la lezione non può cominciare a freddo, ma dal vivo, quindi in una bella giornata piena di sole, spostandosi eventualmente dall'aula, nel cortile o nel corridoio.

Si chiede: quando ci si espone al sole, vediamo la nostra ombra; com'è? Sembra strano, ma ad una domanda così non rispondono tutti, ma rimangono sbalorditi come se l'osservazione della propria ombra dovuta ai raggi del sole fosse una cosa così usuale che uno non ci fa caso. Oggi i ragazzi osservano molto meno; se ne dà colpa alla televisione con le sue immagini talmente rapide che sfuggono; è un fatto comunque che tutti noi, compresi gli allievi, osserviamo molto meno.

Si chiede: la tua ombra com'è? Rispondono: può essere più lunga o più corta a seconda della inclinazione dei raggi.

Si chiede ancora: può essere anche più grossa? posso vedermi più alto e più grosso?

A questa domanda, uno rimane un po' perplesso e allora si guarda la propria ombra al sole:

- no, non può;
- l'allungamento avviene in una sola direzione; ad esempio l'ombra si allunga, ma non diventa più larga.

Questo è un primo approccio.

Vogliamo studiare le ombre prodotte dai raggi del sole su un oggetto semplice quale il *quadrettato*.

Cosa succede all'ombra del quadrettato sul terreno? Come è questa ombra? Facciamo osservare l'ombra del quadrettato, prodotta dai raggi solari e poi, tornando in aula, l'ombra del quadrettato prodotta da una lampada (sorgente puntiforme).

a) *ombra del quadrettato formato da sorgente puntiforme*

- a rette parallele non corrispondono rette parallele (è come quando facciamo un disegno in prospettiva);
- i quadrettini non vengono rappresentati come tali, ma si formano dei trapezi.

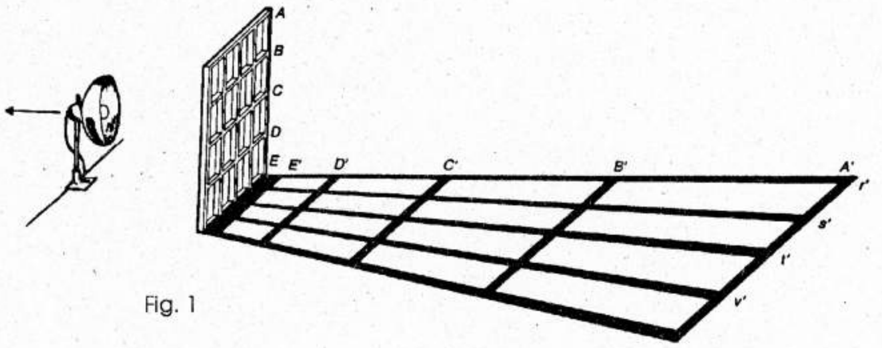


Fig. 1

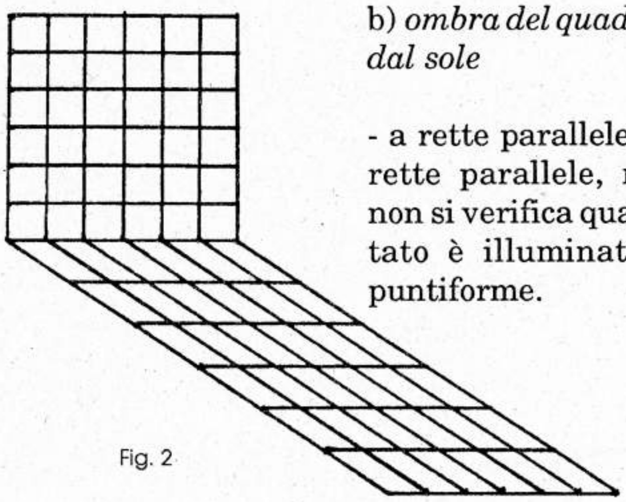


Fig. 2

b) *ombra del quadrettato formato dal sole*

- a rette parallele corrispondono rette parallele, mentre questo non si verifica quando il quadrettato è illuminato da sorgente puntiforme.

