Aldo Visalberghi
Raffaele Simone
Maria Corda Costa
Giuliano Bellezza
Wanda D'Addio Colosimo
Emma Castelnuovo
Giulio Cortini
Mario Fierli
Pino Parini
Carlo Delfrati
Raffaello Misiti

Scuola media e nuovi programmi

La Nuova Italia Editrice

1ª edizione: settembre 1979

Indice

Premessa generale

di Aldo Visalberghi

1. Gli aspetti innovativi

I nuovi programmi della scuola media rappresentano, nel complesso, un dato positivo e un fattore di progresso, nonostante essi siano criticabili sotto diversi profili. Troppo ampi, troppo minuti, con ambizioni enciclopediche, è stato detto, ed è in parte vero. Progressivi a parole, ma regressivi nel fatto cruciale di ammettere la conclusione della scuola obbligatoria a 14 anni, senza neanche accennare a pur concrete prospettive di prolungamento (almeno a 15 anni, secondo il deliberato della Camera). Ed è questa, forse, l'accusa piú grave che ad essi si può rivolgere, soprattutto se considerati nel quadro di un sistema formativo *europeo*. Ma va riconosciuto che questa asserita conclusività precoce non si ripercuote nelle indicazioni curricolari, per esempio *professionalizzando* l'educazione tecnica. Che viceversa la scuola media mantenga funzione orientativa in termini larghi e flessibili è cosa tanto piú utile e positiva quanto piú essa si potrà esplicare in rapporto a ulteriori itinerari formativi, brevi o lunghi che siano, anziché in rapporto a precoci avviamenti al lavoro.

Altre critiche generali e di dettaglio sono state rivolte a questi programmi, perché talvolta vaghi e generici, o indulgenti a mode terminologiche legate alla semantica e alla linguistica (troppi « linguaggi », e codici, e decodificazioni, si è detto). Queste ed altre critiche sono del resto riprese e sviluppate anche nei contributi specifici di cui si compone questo volume.

Ma il punto fondamentale è tuttavia un altro: questi pro-

Classe III

Si approfondirà ulteriormente lo studio della lingua viva e si darà sistemazione alle riflessioni sulla lingua appresa precedentemente, per mettere l'alunno in grado di generalizzare e di avere a disposizione maggiori possibilità di espressione personale.

Continueranno pertanto le attività di conversazione, di ascolto di modelli orali registrati e le letture intensive ed estensive con le conseguenti esercitazioni orali e scritte già indicate per il 2° anno. Si continuerà anche ad esercitare gli allievi nella redazione di lettere o di relazioni varie.

Tenendo conto del livello di preparazione degli allievi si utilizzeranno poesie o brani di autore per destare l'interesse per i testi letterari.

Le attività indicate contribuiranno ad approfondire la conoscenza del paese di cui si studia la lingua nei suoi aspetti culturali, civili, sociali, ecc. Le esercitazioni via via compiute potranno essere utilizzate come prove di controllo.

Alla conclusione del ciclo l'alunno dovrebbe essere in grado di utilizzare la conoscenza della lingua almeno per gli essenziali impieghi pratici: capacità di capire, leggere ed esprimersi nella lingua straniera.

Matematica

di Emma Castelnuovo

1. Matematica e nuovi programmi

Il titolo *Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali* invita a considerare l'insegnamento della matematica e quello delle scienze sperimentali in una visione unitaria.

Ma, quale è il significato di *visione unitaria*? Trascinare la matematica dalla parte delle scienze sperimentali e farne quindi uno strumento ai fini della ricerca nel campo delle scienze? O, al contrario, costruire un bel programma di matematica pura e *irrigidire* le scienze sperimentali in questo schema astratto? Insomma, matematica schiava o matematica regina di ogni altra scienza?

È chiaro che né l'una né l'altra di queste alternative è accettabile. Però, è forse il fatto di avere spinto l'interpretazione agli estremi che ci fa comprendere quale o quali vie si debbano seguire.

1.1. *L'interazione matematica - scienze sperimentali*

Riflettiamo che vi sono argomenti di altre materie, in particolare scientifiche, che sono influenzati, direi *marcati* dalla matematica, ma in modi diversi. Voglio portare degli esempi (sono tutti argomenti che si trattano o si possono trattare alla scuola media):

1) c'è una matematica che è strettamente legata alla fisica. Basta pensare allo studio della riflessione della luce (o del suono o...): uno specchio piano s (fig. 1) è colpito in C da un raggio di luce proveniente dalla sorgente puntiforme A.

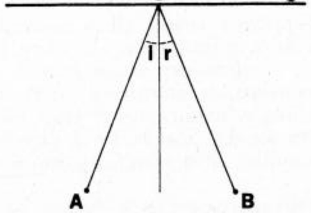

fig. 1

Come viene riflesso? Sappiamo, sperimentalmente, che l'angolo di riflessione *r* è uguale all'angolo d'incidenza *i*, e che, quindi, il raggio riflesso passerà per un punto B che verifica questo dato. Se B si trova alla stessa distanza che il punto A ha dallo specchio, risulta che il triangolo ACB è isoscele (fig. 2).

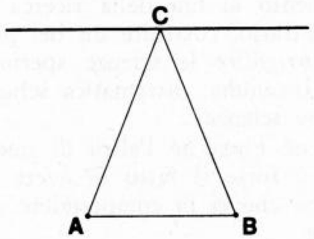

fig. 2

Se invece l'angolo di riflessione non fosse uguale all'angolo d'incidenza (fig. 3), il triangolo ACB non risulterebbe isoscele.

