**Assemblea nazionale MCE - Firenze, dicembre 2015**

# LABORATORIO DI MATEMATICA

**Donatella Merlo NRD Torino**

Il laboratorio ha lo scopo di evidenziare alcuni aspetti fondamentali del curriculum di matematica per mostrare come sviluppiamo di solito il discorso dal punto di vista del metodo e dei contenuti.

Le proposte che farò si riferiscono alla mia esperienza formativa con il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Torino condotto dal Ferdinando Arzarello, che dura da oltre 25 anni, e alla più recente collaborazione con Maria Cantoni, ex docente di scuola media nonché membro di diversi gruppi di ricerca, che con me ha svolto e sta svolgendo diversi corsi per i docenti di scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di I grado sia a Torino che fuori regione.

Anche Giuseppina Marastoni aveva un tempo intrecciato rapporti con il Nucleo di Arzarello e io stessa avevo lavorato con lei e con un gruppo di docenti a Verona portando la mia esperienza. In primavera uscirà la riedizione del libro di Giuseppina 'Facciamo geometria' curato da Silvana Mosca, da Elisabetta Vio e da me. Quindi mi sembra doppiamente significativo partire ora da questo settore della matematica: la **geometria.**

Ciò che dirò sulla geometria farà riferimento in particolare agli ultimi lavori che ho svolto con Maria Cantoni, quindi mi esprimerò al plurale.

## Alcuni aspetti fondamentali della geometria

Il rapporto che da alcuni anni abbiamo intrecciato con le scuole, in particolare le primarie, ci hanno fatto ripensare complessivamente a come viene proposta la geometria a livello elementare e come il modo di proporla influisca sulla concettualizzazione degli allievi.

Ovunque abbiamo trovato le stesse problematiche e addirittura le stesse proposte di attività che ricalcano fedelmente quanto viene proposto nei libri di testo per la primaria e la media. Quindi siamo tornate alle origini e abbiamo provato a pensare da dove potesse provenire la generale incapacità degli allievi dei due ordini scolari di produrre ragionamento geometrico.

Il nodo è come sempre costituito dagli insegnanti.

La scuola attuale è molto lontana da ciò che Giuseppina sentiva e cercava di trasmettere ai suoi allievi. Allora si è peccato forse in astrazione ma le ricerche di quel tempo, il riferimento al Dienes e a Piaget, portavano in quella direzione. Ora, al contrario, è difficile far arrivare i bambini all'astrazione perché prevale in tutte le attività della scuola primaria sia l'aspetto manipolativo e corporeo sia il riferimento costante all'esperienza concreta, come se questo bastasse a costruire concetti che durino nel tempo e, soprattutto, che servano a qualcosa nella scuola media, dove invece ci si attende un livello di astrazione che prima non è stato raggiunto per i motivi che vedremo tra poco. Il risultato è che alla media si ripetono le stesse esperienze della primaria non potendo dare nulla per scontato. Tutto sembra ancora da costruire, anche i fondamenti: punto, retta, piano.

La geometria deve partire dalla realtà e da fatti concreti ma poi se ne deve inevitabilmente allontanare per poter raggiungere il livello di generalizzazione e di astrazione necessario a far sì che gli oggetti geometrici possano essere applicati non a una sola realtà ma a tutte le infinite realtà che lo richiedono.

Questo livello di astrazione difficilmente viene raggiunto se non c'è questa fondamentale consapevolezza nella testa degli insegnanti e se le pratiche didattiche consolidate, che vanno in altre direzioni, non vengono messe in discussione.

Il ruolo del MCE è sempre stato quello di spingere all'innovazione. In questo caso non si tratta tanto di innovare ma di mettere le cose nella giusta prospettiva riappropriandosi della disciplina e del suo ruolo anche nella vita di tutti i giorni.

Il laboratorio comincia mettendo in evidenza un nodo disciplinare e come si possa sciogliere attraverso un certo tipo di didattica. In seguito i partecipanti saranno messi alla prova direttamente con la richiesta di risolvere un problema. L'intento è duplice: mostrare una metodologia di lavoro per problemi (ma non qualsiasi) e far capire come le conoscenze che ciascuno ha, o non ha, portino in direzioni diverse il lavoro successivo. Si tratta di imparare a ragionare su 'che cosa manca per….' oppure essere in grado di capire, ad ogni livello scolare, fin dove si può arrivare. Su queste domande si costruisce giorno per giorno il percorso curricolare.