Spostando il quadrettato in una posizione qualunque, nel caso della sorgente puntiforme, non si hanno più rette parallele, cioè ai quadrettini corrispondono quadrilateri qualunque:

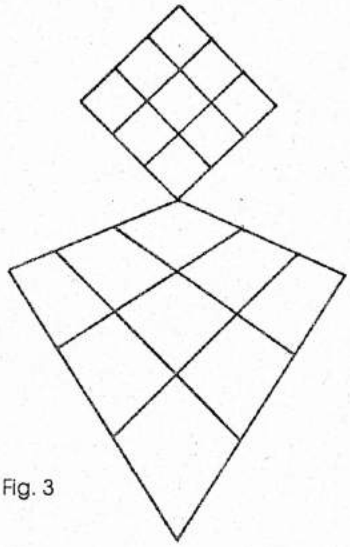


Fig. 3

Ma riprendiamo il caso della lampada dietro al quadrettato e l'ombra che si forma sul tavolo:

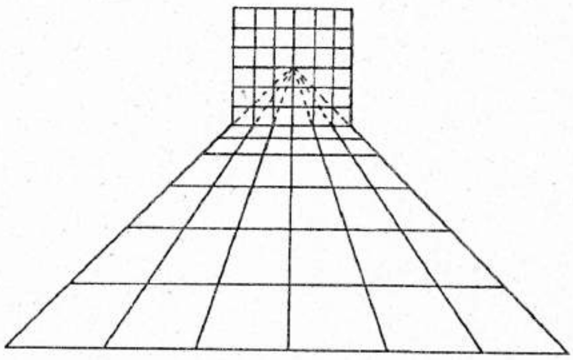


Fig. 4

- i quadretti si trasformano in trapezi;
- sembra che le rette divergenti vadano ad incontrarsi in uno stesso punto.

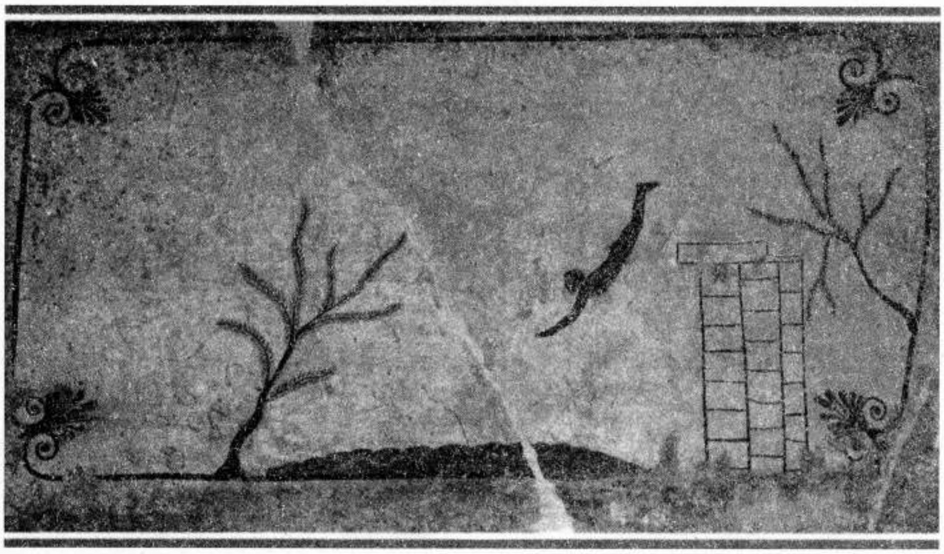
Questa è una trasformazione *proiettiva* (prospettiva), mentre se la lampada si allontana sempre di più dietro il quadrettato, e quindi fa l'effetto del sole, allora le rette tendono al parallelismo e si ha una trasformazione *affine* (affinità).

La trasformazione affine appare quindi come un caso particolare della trasformazione proiettiva.