Siamo passati alla matematica. E ora osserviamo e ragioniamo: i vari triangoli ACB (fig. 4) hanno la stessa base AB e la stessa altezza; hanno quindi la stessa area. Hanno anche lo stesso perimetro? No, certo: il vertice C può essere preso in un punto della *retta-specchio* molto distante dal vertice C

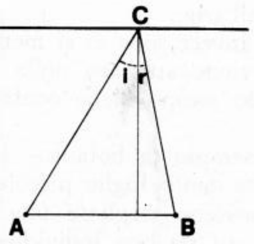

fig. 3

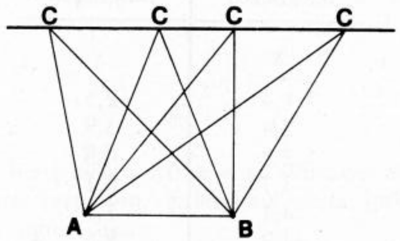

fig. 4

del triangolo isoscele e, quindi, i lati AC e BC risultano molto lunghi. Uno studio matematico (basta basarsi sul teorema di Pitagora) permetterebbe di calcolare effettivamente la lunghezza dei lati e quindi del perimetro e di verificare dunque che il triangolo isoscele ha il perimetro minimo. E ora di nuovo alla fisica: dato che sperimentalmente risulta che $r=i$, risulta anche — e ce lo dice la matematica — che la luce percorre il tragitto minimo.

Come si vede, in questo caso, matematica e fisica *s'intrecciano*: si ha una continua interazione;

2) spesse volte accade che, per comprendere il fenomeno fisico, biologico... ci si mette in condizioni ideali, si fa cioè astrazione da fattori accidentali. Basta pensare — e porto ancora un esempio di cui si parla nella scuola media — alla caduta dei gravi. Il fenomeno viene matematizzato, cioè si

trova la legge che lega spazio a tempo, facendo astrazione dalla resistenza dell'aria;

3) altre volte, invece, non ci si mette in condizioni ideali, ma il fenomeno viene studiato nella sua effettiva realtà e solo in un secondo tempo viene confrontato con il modello matematico.

Vediamo un esempio di botanica. Prendiamo dallo stesso ramo di una pianta tante foglie piccole e grandi, cioè piú o meno giovani (conviene scegliere una pianta, come la rosa o l'alloro o...., in cui sia ben individuabile la lunghezza e la larghezza massima della foglia). Misuriamo con i ragazzi la lunghezza e la larghezza massima. Si ottiene una tabella a due colonne: la tabella qui riportata si riferisce alle foglie di una pianta di rosa.

larghezza	lunghezza
x	y
1,4	2,5
2,4	3,9
2,8	4,8
3,7	6,1
4,1	7,1
4,9	8,6

Si osserva che all'aumentare della lunghezza aumenta anche la larghezza, ma è ben difficile cogliere la legge confrontando questi numeri decimali. È allora molto espressivo passare dai numeri al grafico cartesiano (fig. 5), riportando sull'asse delle x le larghezze massime e sull'asse delle y le lunghezze delle foglie.

Si ottiene una *nuvola* di punti che si addensano nelle vicinanze di una retta per O. Se si trovassero proprio su quella retta, si direbbe che lunghezza e larghezza sono direttamente proporzionali. Ora invece si può concludere che lunghezza e larghezza risultano, approssimativamente, direttamente proporzionali.

Si confronta dunque il fenomeno empirico, registrato nella sua effettiva realtà, con il modello matematico. Si apre cosí lo studio delle approssimazioni e della statistica.

Abbiamo fin'adesso considerato tre casi di interazione matematica-scienze sperimentali:

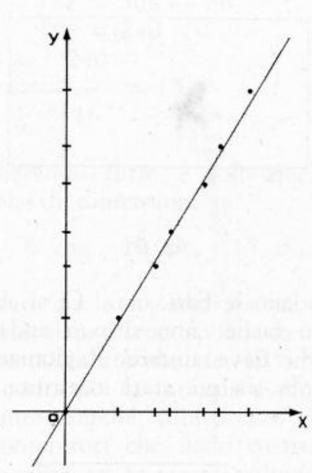

fig. 5

— dove la matematica nasce e si sviluppa assieme al fenomeno empirico (esempio: riflessione della luce e triangoli di ugual base e ugual area);

— dove il fenomeno viene matematizzato mettendosi in condizioni ideali, cioè facendo astrazione da fattori accessori (esempio: legge di caduta dei gravi; si fa astrazione dalla resistenza dell'aria);

— dove il fenomeno viene studiato nella sua effettiva realtà e, successivamente, confrontato col modello matematico (esempio: relazione fra lunghezza e larghezza delle foglie).

1.2. *Un esempio di applicazione della matematica*

Rimane da considerare tutto il campo delle applicazioni della matematica: si spazia dalle scienze sperimentali alla tecnologia, all'arte... Un esempio, sempre di lavori fatti in classe.

Si propone di costruire una scatola a forma di parallelepipedo utilizzando tutto e solo un foglio di carta rettangolare. I ragazzi dicono: *è facile*! Seguiamo quanto propongono: si comincia col togliere una striscia che, divisa a metà, servirà per la base e per il coperchio (fig. 6); poi, con il rettangolo

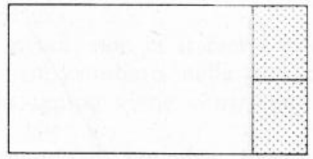

fig. 6

che resta, si circondano le basi, ma... Ci si accorge che il problema non è tanto facile: non si può andare per tentativi! È la matematica che deve aiutare. Ragioniamo cosí: immaginiamo che la scatola sia già stata costruita. Eccola (fig. 7):

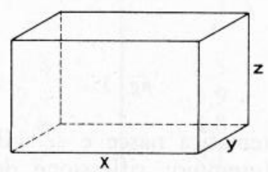

fig. 7

dobbiamo dire che la sua superficie totale è uguale all'area del foglio rettangolare che ha, per esempio, le dimensioni di 20 e 30 centimetri. Deve dunque essere, indicando con x, y, z le dimensioni:

$$2xy + 2xz + 2yx = 600$$

ossia

$$xy + xz + yz = 300.$$

Che cosa vuol dire? Vuol dire che non c'è una sola soluzione, cioè non esiste una sola scatola che risponda al problema; ce ne sono infinite. Che cosa si deve fare? Si può dare un valore a x e un valore a y e calcolare il corrispondente valore di z. Per esempio:

$$x = 6; \quad y = 10;$$

allora deve essere:

$$6.10 + 6z + 10z = 300$$

da cui

$$16z = 300 - 60$$
$$16z = 240$$
$$z = \frac{240}{16} = 15.$$

Dunque, utilizzando tutto e solo quel foglio posso costruire una scatola di dimensioni

6 cm, 10 cm, 15 cm.