L'insegnante infatti non può definire a priori dei percorsi, sono gli allievi che costruiscono il percorso. Questo richiede certe attenzioni e certe capacità di ascolto che non fanno parte della pratica didattica comune, oltre ovviamente ad una competenza disciplinare che vada molto al di là di quella da raggiungere con gli allievi. Purtroppo spesso non solo manca un metodo ma anche la competenza disciplinare si rivela insufficiente.

Secondo noi occorre agire su tre fronti: (1) ragionare sul curriculum per individuare i punti di snodo, (2) confrontarsi sulla metodologia e (3) aumentare la propria competenza disciplinare.

Il nostro modello formativo propone questi tre segmenti integrati dentro **percorsi di ricerca-azione** che 'smuovono molto le acque' perché mettono in discussione tutto il 'fare scuola' e richiedono da parte degli insegnanti un impegno consistente, anche perché viene sempre richiesta una documentazione del lavoro svolto comprendente sia i lavori originali degli allievi sia le riflessioni personali degli insegnanti che vengono poi confrontate e integrate con quelle dei formatori e dei colleghi della **comunità di pratica**.

Ma come si costruisce la comunità di pratica?

Sul luogo, nelle scuole partecipanti alla ricerca azione, si devono costituire dei **gruppi di lavoro** che si incontrino periodicamente (autogestione) per progettare, monitorare, verificare quanto succede nelle classi e soprattutto per confrontarsi sulle difficoltà, sui successi e sugli insuccessi. Il contatto con i formatori avviene in gran parte a distanza (anche per problemi logistici) ed è continuo e individualizzato per cui si utilizza costantemente la **piattaforma Moodle**. Ogni insegnante ha un rapporto diretto con i formatori tramite i forum delle piattaforma e contemporaneamente interagisce con i colleghi che ricevono la notifica di ogni intervento fatto e possono intervenire con i loro commenti. Questa è la parte più difficile da ottenere ma, quando c'è, cambia il livello di coinvolgimento nella formazione e quindi i risultati.

Al termine del percorso, chi ha partecipato attivamente ha acquisito gli strumenti necessari per marciare con le proprie gambe, prima sui contenuti sperimentati e poi, gradatamente, su altri.

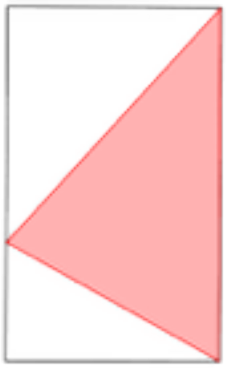
## Un esempio di didattica… e di formazione

**PIÙ MOZZARELLA O PIÙ POMODORO?**

**Un pizzaiolo fantasioso espone diversi tranci di pizza.**

**Una parte (bianca) contiene solo mozzarella, un’altra (scura) solo pomodoro.**

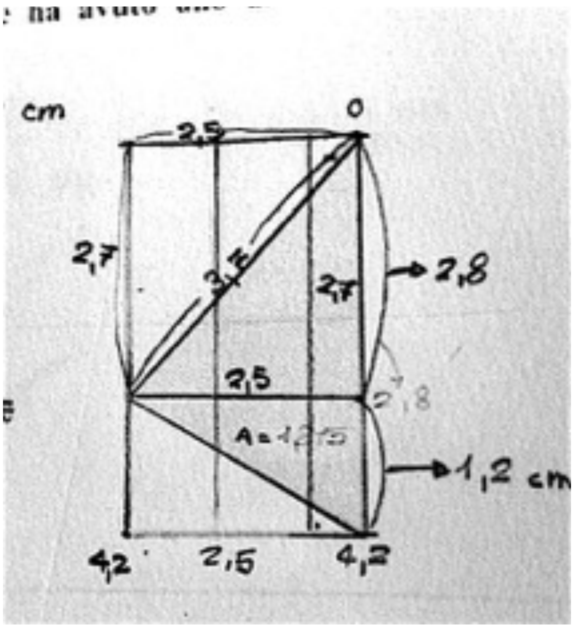
**Il trancio di pizza qui disegnato ha più mozzarella o più pomodoro? Perché?**

