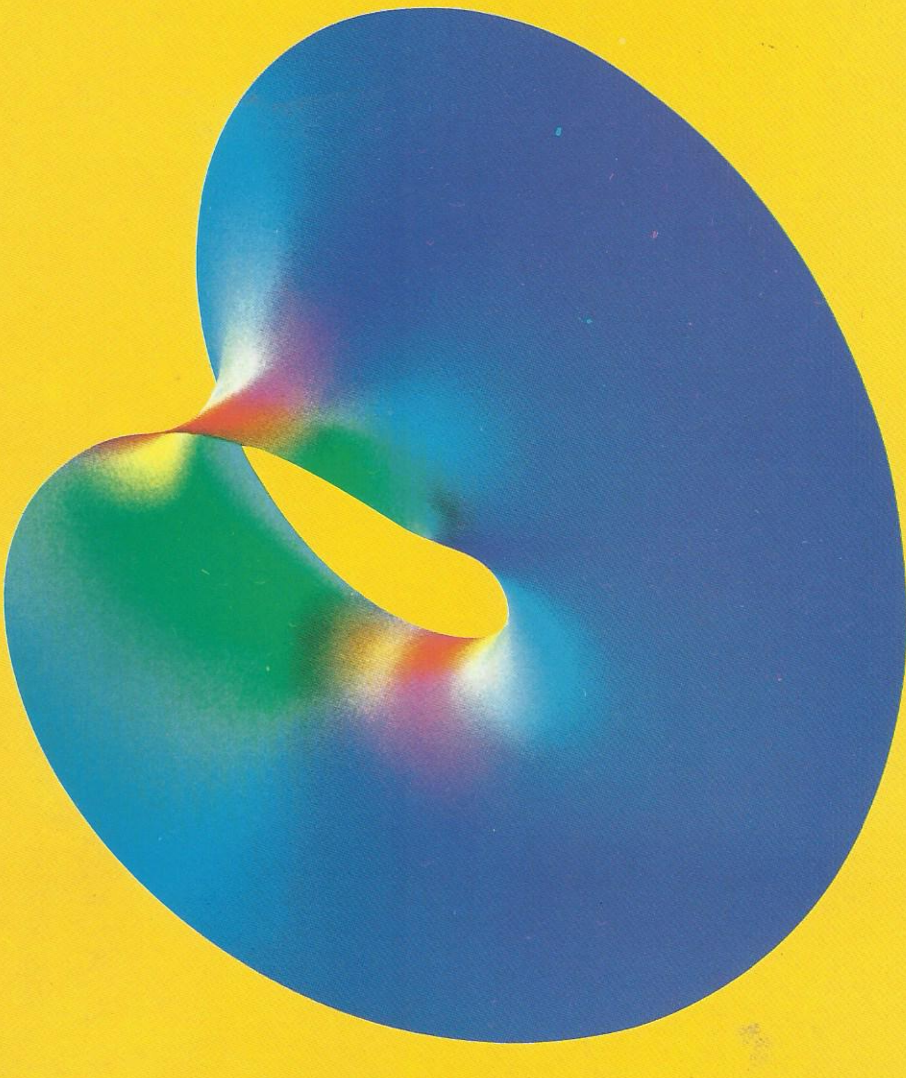
I° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica
Sulmona 25-26-27 marzo 1993

INSEGNAMENTO/APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA:
LINGUAGGIO NATURALE E LINGUAGGIO DELLA SCIENZA

a cura di Bruno Jannamorelli



Edizioni QUALEVITA

QUALE MATEMATICA PUÒ STIMOLARE LA FANTASIA?

EMMA CASTELNUOVO
Insigne esperta di Didattica della Matematica - Roma

Occorre, prima di tutto, chiarire il titolo. Il termine meno chiaro è senz'altro "la fantasia".

Fra le varie definizioni di fantasia, mi riferirò a questa: "fantasia è la facoltà della mente che conduce a interpretare in modo creativo i dati forniti dall'esperienza". Questa definizione si trova brillantemente illustrata nei lavori di un grande matematico francese del Trecento: Nicole Oresme. È proprio a partire da Oresme che, in francese, la parola '*fantasie*' è cambiata in '*imagination*', termine che illustra meglio la facoltà creativa della mente.