Ma, potevo dare a x e a y altri valori, a mio piacere; per ogni caso posso calcolare il corrispondente valore di z.

È proprio questa libertà che, se, all'inizio, lascia i ragazzi un po' smarriti, eccita poi la fantasia e rende il problema veramente interessante. Perché, subito ci si chiede: tutte queste scatole, questi contenitori che vado costruendo con fogli di carta uguali, avranno tutti lo stesso volume? O, se il volume cambia, ci sarà una scatola con volume massimo, cioè tale che, a parità di involucro, contenga di piú?

Prima di fare dei calcoli guardiamo e ragioniamo. È chiaro che il volume cambia: se infatti una dimensione è zero, la scatola non esiste, il volume è zero. L'esistenza di questi casi limite fa capire che il volume cambia. Si scopre che il volume massimo appartiene alla scatola a forma cubica: è la scatola che ha tutte le dimensioni uguali a 10 cm.

Questo problema, da svolgersi in terza media, andrà messo a confronto con un problema analogo che sarà stato svolto già in prima e cioè quello dello studio dell'area di rettangoli isoperimetrici. È proprio cosí che si darà una *continuità* al nostro corso.

1.3. *Probabilità e genetica*

E ancora un esempio di applicazione della matematica, un esempio di tipo diverso perché diversa è la matematica su cui ci si basa: si tratta di un'applicazione del calcolo delle probabilità alla genetica, in particolare a una malattia ereditaria.

Da statistiche recenti risulta che in Italia vi sono piú di due milioni di portatori di *microcitemia*, un'anomalia del sangue. In molte regioni d'Italia si è organizzata un'indagine (una particolare analisi del sangue) nelle scuole medie per rendersi conto della frequenza di questa anomalia. È proprio per questo, per far capire ai nostri allievi e quindi alle loro famiglie l'importanza di tale malattia sociale, che è molto importante darne una spiegazione, e cioè una spiegazione matematica.

Cominciamo con un gioco: il lancio di due monete. Lanciando due monete si può avere *testa e testa*; *croce e croce*; *testa e croce*; *croce e testa*; ogni caso ha la probabilità 1/4 di verificarsi. Ma, se non ci importa distinguere i casi testa-croce e croce-testa, le probabilità saranno le seguenti

TT	TC = CT	CC
1/4	1/2	1/4

È piú probabile dunque avere la *coppia mista*.

Bastano queste nozioni di probabilità per chiarire le idee sulla microcitemia.

Ed ecco di cosa si tratta: si era osservato che soprattutto nelle zone ex-malariche, come la Sardegna e il Ferrarese, dei bambini erano affetti fin dalla nascita da una grave forma di anemia, una forma diversa dalla solita anemia. È solo recentemente, una quindicina di anni fa, che si è capito che questo fatto poteva verificarsi solo quando i genitori, pur stando bene, non avevano tutti i globuli del sangue di grandezza normale, ma una parte era piú piccola e piú spessa. Indichiamo con Mm le persone che hanno globuli dei due tipi.

Prima di vedere che cosa accade quando i genitori sono entrambi di questo tipo, voglio rispondere alla domanda che viene spontanea: perché queste persone si trovano soprattutto nelle zone malariche? In modo elementare, si può darne questa spiegazione: l'uomo per salvarsi dalla malaria ha, nel corso dei secoli, mutato la sua conformazione genetica: una parte dei globuli rossi è diventata piú piccola e piú spessa per evitare che l'anofele della malaria potesse penetrarvi; è stata dunque una difesa dell'uomo.

Ma vediamo ora che cosa accade se una coppia del tipo Mm ha dei figli

genitori	Mm		Mm
figli	MM	Mm	mm

Accade proprio la stessa cosa che nel lancio di due monete. Con probabilità 1/4 si avranno dei figli del tipo MM, cioè del tutto sani; con probabilità 1/2 si avranno dei figli come i genitori, cioè geneticamente non sani, ossia portatori; con probabilità 1/4 si avranno dei figli affetti da una gravissima forma di anemia, il cosiddetto *Morbo di Cooley*, che si combatte solo con successive trasfusioni di sangue.

Ecco perché, prima di mettere al mondo dei figli, è tanto importante fare un'analisi del sangue: sapremo cosí con sicurezza se il tipo del nostro sangue è MM o Mm! Ripeto, nel caso dei genitori entrambi del tipo Mm può, con probabilità 1/4, nascere un bambino affetto dal Morbo di Cooley! Va ben chiarito ai ragazzi il concetto di probabilità: non è che se una coppia Mm ha 4 figli necessariamente uno sarà mm; è solo un fatto di probabilità. È la matematica che ce lo dice! La matematica, ora, *entra* nella vita: chiarisce le idee, togliendo pregiudizi e superstizioni.

1.4. *La matematica dinamica*

Abbiamo visto, attraverso *l'analisi* condotta su vari esempi, quale è il significato dell'interazione matematica-scienze sperimentali. Ora, dopo l'analisi, si riesce a fare *una sintesi*: in ciascuno dei casi considerati, la matematica che interviene è una matematica dinamica; è una matematica cioè dove dominano i concetti di funzione, trasformazione, struttura. È la matematica.

Ecco dunque che si traggono delle indicazioni didattiche: nello sviluppare il corso di matematica in modo autonomo si cercherà di dare rilievo piú a problematiche che a problemi, si cercherà di portare l'attenzione piú su figure che si trasformano che sulla figura, si metterà in risalto piú il confronto di numeri che il numero.

Terremo cosí presenti non solo il punto di vista scientifico ma anche il lato psicologico: è ben noto infatti che i ragazzi sono attirati dal movimento, dalla variazione, dalla dinamica delle cose molto di piú che dalla considerazione di figure statiche e di fatti che non mutano.

2. La trattazione di qualche argomento

Proviamo adesso a svolgere l'inizio di qualche argomento da trattare in prima, accennando anche agli sviluppi *in verticale*, cioè nelle classi successive.