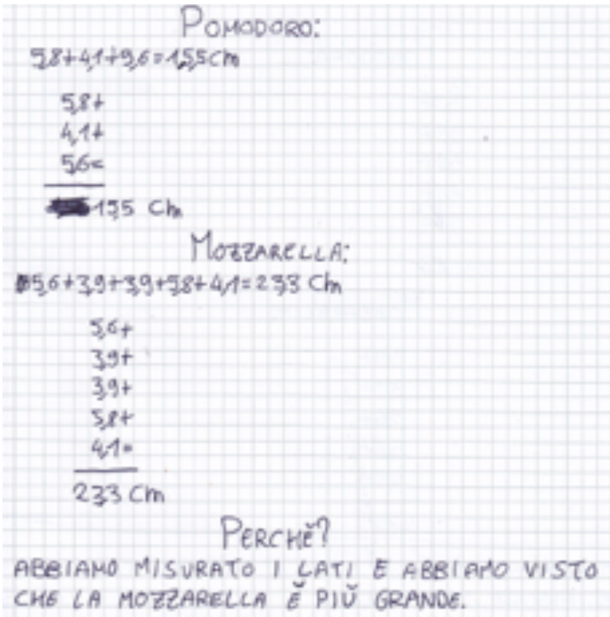


**a) Le strategie degli allievi**

Di fronte a questo problema i bambini reagiscono in diversi modi utilizzando diverse strategie.

Qualcuno, non vedendo le misure, si affretta e trovarle, misura con il righello il disegno e le scrive sulla figura ma poi non arriva a nessuna conclusione oppure dice che la mozzarella è più del pomodoro perché somma i perimetri dei due triangoli di mozzarella e li confronta con quello del pomodoro. Sono condizionati sia dall’uso continuo della misura nei problemi con le figure sia dalle regole del **contratto didattico**[1] per cui un problema deve avere dei numeri, se non ci sono bisogna trovarli.