2. *Annotazioni storiche*

Ma cosa è successo nella *storia della matematica* e soprattutto nella *storia dell'arte*? La matematica è venuta dopo l'arte?

È nel 400-500 che i pittori, volendo rappresentare sulla carta gli oggetti a tre dimensioni, si sono posti il problema di come dare la sensazione della profondità dello spazio. Ma prima?
Ecco alcune testimonianze.



a) 470 a.C. a Paestum: *Salto dal trampolino*; il trampolino è piatto.

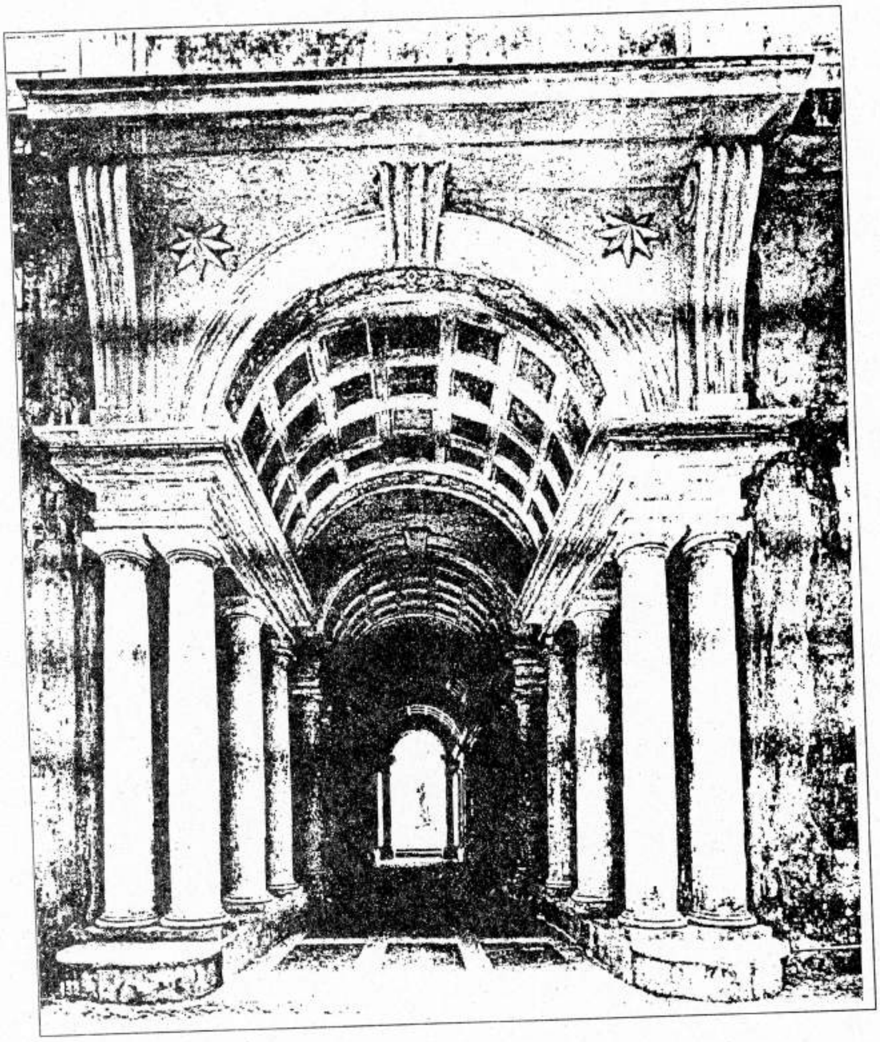
b) Stampa del Medioevo in cui un tizio prende con il compasso la misura di un cerchio: il cerchio è piatto e frontale.