2.1. *Lavorare con un materiale. Il triangolo, il quadrato*

Sappiamo bene che i bambini hanno, spesso, antipatia per i numeri. Noi professori ci lamentiamo della poca sicurezza con cui affrontano anche i piú semplici calcoli e molte volte riteniamo opportuno farli esercitare, almeno nel primo periodo della prima, sulle 4 operazioni. Ma questo è un errore, e prima di tutto un errore psicologico. Mettiamoli invece davanti a qualcosa di nuovo, e cominciamo subito da una matematica senza numeri, una matematica che possa nascere dalla manipolazione di un materiale.

Diamo per esempio ad ogni ragazzo, fin dal primo giorno, delle striscioline di cartone dotate di fori agli estremi in modo da potervi inserire dei ferma-campioni. Potranno cosí costruire triangoli e altri poligoni (fig. 8).

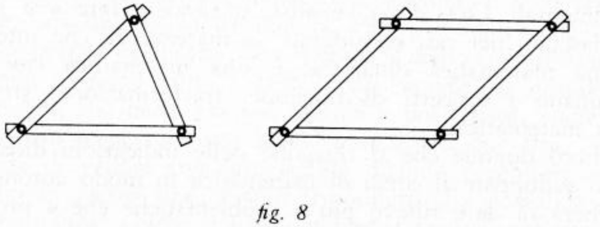

fig. 8

Si accorgeranno, e sarà una scoperta fatta da loro stessi, che con tre sbarrette non sempre si può costruire un triangolo; per esempio, non è possibile costruirlo se le sbarrette hanno la lunghezza di cm 20, cm 6 e cm 8. Perché la costruzione sia possibile deve essere soddisfatta una condizione sulla lunghezza dei lati: ogni lato deve essere minore della somma degli altri due.

Quando poi passiamo alla costruzione di quadrilateri, ad esempio del quadrato, il bambino nota subito che questa figura non è rigida: il quadrato si trasforma in rombo. Ecco, è proprio quest'osservazione, che non potrebbe mai venire ossservando un disegno, che eccita la fantasia e che conduce gli

allievi ad una problematica: quali elementi cambiano e quali rimangono invariati in questa trasformazione? Cambiano l'ampiezza degli angoli, la lunghezza delle diagonali,... mentre la lunghezza dei lati rimane invariata, e di conseguenza anche il perimetro non cambia. E l'area? La risposta è la stessa, sempre, da parte di tutti: « l'area non cambia perché il perimetro non cambia, perché il "recinto" è sempre lo stesso ». Non stronchiamo queste affermazioni con un netto « no, sbagliate ».

Portiamoli invece a osservare e, quindi, a ragionare. Teniamo fissa la base del nostro quadrato e articoliamolo: il quadrato « si abbassa » (fig. 9) e tende « a schiacciarsi sulla base ». Dunque, al limite, l'area è zero. Osserviamo ancora (fig. 10): l'area parte da zero, aumenta... e poi diminuisce fino a zero. Si tratta di una funzione continua che si comporta simmetricamente rispetto al caso del quadrato: è proprio l'area del quadrato che realizza il massimo.

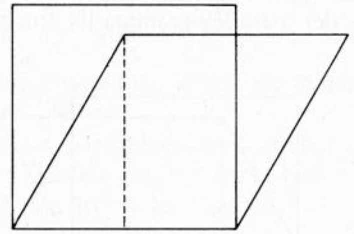

fig. 9

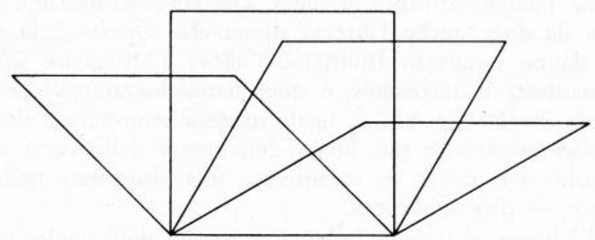

fig. 10

In queste semplici osservazioni ci sono dei grossi concetti matematici: quello di funzione, di trasformazione, di caso limite, d'invariante... Ecco, fin dai primi giorni il ragazzo si trova immerso nella vera matematica, in una matematica che lo affascina perché ha l'impressione (e non è solo un'impressione!) di essere lui, da solo, a fare delle scoperte.

2.2. *Dal quadrato articolabile alla sinusoide*

Il quadrato articolabile, il rettangolo articolabile: sono osservazioni e sono scoperte che non è possibile dimenticare proprio perché sono fatte dai ragazzi stessi. Ed ecco che a distanza di uno o due anni è sempre quel materiale che ci invita a passare da osservazioni qualitative a considerazioni quantitative.

Il rettangolo si trasforma in parallelogramma (fig. 11) e l'area cambia perché varia l'altezza: l'area è funzione dell'altezza. Ma l'altezza è funzione dell'angolo del parallelogramma. Dunque: l'area del parallelogramma è funzione dell'angolo.

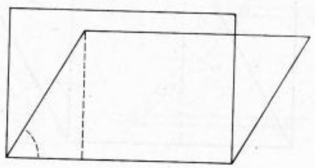

fig. 11

Se l'angolo diventa la metà, che cosa accade dell'altezza? Vien da dire: anche l'altezza dimezzerà. Questa è la risposta che danno i ragazzi. Invitiamoli allora a disegnare sul foglio a quadretti il rettangolo e quel parallelogramma che ha un angolo di 45° (fig. 12). È facile rendersi conto che l'altezza del parallelogramma è piú lunga della metà dell'altezza del rettangolo. « È come se incontrasse una resistenza nello scendere » — dice qualcuno.

L'altezza, e quindi l'area, è funzione dell'angolo, ma questa funzione non è facile da esprimere. Il problema è dunque interessante. Fermiamoci su alcuni casi:

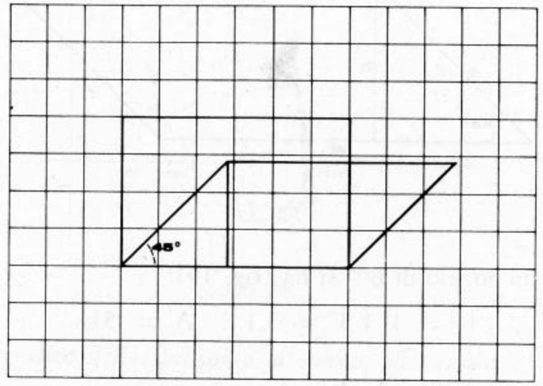

fig. 12

angolo di 30°, 45°, 60°;

sono casi in cui è possibile, anche per mezzo del teorema di Pitagora, calcolare l'altezza.