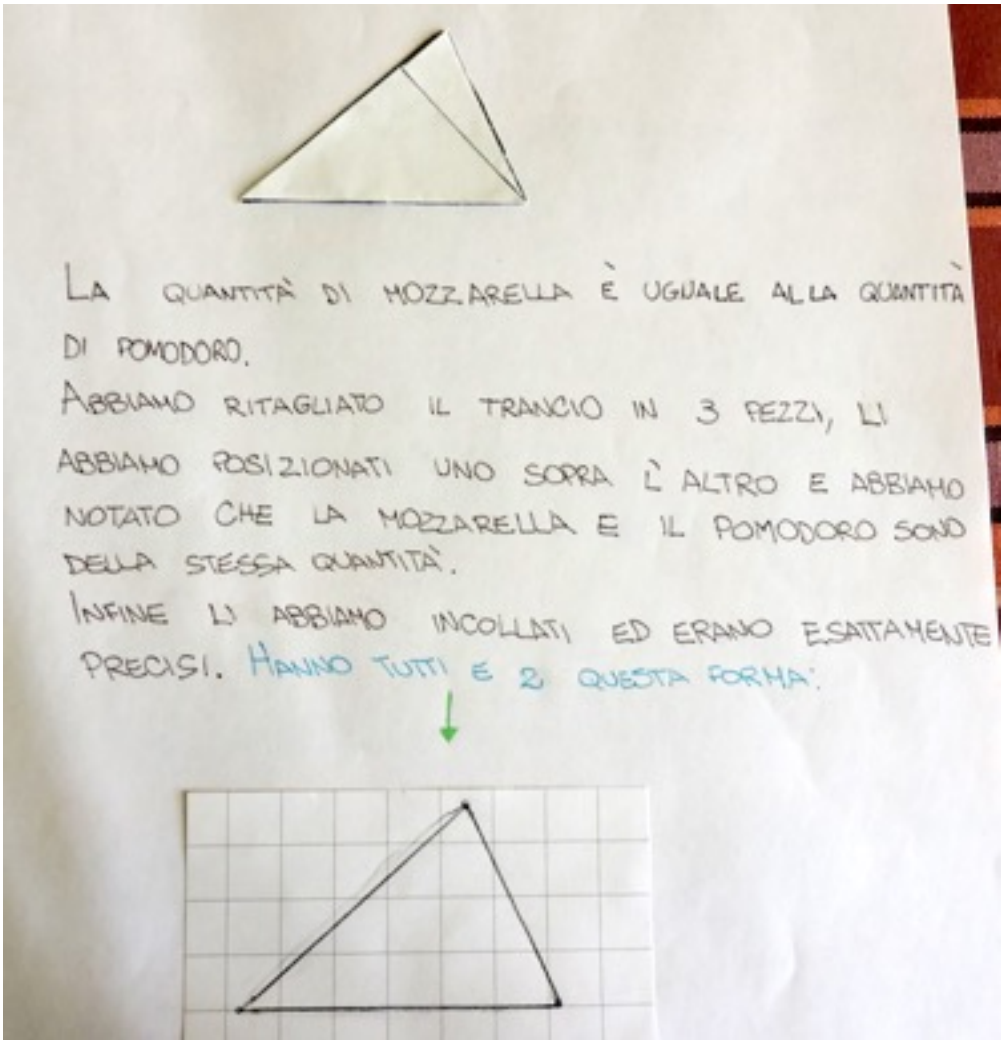


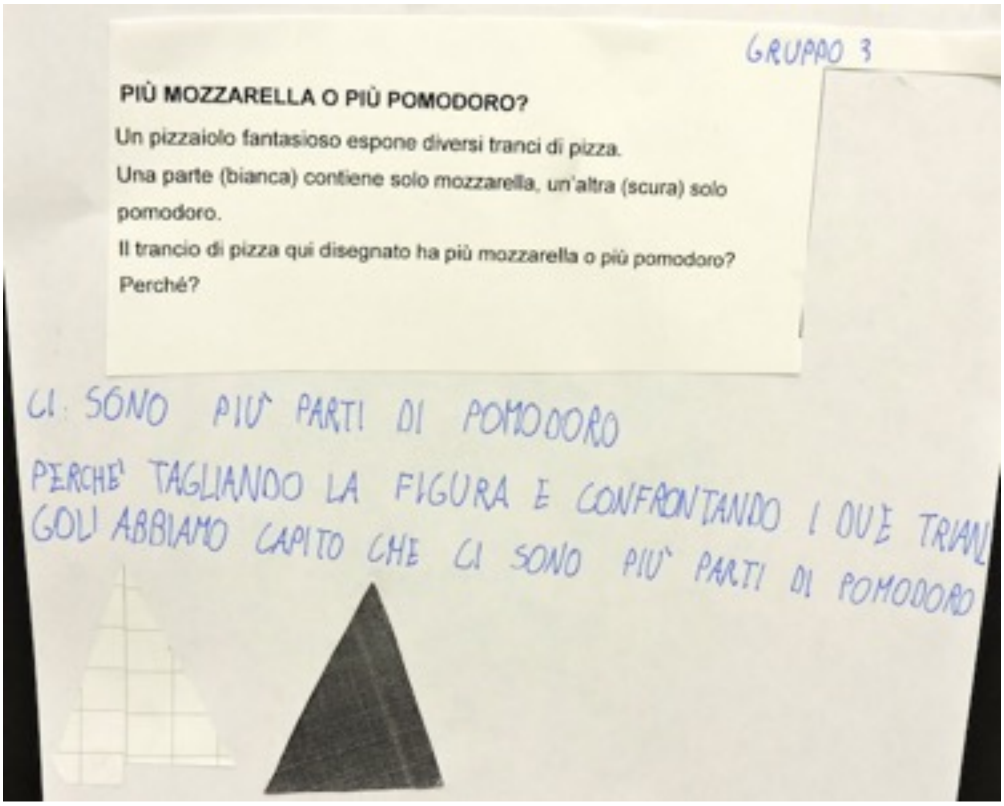

Molti invece capiscono che ritagliando i due pezzi di mozzarella si riesce a costruire un triangolo sovrapponibile perfettamente a quello del pomodoro. Questo per loro è sufficiente per dimostrare l’equivalenza. Altri ancora si basano sul colpo d’occhio e da ciò che vedono deducono uguaglianze e disuguaglianze.