Nella lingua italiana il termine 'fantasia' è molto vago. A noi piace questa vaghezza... È proprio l'imprecisione del linguaggio che porta a non capire problemi e fatti che ci capitano spesso. D'altra parte, sono queste incomprensioni che ci conducono a lavorare di fantasia, ad astrarre per scoprire così delle leggi matematiche. Gli esempi che porterò vogliono illustrare quanto ho detto.

1° esempio: il problema delle Pentole

È un problema di tutti i giorni. Ho messo l'acqua sul fuoco per cuocere la pasta; poi, decido di mettere gli spaghetti. Allora va meglio una pentola più stretta ma più alta. Travaso l'acqua e... Perchè l'acqua che era nella pentola bassa non è contenuta in quella alta?

Eppure le misure (sul fondo delle pentole è indicata la lunghezza del diametro in centimetri) si compensano; sono:

altezza	16 e 8
diametri di base	12 e 24

Fig. 1

Per facilitare il confronto delle pentole penso a due cilindri

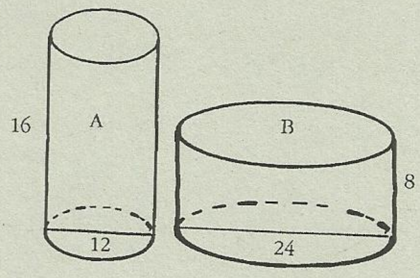


Fig. 2

Inserisco uno nell'altro

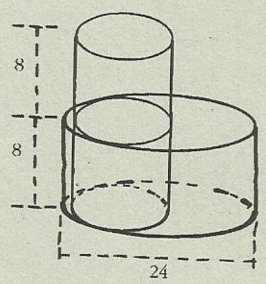


Fig. 3

Spezzo a metà il cilindro alto

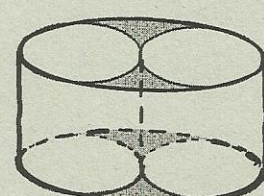


Fig. 4

e capisco: c'è una zona "vuota" fra il cilindro largo e i due più stretti e di uguale altezza.

I cilindri con basi e altezze che "si compensano" hanno sì la stessa superficie laterale ma i volumi risultano diversi: contiene di più quello basso e largo. Viene in mente un passo di Galileo: «Il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco per tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito...».

Da un problema si è condotti a un altro: e se due contenitori hanno lo stesso volume, come risulterà la superficie?

Cominciamo da "oggetti" molto semplici. Lavoriamo con 8 cubetti uguali. Si possono disporre uno sull'altro, oppure accostare due file di 4, o, anche costruire un cubo.

Il volume è dunque uguale a 8. E la superficie? Anche senza fare calcoli è facile rendersi conto che la superficie è "più esposta all'aria" quando i cubi sono disposti a torre; la superficie è invece più piccola se i cubetti sono "più raccolti", più combacianti. Si capisce così che è il cubo che fra i vari parallelepipedi di ugual volume presenta la *superficie minima*; è il cubo che risolve un problema di ottimizzazione.

Ci si chiede: sarà sempre il cubo ad avere la superficie minima fra tutti i solidi di ugual volume con forme diverse da quella di parallelepipedi? È chiaro che, ora, il materiale con cui si lavora non può consistere solo in un certo numero di cubetti; ora, occorre un materiale tipo argilla.

Se abbiamo un cubo d'argilla, viene spontaneo, per rendere la superficie più compatta, comprimerlo fra le due mani o verticalmente o orizzontalmente. La forma va via via rotondenggiandosi...; sarà la sfera ad avere la superficie minima?

C'è una bella dimostrazione di Leonida Tonelli (1915) che sembra seguire l'atto manuale. Si basa sul Principio di Cavalieri e sugli indivisibili di Torricelli. Basta seguire il passaggio da una superficie all'altra in qualche caso per rendersi conto dello spirito della dimostrazione.

Si parte da un cubo. Si passa dal cubo a un cilindro che ha un asse di rotazione, r, perpendicolare al piano di base del cubo. La base del cilindro è un cerchio equivalente alla base del cubo; l'altezza del cilindro è uguale a quella del cubo.