Consideriamo un parallelogramma di lati lunghi 10 cm e 6 cm; indichiamo l'altezza con h e l'area con A.

Per un angolo di 30° si ha (fig. 13):

$$h = 3 \qquad A = 30$$

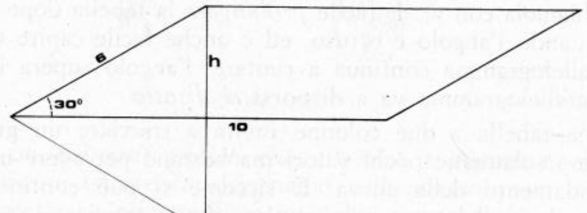

fig. 13

Per un angolo di 45° si ha (fig. 14):

$$h = \sqrt{18} = 4{,}3\ldots \qquad A = 43\ldots$$

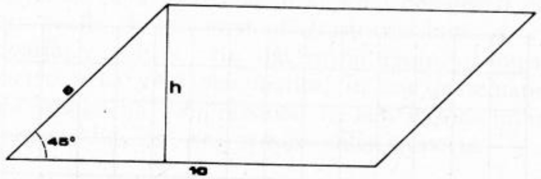

fig. 14

Per un angolo di 60° si ha (fig. 15):

$$h = 3\sqrt{3} = 5{,}1\ldots \quad A = 51\ldots$$

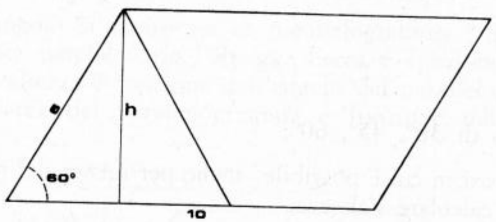

fig. 15

Scriviamo una tabella a due colonne con i valori dell'angolo (indichiamolo con x) e quelli dell'area corrispondente (indichiamola con y). È facile *prolungare* la tabella dopo i 90°, cioè quando l'angolo è ottuso, ed è anche facile capire che se il parallelogramma continua a ruotare, l'angolo supera i 180° e il parallelogramma va a disporsi *al disotto*.

Una tabella a due colonne invita a tracciare un grafico: si hanno solamente pochi valori ma bastano per avere un'idea dell'andamento della curva. E siccome si può continuare a ruotare il parallelogramma, si capisce che la curva non termina; non solo, il fatto che, dai 180° ai 360°, il parallelogramma si dispone al di sotto della base, conduce i ragazzi a dire che l'altezza e quindi l'area diventa negativa. Il concetto di area negativa, fuori dubbio molto astratto, si presenta qui in modo naturale.

La curva *periodica* che si snoda sopra e sotto l'asse delle x si chiama *sinusoide* (fig. 16).

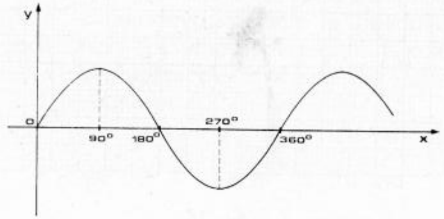

fig. 16

2.3. *Dal grafico della sinusoide al suono, alla musica*

Viene spontaneo parlare dei caratteri del suono (l'intensità, l'altezza, il timbro) e considerare i corrispondenti caratteri nella curva (l'ampiezza, la frequenza, la forma).

Si potrà riferire che al suono emesso dal flauto corrisponde una sinusoide, mentre agli altri strumenti musicali corrispondono curve periodiche ma non sinusoidali, come per esempio quella indicata nella fig. 17.

fig. 17

C'è un esercizio grafico che affascina i ragazzi e che è estremamente istruttivo: disegnamo sullo stesso piano cartesiano, meglio su carta millimetrata, due sinusoidi di ampiezza diversa e anche di frequenza diversa (fig.18), quali potrebbero essere le curve che corrispondono al suono di due flauti con intensità e frequenze diverse.

E poi procediamo così: addizioniamo le ordinate punto per punto; otterremo una curva, *somma delle due sinusoidi*

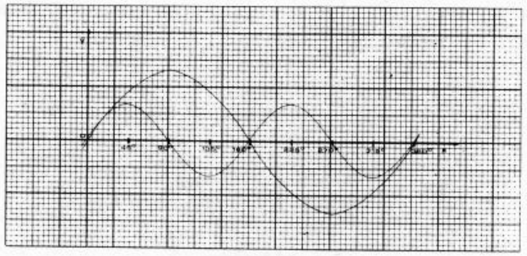

fig. 18

(fig. 19). È facile accorgersi che la curva somma non è una sinusoide; si tratta però di una curva periodica come quella che si potrebbe ottenere pizzicando per esempio una corda di chitarra.

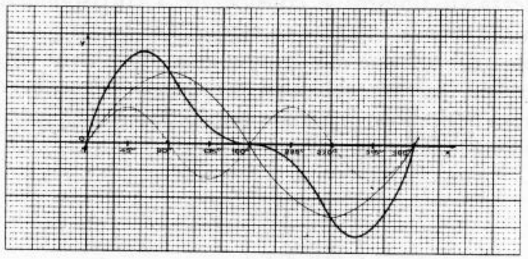

fig. 19

Il risultato, tradotto in termini di musica, è estremamente espressivo: il suono di qualunque strumento si potrebbe ottenere suonando contemporaneamente tanti flauti!

Ci siamo allontanati moltissimo dal nostro parallelogramma articolato... Ma, che cosa importa? Non c'è mai pericolo di confusione quando l'interesse è forte: anzi, è proprio cosí, passando da un campo ad un altro, che un concetto matematico, anche se di per sé freddo, verrà reso vivo e suggestivo, e non sarà certamente dimenticato.