---

[1] http://didmat.dima.unige.it/set_modelli/materiali/parole/contr_did.html uno dei tanti materiali online che spiegano di che cosa si tratti



LA QUANTITÀ DI MOZZARELLA È UGUALE ALLA QUANTITÀ DI POMODORO.
ABBIAMO RITAGLIATO IL TRANCIO IN 3 PEZZI, LI ABBIAMO POSIZIONATI UNO SOPRA L'ALTRO E ABBIAMO NOTATO CHE LA MOZZARELLA E IL POMODORO SONO DELLA STESSA QUANTITÀ.
INFINE LI ABBIAMO INCOLLATI ED ERANO ESATTAMENTE PRECISI. HANNO TUTTI E 2 QUESTA FORMA:



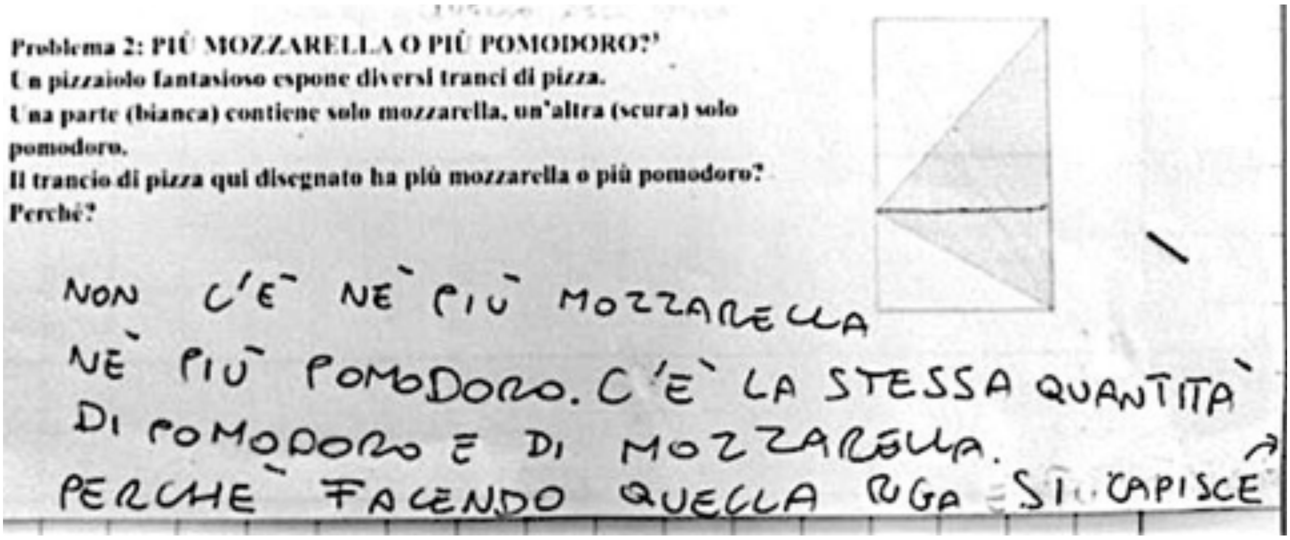
GRUPPO 3

**PIÙ MOZZARELLA O PIÙ POMODORO?**

Un pizzaiolo fantasioso espone diversi tranci di pizza.
Una parte (bianca) contiene solo mozzarella, un'altra (scura) solo pomodoro.
Il trancio di pizza qui disegnato ha più mozzarella o più pomodoro?
Perché?

CI SONO PIU' PARTI DI POMODORO
PERCHE' TAGLIANDO LA FIGURA E CONFRONTANDO I DUE TRIANGOLI ABBIAMO CAPITO CHE CI SONO PIU' PARTI DI POMODORO

Altri ancora tracciano l'altezza (che però chiamano linea o riga non riconoscendola come tale) e vedono l'uguaglianza del triangoli rettangoli costituenti i due rettangoli in cui viene divisa la pizza. Anche in questo caso è l'occhio che dice qualcosa ma non c'è traccia di alcun ragionamento geometrico.


Problema 2: PIÙ MOZZARELLA O PIÙ POMODORO?'
Un pizzaiolo fantasioso espone diversi tranci di pizza.
Una parte (bianca) contiene solo mozzarella, un'altra (scura) solo pomodoro.
Il trancio di pizza qui disegnato ha più mozzarella o più pomodoro?
Perché?