*c)*1344: Ambrogio Lorenzetti nel quadro *L'Annunciazione* che ora si trova a Siena, fissava alcune regole della prospettiva; il pavimento è fatto benissimo, ma è usata la colonna e i due soggetti sono come squilibrati rispetto al pavimento.

d) 1481: Perugino, *Consegna delle chiavi.*

Ma tutto questo è prospettiva. Quando sono state messe in evidenza le proprietà delle trasformazioni affini?

e) Uno dei pochi quadri del 500 in cui si vede lo sforzo del pittore di far risaltare il parallelismo dalla affinità è una stampa del Dürer *(San Girolamo nello studio)*: a infissi paralleli della finestra corrispondono ombre parallele sulla parete ma è una delle poche opere in cui si nota lo sforzo di mettere in evidenza le proprietà delle trasformazioni affini; l'obiettivo, allora, era quello di dare l'idea della profondità dello spazio.



f) L'ossessione della prospettiva in architettura si manifesta nella galleria del Palazzo Spada a Roma, costruita dal Borromini: la gelleria è circondata da un colonnato e in fondo c'è una statua alla distanza di 8,60m; ma l'impressione è che essa sia molto più lontana, a più di 20m. Per dare questa impressione le colonne sono via via più basse, allo scopo di accentuare l'effetto della prospettiva; il soffitto a volta non è orizzontale, ma va in discesa; (è ironia del Borromini o un'accentuazione delle regole per metterle bene in evidenza?).

g) Vera ironia è un'opera degli inizi del 700 del tedesco William Hogarth intitolata *La falsa prospettiva*: non c'è una cosa fatta bene (assillo di mettere in evidenza le regole della prospettiva con una falsa prospettiva).

3. *Le proprietà dell'affinità.*

Torno alla matematica e con gi allievi sono sempre al sole: anche se tutto sembra variare, continuando ad osservare il quadrettato e la sua ombra si scopre facilmente qualcosa che non cambia:

- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- su ogni lato del quadrettato ci sono 6 segmenti uguali e nelle ombre di questi ci sono 6 segmenti uguali tra di loro, ma non uguali a quelli del quadrettato; quindi ilrapporto tra segmenti corrispondenti è costante, purché i segmenti appartengano alla stessa retta o a rette parallele.

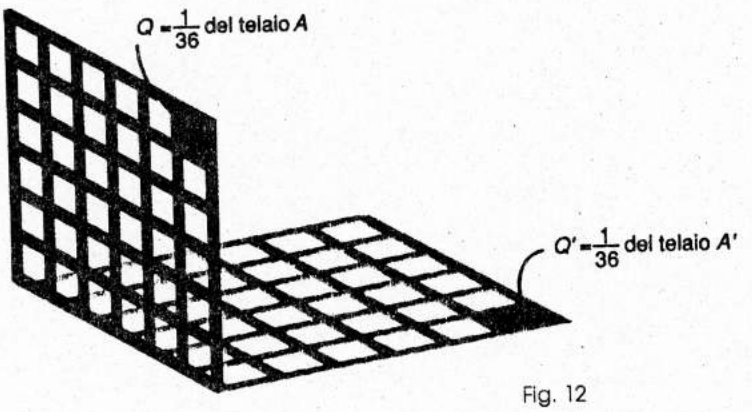


Fig. 12

Accade questo se illumino il quadrettato con una lampada? No! Basta riprendere la figura 1 per rendersene conto.

- al quadrettato formato da 36 quadratini, tutti uguali tra loro, corrisponde un'ombra formata da 36 parallelogrammi tutti uguali tra loro.

È facile verificare che anche questo non accade se illumino il quadrettato con sorgente puntiforme.

Ma allora, quali sono le proprietà delle trasformazioni affini? Eccole:

a) a rette parallele corrispondono rette parallele;
b) è costante il rapporto tra segmenti sulla stessa retta;
c) è costante il rapporto delle aree;
d) a rette corrispondono rette.