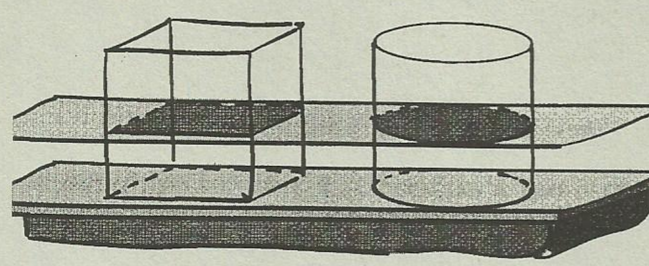


Fig. 5

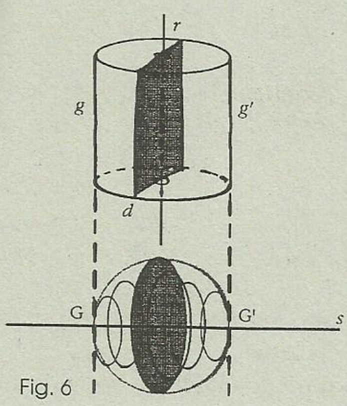


Fig. 6

I due volumi sono quindi uguali per il Principio di Cavalieri. Ma la superficie del cilindro è minore perchè si può pensare formata da fili circolari mentre la superficie del cubo si può pensare formata da fili disposti a quadrato, e se un cerchio è equivalente a un quadrato il suo perimetro è minore.

Adesso si opera sul cilindro. Si passa dal cilindro a una nuova superficie di rotazione; l'asse di rotazione è, ora una retta perpendicolare all'asse r. La nuova superficie viene costruita così: si seziona il cilindro con piani perpendicolari alla base; si hanno dei rettangoli. Per ogni rettangolo si costruisce un cerchio equivalente avente il centro sull'asse s. La superficie che si ottiene è equivalente al cilindro per il Principio di Cavalieri. Ma l'area della sua superficie è minore di quella del cilindro perchè i fili circolari delle sezioni hanno una lunghezza minore del perimetro dei rettangoli corrispondenti.

Si continua... Si prende come nuovo asse l'antica retta r perpendicolare ad s, e poi... Si tende a una superficie che ha due assi di rotazione perpendicolari fra loro. Ora l'unica superficie che ha due assi di rotazione, fra loro perpendicolari è la *sfera*. Ecco, come viene, tradotta in matematica l'intuizione avuta lavorando con l'argilla!

Ripensiamo al cammino fatto:

esperienza → fantasia → teoria matematica

2° esempio: in viaggio dall'Europa all'America

Ecco una cartina dell'Alitalia con le rotte aeree. Ma perchè per andare da Milano (latitudine un po' più di 45°) a Los Angeles (latitudine un po' meno di 35°) si sale tanto al Nord? E perchè è scritto che le distanze "sono prese lungo i cerchi massimi?

Fig. 7

Perchè in un prospetto delle linee tailandesi (fig. 8) è scritto "per andare da Roma a Bangkok impieghiamo solo 10 ore perchè la rotta segue la linea più breve e cioè un arco di cerchio massimo"?

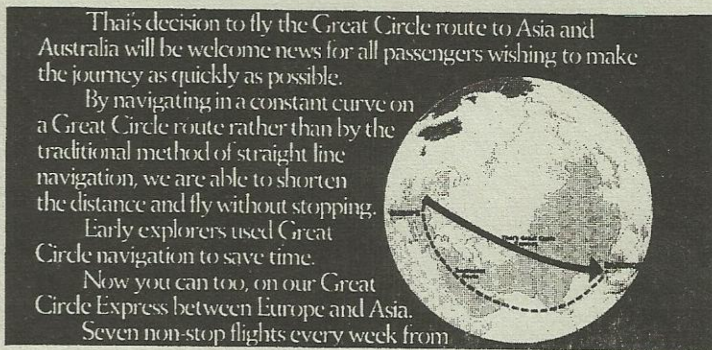


Fig. 8

La via più breve fra due punti è - lo sappiamo - un tratto di retta.

E se qualcuno non ci crede, basta tendere un filo elastico fra due chiodi piantati su una tavoletta (fig. 9).