NON C'È NÈ PIÙ MOZZARELLA NÈ PIÙ POMODORO. C'È LA STESSA QUANTITÀ DI POMODORO E DI MOZZARELLA. PERCHÈ FACENDO QUELLA RIGA SI CAPISCE

In particolare nessuno arriva a dire che quella sovrapposizione avviene solo perché il triangolo è disegnato in quel modo e quindi base e altezza del triangolo coincidono con quelle del rettangolo. Questa sarebbe la spiegazione geometrica dell'equivalenza esistente.

Alcuni non colgono nemmeno la relazione e quando ri-disegnano la pizza non ne tengono assolutamente conto.


**b) Qual è il problema?**

Chi usa la manipolazione e, in modo inconscio, opera delle trasformazioni geometriche (rotazioni in questo caso) non sa comunque individuare né il centro di rotazione né l'angolo di rotazione che potrebbero portare le figure a sovrapporsi. Considera solo il movimento che fa con le mani. Ma **la trasformazione geometrica non è il movimento.**

Una maggiore consapevolezza delle trasformazioni geometriche (che occupano una parte consistente del libro di Giuseppina) darebbe loro strumenti di analisi delle situazioni che più facilmente potrebbero condurre a considerazioni di tipo geometrico, ragionando ad esempio sulle congruenze che si realizzano.

Noi pensiamo che il passaggio attraverso la manipolazione sia fondamentale, ma che terminata la manipolazione, ai bambini si dovrebbe chiedere **perché** quella manipolazione funziona, altrimenti la geometria rimane sempre fuori dai loro discorsi e soprattutto dalle loro teste.

Questo è uno dei nodi da sciogliere, non l'unico, ovviamente.

**c) L’uso di GeoGebra**

L’introduzione delle tecnologie nell’insegnamento porta ovviamente dei cambiamenti, ma, se vogliamo che questo vada a vantaggio dell’apprendimento, occorre riflettere sul loro uso e su ciò che si raggiunge con esse, ragionare cioè sul valore aggiunto che le tecnologie ci danno, su ciò che non si potrebbe raggiungere diversamente.

Su questo ho scritto un capitolo nella riedizione del libro di Marastoni che vi invito a leggere appena sarà pubblicato. Sarebbe anche utile un confronto su quanto ho scritto.

In particolare vorrei sottolineare l’uso del software di geometria dinamica GeoGebra che è ormai diventato uno standard a livello mondiale per diversi motivi: è free e open source e quindi liberamente scaricabile dall’indirizzo https://www.geogebra.org/download, esiste una vasta comunità livello mondale che ne cura costantemente l’aggiornamento e l’ampliamento con l’aggiunta di moduli, l’ultimo nato è il modulo per la visualizzazione e lo studio delle figure in 3D, esiste la versione per tablet ed è in beta testing quella per smartphone Android.

Qui mi limito a dire che nel caso dell’uso di Geogebra abbiamo verificato come bambini, anche molto piccoli, che utilizzano il software, inizialmente in modo molto intuitivo e in seguito in modo più strutturato, abbiano acquisito una migliore capacità di analisi dei problemi e anche di uso consapevole della terminologia geometrica associata. GeoGebra infatti è soprattutto uno strumento importante per modellizzare situazioni e per imparare a generalizzare cogliendo le invarianze, perché la dinamicità delle situazioni rappresentate con il software consentono questo tipo di riflessione con molta più immediatezza rispetto al dover ripetere più volte lo stesso disegno. L’uso di strumenti più poveri continua comunque ad avere la sua funzione: nelle nostre classi si lavora con carta, forbici e cordini, prima e contemporaneamente all’uso software.

Con GeoGebra i bambini capiscono che una cosa è ‘disegnare’ le figure (si può fare anche con Paint!) e un’altra è costruirle ragionando sulle loro caratteristiche (parallelismo, perpendicolarità, simmetrie, uguaglianza di segmenti…). Fondamentale è l’uso del cosiddetto ‘test del trascinamento’ per cui le figure costruite, per essere considerate valide, non devono modificarsi trascinando i punti base, un quadrato deve restare quadrato, se si trascinano i suoi vertici, al massimo può ruotare o diventare più grande. Si opera all’interno della geometria euclidea per cui le trasformazioni sono di due tipi: isometrie e similitudini. Il software rende automatica la realizzazione di queste trasformazioni ma è anche possibile costruire isometrie e similitudini attraverso le normali costruzioni geometriche che GeoGebra comunque consente.