2.4. *Rettangoli isoperimetrici. Un approccio al piano cartesiano*

Un altro argomento da svolgere nei primi giorni della

prima e che ha, anch'esso, larghi sviluppi, è lo studio di rettangoli che hanno lo stesso perimetro.

Si dice: « voglio costruire un rettangolo che ha il perimetro di 40 cm. Come devo scegliere le dimensioni? »

La domanda lascia gli allievi perplessi. L'incertezza viene dal fatto che nel problema c'è... troppa libertà: il problema, infatti, non è determinato.

Ragioniamo: se il perimetro è di cm 40, dovrà essere:

1 base + 1 altezza = 20 cm.

E allora? Ecco, cominciamo ad avere tante proposte:

18 e 2
15 e 5

Scriviamo sotto dettatura dei ragazzi una tabella a due colonne:

base	altezza
1	19
2	18
.	.
.	.
9	11
10	10
11	9
.	.
.	.
19	1

Ma è chiaro che non si hanno solo i rettangoli indicati nella tabella; potremo anche avere il rettangolo di dimensioni 0,5 e 19,5, ecc. Ecco che i calcoli che avevamo lasciato da parte si presentano da sé, e, adesso, interessano perché il problema è interessante. E il problema diventa ancor piú interessante se si realizzano i rettangoli con un materiale. Ci sono due vie, entrambe ricche di sviluppi; proviamo a seguirle tutte e due:

1) ritagliare dal cartoncino tanti rettangoli di perimetro cm 40, e disporli *a libretto* su un tabellone in cui siano indicati due assi perpendicolari, x e y (fig. 20).

Si osserva che i vertici « liberi » si trovano tutti su una

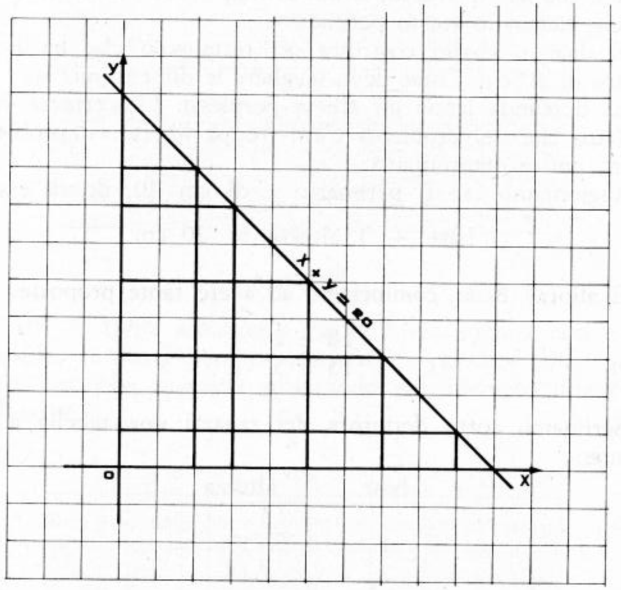

fig. 20

retta. Ogni punto di questa retta corrisponde a uno dei nostri rettangoli; dunque tale che

$$1 \text{ base} + 1 \text{ altezza} = 20$$

cioè che

$$x + y = 20.$$

Se io cammino lungo quella retta, sempre « la mia x + la mia y è uguale a 20 »; si dice che *l'equazione* di quella retta è

$$x + y = 20.$$

È chiaro che se i rettangoli hanno il perimetro di cm 60, l'equazione della retta su cui si dispongono i vertici liberi sarà

$$x + y = 30.$$

Non si deve pensare che questo sia l'inizio del capitolo

della geometria analitica: è solo un approccio, è un prendere un primo contatto con il piano cartesiano.

2) Un altro materiale con cui si possono realizzare dei rettangoli di ugual perimetro è, semplicemente, uno spago legato, tenuto ben teso fra il pollice e l'indice delle due mani (fig. 21).

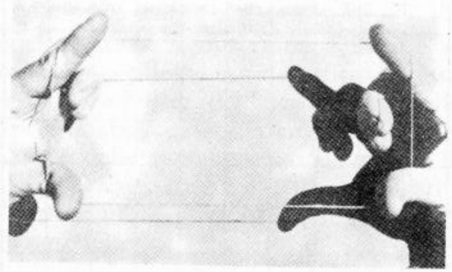

fig. 21

Se allontaniamo le mani siamo obbligati ad avvicinare le dita della stessa mano, e viceversa; cioè, se la base aumenta, l'altezza diminuisce. Si chiede: « l'area cambia? » Tutti rispondono che l'area non può cambiare perché — dicono — « quello che si perde nell'altezza si guadagna nella base ». Ma, è proprio vero? Allontaniamo le mani il piú possibile fino al caso limite: il rettangolo « si schiaccia »; l'area va a zero. È questa osservazione che fa cambiare idea: l'area cambia sempre, ma nel passaggio da un rettangolo a uno *molto vicino* l'occhio non coglie una variazione. È ora, solo dopo essersi resi conto attraverso i casi limite che l'area cambia, che passeremo al calcolo effettivo. Ecco un'altra tabella che fa riflettere

base	altezza	area
0	20	0
1	19	19
2	18	36
.	.	.
10	10	100
.	.	.
.	.	.
19	1	19
20	8	0