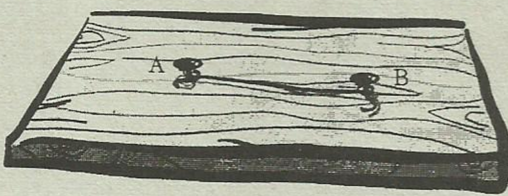


Fig. 9

Spostiamo ora l'elastico senza alzarlo dalla tavoletta, e poi lasciamolo andare. Esso torna nella posizione di prima indicando così che la tensione è minima nel tratto rettilineo. Questo, sul piano.

E sulla sfera? Disegnamo su una palla un cerchio massimo, cioè un cerchio che ha centro nel centro della sfera. Sulla terra sono per esempio cerchi massimi l'equatore e i meridiani.

Fissiamo un filo elastico a due punti qualunque di un cerchio massimo (fig. 10). Spostiamo poi l'elastico sulla superficie sferica; formiamo così tanti altri archi passanti per quei due punti.

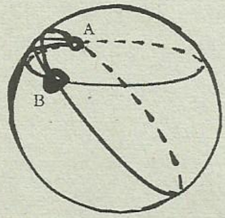


Fig. 10

Se il filo viene lasciato andare, ci si accorge che torna a disporsi sul cerchio massimo, indicando così l'arco più breve. Ci si convince così che gli archi di cerchi massimi indicano il tratto più breve sulla sfera.

Ho fatto degli esperimenti; mi sono stati suggeriti da un viaggio aereo da un continente all'altro. Ho capito che è diversa la geometria della sfera da qualla del piano. E questa diversità mi porta a "fantasticare".

Se le rette sono ora dei cerchi massimi, non è più vero che due rette possano essere parallele sulla superficie terrestra: due cerchi massimi, infatti, s'incontrano sempre, anzi si incontrano in due punti (fig. 11). Tutta la geometria mi cambia... sotto i piedi!

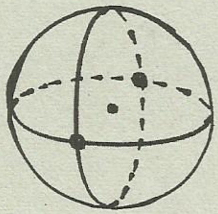


Fig. 11

È proprio per questo contrasto fra due geometrie, quella della piccola zona in cui vivo e quella di tutta la terra, che sento il bisogno di riordinare le idee. È ora che riesco a cogliere il significato delle premesse - gli assiomi - stabilite all'inizio degli "Elementi" di Euclide; ed è solo ora che capisco a fondo la storia dei tentativi condotti per secoli allo scopo di dimostrare il 5° assioma, cioè il postulato delle parallele, sulla base dei primi quattro.

È solo ora che capisco la costruzione "in astratto" di geometrie non euclidee. La geometria della sfera è una geometria non euclidea. Ma non e astratta perchè è la geometria della terra!

Fa impressione, oggi, rileggere alcune dichiarazioni di Janos Bolyay. Scrive, nel 1823 "Ho creato dal nulla un nuovo universo"; e, nel 1832: "Ho creato la scienza dello spazio assolutamente vera". Tutto era chiaro alla metà dell'Ottocento, ma solo per pochi. Oggi, tutto è chiaro, per tutti.

Un'esperienza, un viaggio, porta a fantasticare e... a ricostruire una storia e una teoria matematica.

3° esempio; dalla lettura dei giornali: la crescita della popolazione

Un articolo:"la bomba demografica". Era scritto: "Oggi siamo 5 miliardi e 500 milioni; negli ultimi 20 anni siamo aumentati di 1 miliardo e 700 milioni. Allora, se il tasso di crescita rimane lo stesso, fra 40 anni la popolazione dovrebbe essere più del doppio dell'attuale".
Per curiosità si fanno i calcoli, e... non tornano!
Ecco i calcoli che siamo condotti a fare:

5 miliardi e 500 milioni (popolazione attuale) +

3 miliardi e 400 milioni (aumento in 40 anni) =

8 miliardi e 900 milioni

E non è più del doppio dell'attuale!

Perchè i calcoli non tornano? Se il tasso rimane lo stesso, l'aumento non dovrebbe essere proporzionale?

Nello stesso quotidiano, nella cronaca di Roma, c'è un articolo allarmante dal titolo "attenzione al latte!"