## I problemi da risolvere

Per mettere alla prova quanto affermiamo, vi chiederemo ora di provare voi stessi a risolvere alcuni problemi e poi a confrontare le vostre risposte. Simuleremo cioè un lavoro da portare in classe, a diversi livelli, non solo nella scuola primaria.

*CONSEGNA: Scegliere un problema, analizzare la situazione e rappresentarla usando gli strumenti a disposizione. Scrivere la soluzione motivandola.*

1. *Il camion della spazzatura*

Una strada, due case coloniche costruite non lungo la strada: casa del sig. A e casa del sig. B. Il camion della spazzatura può fermarsi lungo la strada una sola volta per prendere i rifiuti delle due case.

a) Quale sarebbe una posizione (le posizioni) delle case in cui non ci sarebbe da litigare per trovare il luogo più comodo per entrambe le case?

b) E se invece le case fossero in un luogo qualsiasi sia entrambe da una parte della strada o da parti diverse?

c) Se il sig. A vuole andare a trovare il sig. B passando prima a gettare la spazzatura, quale sarebbe la posizione del luogo di raccolta che rende la strada da A a B la più breve possibile?

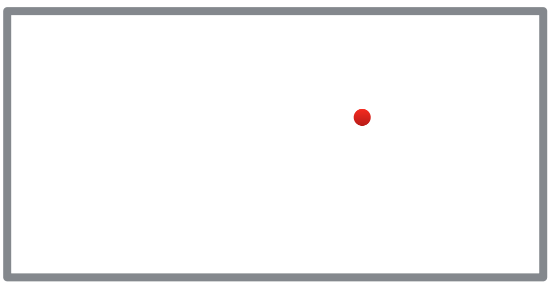
*(Esame di Stato 2011-2012 Liceo Scientifico - corso PNI QUESITO 9*

*Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo A. C.): Assegnati nel piano due punti A e B da una stessa parte rispetto ad una retta r, determinare il percorso minimo che congiunge A con B toccando r (il che equivale a cercare il punto O sulla retta che minimizza la somma delle distanze AO + OB)*)

2. *La fontana*

Due uccelli si trovano in cima a due torri di altezze diverse: dove dovrebbe essere collocata una fontana affinché i due uccelli, volando alla stessa velocità, arrivino contemporaneamente a bere? *(Tratto da: Leonardo Pisano, Liber Abaci, 1202)*

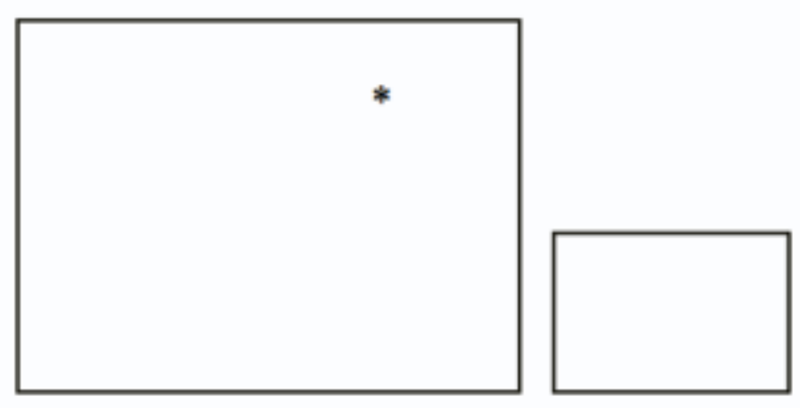
3. *Il palo*



Due fratelli, Alberto e Giuseppe, devono dividersi un campo rettangolare in parti uguali. Alberto dice: “Pianta un palo dove vuoi tu e unisci il palo con i quattro vertici del campo. Se ognuno di noi prende le due parti opposte rispetto al palo, avrà la stessa quantità di terreno dell’altro.”

Ha ragione Alberto? Perché?

4. *La mosca*



Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra.

Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.

Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.

Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto.

Spiegate come avete proceduto. *(7° Rally Matematico Transalpino/I prova/problema n. 15, per le categorie 6, 7, 8* http://www.math.unipr.it/~rivista/RALLY/home.html*)*