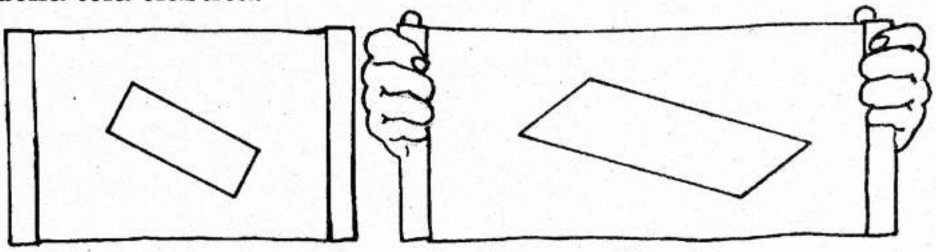
Quest'ultima proprietà è difficile da far trangugiare agli allievi, perché sembra ovvia; allora subito un controesempio con l'ombra di una penna proiettata su un barattolo (ombra curva). L'importanza di quest'ultima proprietà sta nel fatto che è l'unica proprietà che le trasformazioni affini hanno in comune con le trasformazioni proiettive; le altre 3 cadono.

4. *Le equazioni dell'affinità*

Cosa ci facciamo con le trasformazioni affini e quali esercizi si possono proporre. Finora abbiamo solo osservato; ora dobbiamo *matematizzare* il fenomeno. Come?

Queste idee mi sono state suggerite dai miei allievi della media perché sempre li ho invitati a guardare la propria ombra proiettata dai raggi del sole dietro le spalle.

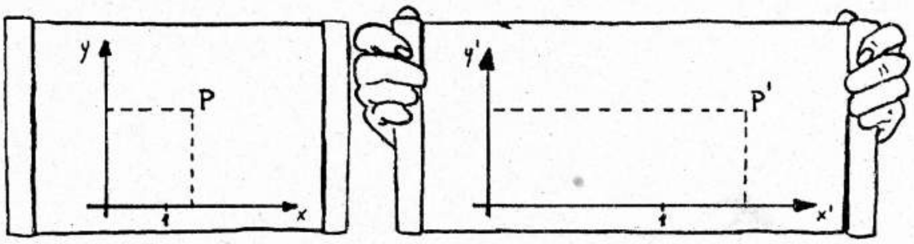
La nostra ombra verso il tramonto diventa sempre più lunga, a mano a mano che il sole si abbassa sull'orizzonte; qualcuno ha detto che è come se la nostra ombra venisse stirata, come se fosse un elastico. L'idea dell'elastico ha fatto venire in mente l'idea della tela elastica.



Il rettangolo diventa parallelogramma Fig. 13

L'idea della tela elastica fa nascere l'idea di come matematizzare il fenomeno. Mi spiego subito.

È da precisare che "stirare" è preso nel senso di distendere, e non nel senso di stirare una camicia (!).



Cambia l'ascissa del punto in funzione della forza della "distensione" (in questo caso di forza 3, l'ascissa è triplicata). Fig. 14

Le coordinate di P' cambiano: la x cambia, la y rimane la stessa; e allora i ragazzi immediatamente si precipitano a dire:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = y \end{cases}$$

e, in generale:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}$$

Ma è chiaro che posso fare lo stesso discorso stirando in direzione dell'asse delle y e, in generale, si avranno le equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny \end{cases}$$

E se con il pensiero o con altri tipi di tela elastica io stirassi con 4 mani, avrei le più generali equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$$

È istantanea la reazione dei ragazzi: e se m = n?
È istantanea la loro risposta: è la stessa forza con cui stiro in direzione delle x e delle y, e allora se ho un quadrato, questo quadrato non può cambiare di forma, è solo più grande:
ho la *similitudine*.