Il latte pastorizzato deve essere tenuto a una temperatura non superiore ai 4° centigradi, e invece... spesso sta sul banco del negozio!

Nell'articolo si parla di carica batterica e si dice che il numero dei batteri aumenta in modo rapidissimo: da 1 a 2, da 2 a 4, da 4 a 8,...

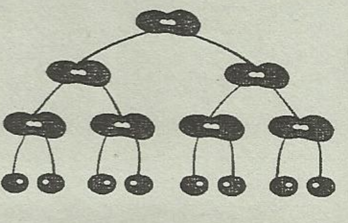


Fig. 12

È una popolazione, quella dei batteri, proprio come quella degli uomini. Ma, quella dei batteri, è più facile da capire.

Scrivo una tabella indicando con *x* il n° delle scissioni e con *y* il numero dei batteri

x	y
0	1
1	2
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
.	.
.	.
x	2^x

e arrivo a una legge

$$y = 2^x$$

È la legge esponenziale.

Ecco un grafico (per punti) sull'aumento del numero dei batteri

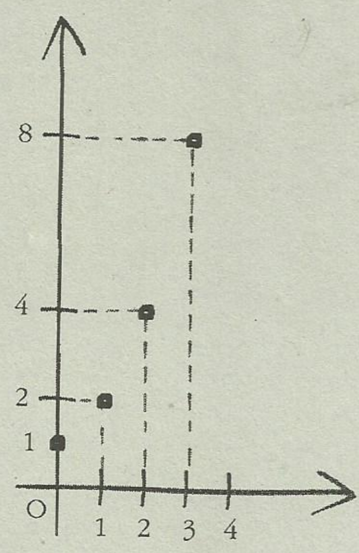


Fig. 13

Ed ecco un grafico sull'aumento della popolazione nel tempo

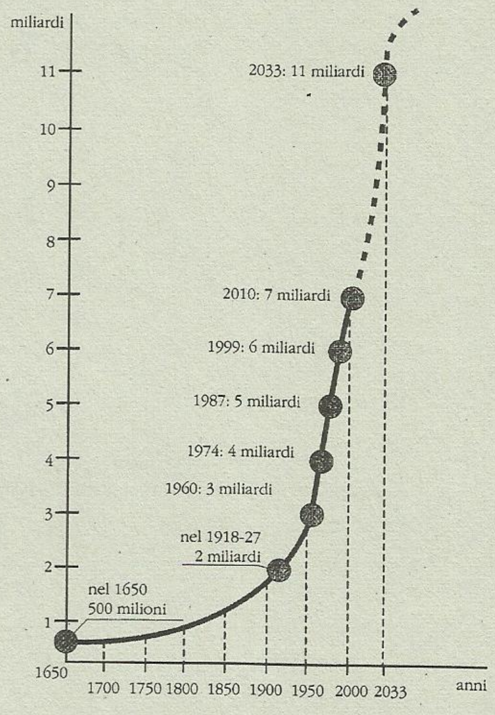


Fig. 14

La legge esponenziale la ritrovo nell'aumento del capitale depositato in banca. È proprio il mondo finanziario che porta a scoprire una regola sul raddoppiamento del capitale depositato al tasso *r* al trascorrere del tempo *t*; si trova

$$t.\ r \cong 70.$$

È una formula così semplice che si dà anche il tempo di raddoppiamento della popolazione!

Riflettiamo:

un articolo → interesse e fantasia → matematica leggi teoriche e leggi sperimentali

Mi sono riferita in tutto il mio discorso alla gente, a come interessare gli adulti a "cose" di matematica. Ma è chiaro che, a maggior ragione, l'osservazione attenta dei fatti che ci capitano nella vita di ogni giorno, possono e debbono interessare anche i nostri allievi. Occorre dar loro, attraverso qualche esempio, uno stimolo per guardarsi intorno, per scoprire *la matematica nascosta*. Si tratta di scuotere le loro facoltà d'osservazione, *la loro fantasia*, troppo spesso assopita da luci accecanti e da rumori assordanti. È la fantasia che, allora, li condurrà insensibilmente a sviluppare *una teoria matematica*.