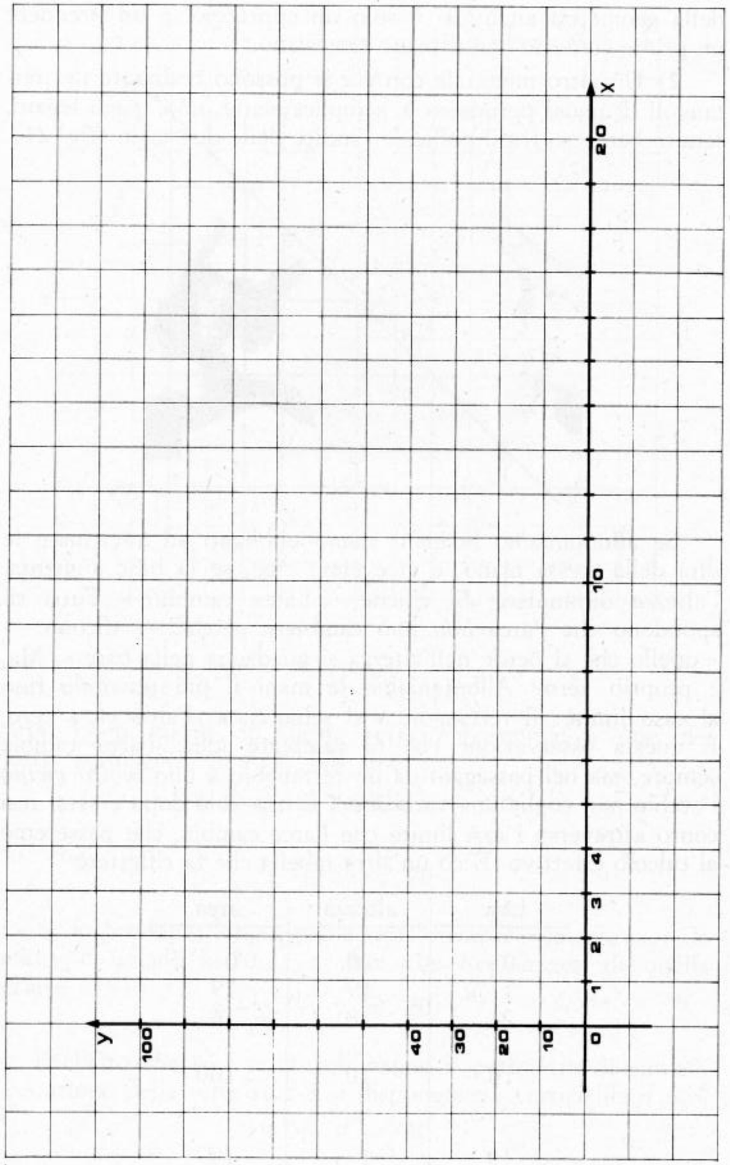

fig. 22

Osserviamo i valori dell'area: parte da zero, aumenta fino al valore 100 (caso del quadrato) per poi diminuire fino a zero, riprendendo gli stessi valori che aveva prima di arrivare a 100.

Ci fermeremo anche su qualche caso decimale e sarà molto opportuno far osservare che, per esempio, il prodotto di 0,5 per 19,5 è minore di 19,5. Sono cose elementari, ma spesso sfuggono.

Fermiamoci adesso sulle due colonne, base e area, e riportiamo i valori corrispondenti in un grafico: la lunghezza delle basi sull'asse delle x e i valori dell'area sull'asse delle y (fig. 22). È il primo *vero* grafico che tracciamo: per le basi possiamo prendere sull'asse delle x come unità di misura il lato di un quadretto; per le aree, invece, siamo obbligati a prendere sull'asse delle y un'unità di misura piú piccola, per esempio potremo rappresentare con il lato di un quadretto il valore 10.

Non è questa riduzione nell'unità di misura che è difficile; quello che riesce difficile, anche se ci può apparire strano, è il fatto di dover indicare, ad esempio sull'asse delle x, i numeri 1, 2, 3,... ad uguale distanza. Ma sono difficoltà che si superano, correggendo quaderno per quaderno. È un lavoro che richiede del tempo ma vale la pena. Rendiamoci conto, infatti, che la stampa e anche la televisione fanno largo uso di grafici e che per essere in grado di *leggerli* e cioè di capirne il significato, conviene, prima, esercitarsi nella costruzione.

Torniamo al *nostro* grafico: otterremo tanti punti e coglieremo cosí l'andamento della curva (fig. 23). Si dirà: questa curva si chiama *parabola*.

2.5. *La parabola nella realtà*

Da una questione puramente matematica — la variazione dell'area dei rettangoli isoperimetrici — la parabola ci fa passare alla realtà che ci circonda.

E infatti: la traiettoria di una palla, di un proiettile, di un qualunque oggetto lanciato in aria è una parabola (facendo astrazione dalla resistenza dell'aria); gli archi di ponti moderni hanno spesso forma parabolica; disponendo un lume con paralume cilindrico in modo opportuno possiamo vedere sulla parete disegnarsi un arco luminoso a forma di parabola.