5. *Esercitazioni ed ampliamenti*

È interessante ora fare qualche esercizio:

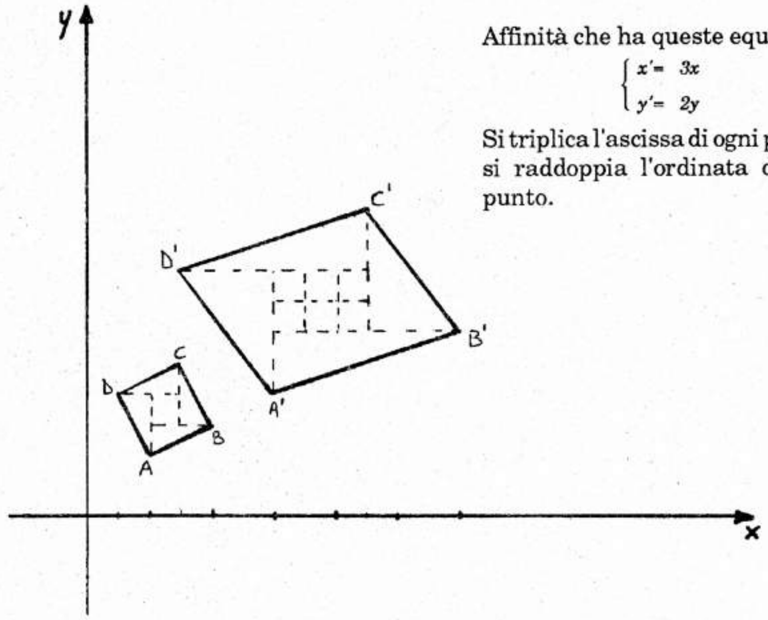


Fig. 15

Affinità che ha queste equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Si triplica l'ascissa di ogni punto e si raddoppia l'ordinata di ogni punto.

Si dice: guarda, è venuto un parallelogramma!

È evidente, non poteva non venire; non stiamo facendo una trasformazione proiettiva, ma a rette parallele devono corrispondere rette parallele; quindi viene un parallelogramma che potrebbe essere in alcuni casi un rettangolo, un rombo, ma sempre un parallelogramma.

È evidente, riferendoci alla stessa figura, vedere cosa succede all'area:

Area quadrato = 5
Area figura trasformata = 30

Perché? Come? Era prevedibile la cosa? Sì.
La figura trasformata è trasformata con le equazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$$

e quindi si capisce che l'area della nuova figura sarà 6 volte l'area della figura primitiva.
In generale quindi il rapporto delle aree è dato da:

$$\frac{A'}{A} = mn$$

Tutto questo è stato detto pensando sempre di stirare la tela, di produrre dilatazioni; ma io potrei pensare di eseguire il disegno quando la tela è stirata; poi lascio andare la tela e la figura si contrae; in questo caso i valori di m e n che sinora abbiamo considerato sempre maggiori di 1, saranno minori di 1.
Ad esempio, se $m = 2$, $n = 1/2$, si hanno le equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Cosa succede? Le aree sono uguali:

$$\frac{A'}{A} = 2.\frac{1}{2} = 1 \quad , \quad A' = \left(2.\frac{1}{2}\right)A$$

6. *Considerazioni antropologiche e sociologiche*

Tutto ciò che vado a dire in una classe è balordo dirlo così. Tutto questo prende tempo, non è questione di un'ora sola.

È rapidissimo arrivare alle equazioni dell'affinità, ma per padroneggiarle occorre una gran moltitudine di esercizi di tutti i tipi, esercizi che, tra l'altro, piacciono moltissimo ai ragazzi perché
- la geometria analitica piace moltissimo;

- il fatto di costruire la figura trasformata interessa tantissimo perché si accorgono immediatamente se hanno sbagliato (se non si conserva il parallelismo).

Il tutto può essere fatto anche in un corso alle Superiori con qualcosa in più: scoprire, ad esempio, un modo semplice per calcolare l'area dell'ellisse.

Ma torniamo non all'arte, ma ad alcune considerazioni.

a) Il matematico biologo D'Arcy Thompson, intorno agli anni '20-'25, in una sua opera *Forma e nascita* (pubblicata da Feltrinelli) sostiene che la forma dello scheletro di molti animali è cambiata, nel corso della evoluzione, secondo le regole della affinità. Si fa, in particolare, il caso dei pesci.