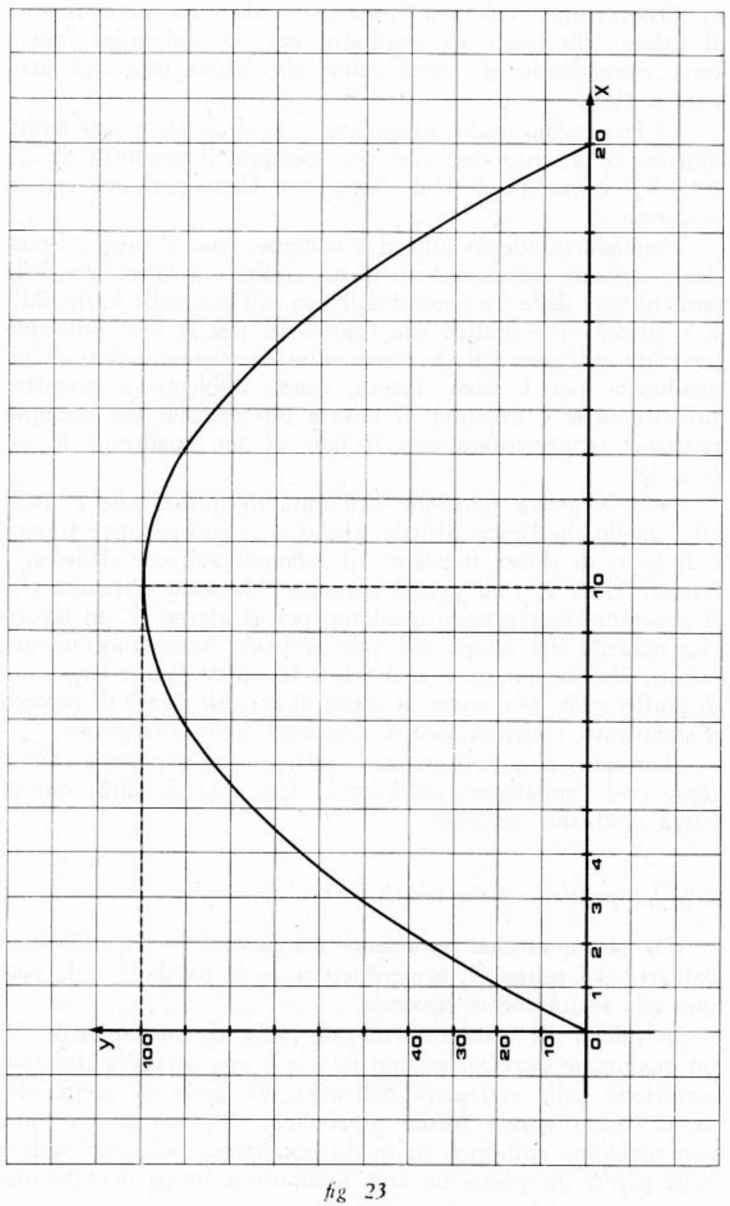

fig 23

Costruiamo ora una parabola *materialmente*: basta adagiare un fil di ferro sulla curva che abbiamo ora ottenuto. Facciamo ruotare questa parabola di fil di ferro attorno al suo asse di simmetria: si ottiene una superficie che si chiama paraboloide (fig. 24). Per capire bene la forma di un paraboloide si può procedere cosí: costruiamo, sempre in fil di ferro, quattro o cinque parabole uguali e colleghiamole per il vertice V; facciamo poi in modo che i fili di ferro passino per altrettanti fori realizzati in un bordo circolare di car-

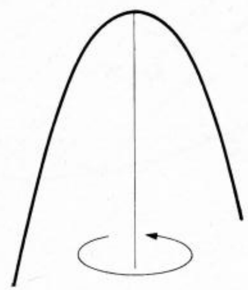

fig. 24

tone (fig. 25). Questa forma i ragazzi l'hanno certamente vista, anche se non ne conoscono il nome: è la forma dei fanali degli autoveicoli. Perché i fanali si costruiscono in questo modo? Facciamo con i ragazzi un'esperienza, dopo esserci procurati un fanale fuori uso: esponiamo il fanale al sole e disponiamo un bastoncino al posto dell'asse; si noterà allora che un punto del bastoncino diventa particolarmente luminoso. Quanto accade è descritto nella fig. 26: i raggi del sole vengono riflessi dalla superficie del fanale in modo che, tutti, passano per lo stesso punto dell'asse. È in quel punto, che si chiama *fuoco*, che si ha la massima concentrazione di luce, e, quindi, anche di calore.

Viceversa, se nel fuoco di un fanale si dispone una forte lampada, i raggi uscenti da questa colpiscono la superficie

fig. 25

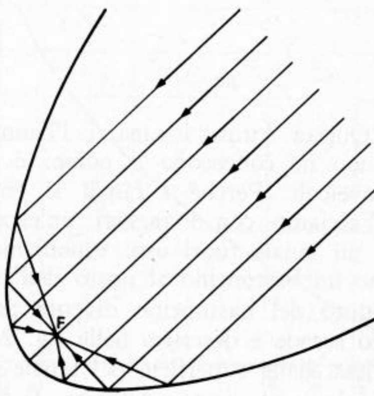

fig. 26

del fanale e vengono riflessi parallelamente (fig. 27): in tal modo la luce va molto lontano.

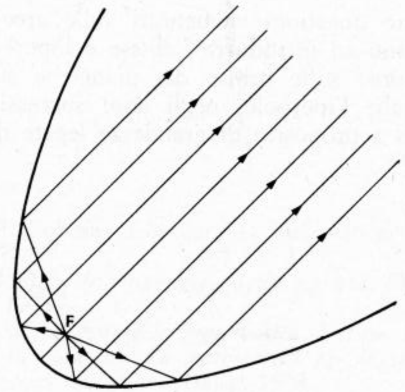

fig. 27

Ecco dunque un'altra occasione per parlare della riflessione della luce. Ma è un'occasione che ci permette di aprire un discorso sull'energia solare e, anche, sul funzionamento dei radar. Lo studio, quindi, si allarga: diventa attuale.

Lo studio matematico della parabola si presenta anche, e anzi in modo piú semplice, quando si considera l'area del quadrato in funzione del suo lato: se il lato raddoppia, l'area diventa 4 volte maggiore, se il lato triplica, l'area diventa 9 volte maggiore,... Si ottiene una semi-parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Il problema stesso che ci ha condotto a questo grafico ci permette di scriverne l'equazione

$$y = x^2,$$

dove y rappresenta l'area e x la lunghezza del lato.

L'introduzione dei numeri relativi permetterà, già in prima, di tracciare l'intera parabola. Nelle classi successive, poi, saranno proprio argomenti di fisica (come per esempio la legge di caduta dei gravi) a farci parlare della legge parabolica

$$y = kx^2.$$

Sono sempre questioni elementari sulle aree e sui perimetri che portano ad introdurre l'ellisse e l'iperbole. L'ellisse porterà il discorso sulle orbite dei pianeti e su quelle dei satelliti artificiali; l'iperbole, negli anni successivi, sarà piú volte incontrata a proposito di grandezze legate da proporzionalità inverse.

Suggerimenti bibliografici

R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Torino, Boringhieri, 1972[3].

T. Dantzig, *Il numero, linguaggio della scienza*, Firenze, La Nuova Italia, 1973[2].

B. De Finetti, *Saper vedere in matematica*, Torino, Loescher, 1967.

T. J. Fletcher (a cura di), *La matematica per la scuola dei nostri giorni*, Firenze, La Nuova Italia, 1978.

C. Gattegno e altri, *Il materiale per l'insegnamento della matematica*, Firenze, La Nuova Italia, 1975[3]

M. Kline, *La matematica nella cultura occidentale*, Milano, Feltrinelli, 1976.

U. Pampallona, L. Ragusa Gilli, *Che cos'è la statistica*, Torino, Loescher, 1968.

J. Piaget e altri, *Avviamento al calcolo*, Firenze. La Nuova Italia, 1974[6].

J. Piaget e altri, *Insegnamento della matematica*, Firenze, La Nuova Italia, 1974[6].

NOTA. Per i *Programmi per la scuola media statale*: « Matematica » cfr. p. 211.