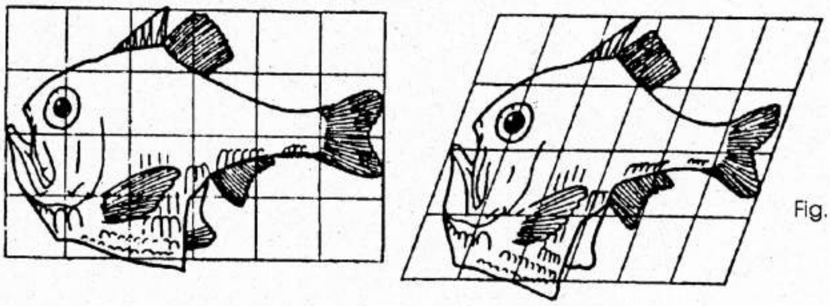


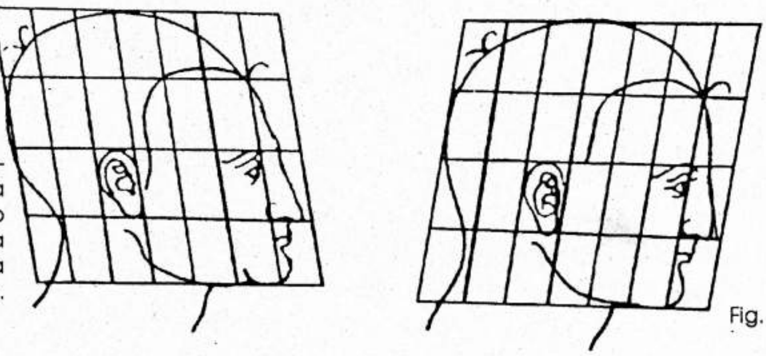
Fig. 16

Argyropelecus olfersi

Sternoptyx diaphana

Un pesce che sembra essersi trasformato in un altro per affinità durante l'evoluzione, secondo Thompson.

Queste idee furono contestate e bollate come "pazzie"; ma i pazzi completi ad un certo punto tornano fuori; è recentissimo uno studio comparso su una rivista americana sul profilo del teschio



La trasformazione di una testa d'uomo studiata da Dürer e ripresa da Thompson.

Fig. 17

del bambino e dell'uomo che costituisce una ripresa delle teorie di D'Arcy Thompson.

b) Le trasformazioni affini vengono studiate come un caso particolare di trasformazioni proiettive (nell'arte del '400-'500); ma in matematica lo studio è stato fatto dopo: nel '600 per le trasformazioni proiettive, nel secolo scorso per le equazioni dell'affinità come caso particolare delle trasformazioni proiettive; ma è solo alla fine del secolo scorso che le trasformazioni affini hanno trovato una loro indipendenza. E forse la storia e l'importanza delle trasformazioni affini inizia proprio ora attraverso la riproduzione di figure con il computer.

c) Non è vero che tutto il mondo sia pertecipe della cultura di tutti.
Infatti, in seguito ad una esperienza personale di insegnamento nel Niger, in una classe di 40 allievi, ho constatato che:
nel Niger si continua a morire sempre più di fame e di miseria; l'analfabetismo è dell'85% e si capisce bene che quando si muore di fame e di sete, non è che uno pensa ad andare ad imparare a leggere e a scrivere.
Ho scoperto che, facendo l'esperienza al sole, i ragazzi non facevano l'osservazione dell'analogia e della differenza con un disegno di un pavimento a piastrelle quadrate, nonostante che gli stessi ragazzi fossero abituati ad intervenire spesso.

Nel Niger non conoscono la prospettiva

Questa conclusione è stata poi verificata parlando con diverse personalità e notando come i ragazzi non avessero mai fatto l'osservazione di come un viale in lontananza sembra restringersi.

Esiste tuttavia qualche caso isolato di rappresentazioni prospettiche in antichissimi graffiti.

Non è una mancanza di intelligenza e di sensibilità ma, come è stato affermato, la miseria della gente non porta alla pittura, caso mai porta alla musica.